1. **D.** Tražimo $p \in \mathbb{R}$ takav da je $\frac{p}{100} \cdot 568 = 426$. Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned} &\frac{p}{100} \cdot 568 = 426, \quad / \cdot 100 \\ &p \cdot 568 = 426 \cdot 100, \quad / : 568 \\ &p = \frac{426 \cdot 100}{568} = \frac{42600}{568} = 75. \end{aligned}$$

Dakle, 75% od 568 iznosi 426.

2. **B**. Označimo traženi broj s c. Tada redom imamo:

$$c = \frac{1}{3} \cdot b = \frac{1}{3} \cdot (a-1)^3 = \frac{1}{3} \cdot (10-1)^3 = \frac{1}{3} \cdot 9^3 = \frac{1}{3} \cdot 729 = 243.$$

3. **A**. Zadani izraz treba svesti na najmanji zajednički nazivnik i reducirati algebarski izraz u brojniku. Dobivamo redom:

$$5 - \frac{1+3 \cdot a}{a} = \frac{5}{1} - \frac{1+3 \cdot a}{a} = \frac{5 \cdot a - (1+3 \cdot a)}{a} = \frac{5 \cdot a - 1 - 3 \cdot a}{a} = \frac{2 \cdot a - 1}{a}.$$

Brojnik ovoga izraza jednak je $2 \cdot a - 1$.

4. **D**. Kut čija je mjera 108° je vanjski kut pravokutnoga trokuta. Njegova mjera jednaka je zbroju mjera unutrašnjih kutova toga pravokutnoga trokuta koji tom vanjskom kutu nisu susjedni. Mjere tih kutova su 90° i α. Nadalje, u pravokutnom trokutu čiji su kutovi $\frac{\alpha}{2}$ i β vrijedi jednakost $\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^\circ$, pa tako dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 90^\circ + \alpha = 108^\circ, \\ \frac{\alpha}{2} + \beta = 90^\circ. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe toga sustava je $\alpha = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ$, što uvršteno u drugu jednadžbu sustava daje

$$\begin{aligned} &\frac{18^\circ}{2} + \beta = 90^\circ, \\ &9^\circ + \beta = 90^\circ, \\ &\beta = 90^\circ - 9^\circ = 81^\circ. \end{aligned}$$

5. **C.** Na slici je prikazana elipsa čija jednadžba u segmentnom obliku glasi: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Jedina od četiriju ponuđenih jednadžbi koja ima taj oblik je jednadžba navedena pod **C**.

6. **B**. Zadanom kompleksnom broju odgovara točka $Z=(0,5)$ Gaussove ravnine. Ta točka pripada pozitivnom dijelu imaginarne osi. Stoga je njezina spojnica s ishodištem Gaussove ravnine upravo pozitivan dio imaginarne osi. Ta spojnica s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut čija je mjera 90°, odnosno $\frac{\pi}{2}$ radijana. Dakle, traženi argument je jednak $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

7. **C**. Koristeći pravila za potenciranje potencija, imamo redom:

$$27^m=8 \Leftrightarrow \left(3^3\right)^m=2^3 \Leftrightarrow 3^{3\cdot m}=2^3 \Leftrightarrow \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{3\cdot m}=2^3 \Leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot m}=2^3 \Leftrightarrow \left(9^m\right)^{\frac{1}{2}\cdot 3}=2^3 \quad /^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(9^m\right)^{\frac{1}{2}\cdot 3}\right]^{\frac{2}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left(9^m\right)^{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{2}{3}}=2^{3\cdot\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 9^m=2^2 \Leftrightarrow 9^m=4.$$

8. **A**. Graf zadane funkcije je pravac čija jednadžba u eksplicitnom obliku glasi: $y=4\cdot x+1$. Zapišimo tu jednadžbu u segmentnom obliku. Dobivamo:

$$\begin{aligned} &y=4\cdot x+1,\\ &-4\cdot x+y=1,\\ &\frac{x}{-\frac{1}{4}}+\frac{y}{1}=1. \end{aligned}$$

Iz ovoga oblika očitavamo da graf zadane funkcije siječe os apscisa (os x) u točki $S_1=\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$, a os ordinata (os y) u točki $S_2=(0,1)$. Dakle, točna tvrdnja je tvrdnja **A**.

9. **C**. Primijetimo da vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned} &f(-x)=(-x)^4=(-1)^4\cdot x^4=1\cdot x^4=x^4=f(x),\\ &g(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-g(x),\\ &h(-x)=\sin(-x)=-\sin(x)=-h(x). \end{aligned}$$

Odatle slijedi da su g i h neparne funkcije.

***<u>Napomena</u>*: U zadatku nije navedeno prirodno područje definicije nijedne zadane funkcije iako je ono bitno za utvrđivanje (ne)parnosti funkcije. Stoga se u rješenju pretpostavlja da je svaka od njih definirana na najvećem podskupu skupa $\mathbb{R}$ za koje pravilo funkcije ima smisla. U slučaju funkcija f i h taj podskup je upravo sam skup $\mathbb{R}$, dok je u slučaju funkcije g riječ o skupu $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.**

10. C. Rastavimo zadani izraz na faktore primjenjujući formulu za razliku kvadrata. Dobivamo redom:

$$4\cdot n^3+12\cdot n^2-n-3=4\cdot n^2\cdot(n+3)-(n+3)=(n+3)\cdot\left(4\cdot n^2-1\right)=$$
$$=(n+3)\cdot\left[(2\cdot n)^2-1^2\right]=(n+3)\cdot(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1).$$

Dakle, u rastavu se pojavljuju binomi $n+3$, $2\cdot n-1$ i $2\cdot n+1$. U popisu ponuđenih binoma pojavljuje se jedino $2\cdot n+1$.

11. D. Za $x\in\langle 1,3\rangle$ vrijede nejednakosti $2\cdot x+3>0$ i $1-5\cdot x<0$. Odatle slijedi da za $x\in\langle 1,3\rangle$ vrijede jednakosti:

$$|2\cdot x+3|=2\cdot x+3,$$
$$|1-5\cdot x|=-(1-5\cdot x)=-1+5\cdot x=5\cdot x-1.$$

Zbog toga je zadani izraz jednak

$$|2\cdot x+3|+|1-5\cdot x|=(2\cdot x+3)+(5\cdot x-1)=2\cdot x+3+5\cdot x-1=7\cdot x+2.$$

12. A. Izračunajmo najprije nepoznatu ordinatu točke (2, *y*). Da bismo to učinili, u pravilo funkcije f uvrstimo $x = 2$. Tako dobijemo:

$$y=f(2)=\sqrt{2^3+1}=\sqrt{8+1}=\sqrt{9}=3.$$

Dakle, tangenta je povučena u točki $T = (2, 3)$. Njezin koeficijent smjera dobijemo kao vrijednost prve derivacije funkcije f za $x = 2$. Prigodom deriviranja primjenjujemo pravilo deriviranja složene funkcije. Imamo:

$$k=\left(f'\right)_{x=2}=\left[\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3+1}}\cdot\left(x^3+1\right)'\right]_{x=2}=\left\{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3+1}}\cdot\left[\left(x^3\right)'+(0)'\right]\right\}_{x=2}=\left[\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3+1}}\cdot\left(3\cdot x^{3-1}+0\right)\right]_{x=2}=$$
$$=\left(\frac{3\cdot x^2}{2\cdot\sqrt{x^3+1}}\right)_{x=2}=\frac{3\cdot 2^2}{2\cdot\sqrt{2^3+1}}=\frac{3\cdot 4}{2\cdot\sqrt{8+1}}=\frac{3\cdot 4}{2\cdot\sqrt{9}}=\frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}=\frac{4}{2}=2.$$

Primjenom izraza za dobivanje jednadžbe pravca kojemu su zadani jedna točka i koeficijent smjera slijedi:

$$t\ldots\ y-3=2\cdot(x-2),$$
$$t\ldots\ y=2\cdot x-4+3,$$
$$t\ldots\ y=2\cdot x-1.$$

***Napomena*: Zadatak je moguće riješiti i kraće tako da se, nakon izračuna nepoznate ordinate točke *T*, uoči da od navedenih četiriju pravaca jedino pravac naveden pod A prolazi točkom *T*.**

13. D. Odredimo najprije koeficijent smjera pravca *p*. Njega ćemo odrediti iz podatka da je pravac *p* okomit na pravac $4\cdot x+3\cdot y+5=0$. Stoga najprije zapišimo jednadžbu toga pravca u eksplicitnom obliku:

$$4\cdot x+3\cdot y+5=0,$$
$$3\cdot y=-4\cdot x-5,\quad /:3$$
$$y=-\frac{4}{3}\cdot x-\frac{5}{3}.$$

Odatle slijedi da je koeficijent smjera pravca p

$$k=-\frac{1}{-\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}.$$

Preostaje odrediti odsječak l pravca p na osi ordinata. U tu ćemo svrhu iskoristiti uvjet tangencijalnosti za kružnicu čija je jednadžba zadana u općem obliku. Iz jednadžbe kružnice očitamo $p=4,\ q=-2,\ r^2=16$, pa uvrštavanjem u spomenuti uvjet tangencijalnosti dobivamo:

$$\left(-2-\frac{3}{4}\cdot 4-l\right)^2=16\cdot\left[1+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right],$$
$$\left(-2-3-l\right)^2=16\cdot\left(1+\frac{9}{16}\right),$$
$$(-5-l)^2=16+9,$$
$$(-5-l)^2=25.$$

Odatle slijedi da mora vrijediti ili jednakost $-5-l=5$ ili jednakost $-5-l=-5$. Iz prve jednakosti odmah slijedi l = –10, a iz druge l = 0. Dakle, zadatak ima dva rješenja: $p_1 ...\ y=\frac{3}{4}\cdot x-10$ i $p_1 ...\ y=\frac{3}{4}\cdot x$. U popisu ponuđenih odgovora ponuđen je jedino pravac p_1.

14. B. Na kraju prvoga tjedna površina mahovine bit će jednaka:

$$1.3+\frac{5}{100}\cdot 1.3=1.3\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)=1.3\cdot 1.05^1\ \text{m}^2.$$

Na kraju drugoga tjedna površina mahovine bit će jednaka:

$$1.3\cdot 1.05^1+\frac{5}{100}\cdot\left(1.3\cdot 1.05^1\right)=\left(1.3\cdot 1.05^1\right)\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)=1.3\cdot 1.05^1\cdot 1.05=1.3\cdot 1.05^2\ \text{m}^2.$$

Matematičkom indukcijom zaključujemo da će površina mahovine na kraju n-tjedna biti jednaka $1.3\cdot 1.05^n\ \text{m}^2$. U zadatku se traži izračun površine mahovine nakon n = 8 tjedana rasta, pa lako dobivamo:

$$P=1.3\cdot 1.05^8=1.3\cdot 1.47745544378906=1.92069207692578\approx 1.92\ \text{m}^2\ .$$

15. C. Najmanja vrijednost funkcije *f* postiže se kad je vrijednost sinusa jednaka –1. Ona iznosi $f_{\min} = A\cdot(-1)+D=-A+D.$ Najveća vrijednost funkcije *f* postiže se kad je vrijednost sinusa jednaka 1. Ona iznosi $f_{\max} = A\cdot 1+D=A+D.$ U zadatku je navedeno da su $f_{\min}=300$, $f_{\max}=920$, pa dobivamo sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} -A+D=300, \\ A+D=920. \end{cases}$$

Zbrajanjem obiju jednadžbi dobijemo $2\cdot D=1220$, a odatle dijeljenjem s 2 slijedi $D=610$. Uvrštavanjem ove vrijednosti npr. u drugu jednadžbu sustava dobivamo $A=310.$

Razdoblje između pojave najmanje i pojave najveće vrijednosti iznosi 4 godine. Taj broj je jednak polovici temeljnoga perioda funkcije *f*. Temeljni period funkcije *f* dan je izrazom $T=\frac{2\cdot\pi}{B}$, pa je njegova polovica jednaka $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\pi}{B}=\frac{\pi}{B}$ Tako iz jednadžbe $\frac{\pi}{B}=4$ odmah dobivamo $B=\frac{\pi}{4}$.

Dakle, funkcija *f* je definirana pravilom $f(t)=310\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot t-\frac{7}{4}\cdot\pi\right)+610$. Traženi broj jednak je $f(18)$, pa izračunajmo tu vrijednost:

$$f(18)=310\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 18-\frac{7}{4}\cdot\pi\right)+610=310\cdot\sin\left(\frac{18}{4}\cdot\pi-\frac{7}{4}\cdot\pi\right)+610=310\cdot\sin\left(\frac{11}{4}\cdot\pi\right)+610=$$

$$=310\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi+2\cdot\pi\right)+610=310\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)+610=310\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+610=155\cdot\sqrt{2}+610\approx$$

$$\approx 829.20310216783\approx 830.$$

***Napomena*: Za rješenje zadatka nije bitno u kojoj je godini računajući od trenutka početka mjerenja broj jedinki bio najmanji, a u kojoj najveći. Bitan je podatak koliko je vremena prošlo od godine pojave najmanje vrijednosti do godine pojave najveće vrijednosti.**

16. 72. Primijetimo da vrijede jednakosti $5832=18^3$ i $288=18\cdot 16$, pa dobivamo:

$$\sqrt{288\cdot\sqrt[3]{5832}}=\sqrt{18\cdot 16\cdot\sqrt[3]{18^3}}=\sqrt{18\cdot 16\cdot 18}=\sqrt{18^2\cdot 4^2}=\sqrt{18^2}\cdot\sqrt{4^2}=18\cdot 4=72.$$

17. $2.459424\cdot 10^{17}\approx 2.459\cdot 10^{17}$. Imamo redom:

$$1.644\cdot 10^9 \text{ astronomskih jedinica}=1.644\cdot 10^9\cdot 1.496\cdot 10^{11}\text{ m}=2.459424\cdot 10^{9+11}\text{ m}=$$

$$=2.459424\cdot 10^{20}\text{ m}=2.459424\cdot 10^{20}\cdot 10^{-3}\text{ km}=2.459424\cdot 10^{20-3}\text{ km}=2.459424\cdot 10^{17}\text{ km}.$$

18. 1.) 2. Imamo redom:

$$x-\left[3\cdot x-(5+x)\right]+8=3\cdot(x+2)-1,$$
$$x-(3\cdot x-5-x)+8=3\cdot x+6-1,$$
$$x-(2\cdot x-5)+8=3\cdot x+5,$$
$$x-2\cdot x+5+8=3\cdot x+5,$$
$$-x+8=3\cdot x,$$
$$-x-3\cdot x=-8,$$
$$-4\cdot x=-8.$$

Odatle dijeljenjem s (–4) slijedi $x = 2$.

2.) $x>-4$ **ili** $x\in\langle-\infty,-4\rangle$ **.** Imamo redom:

$$\frac{x-3}{2}<2\cdot x+4.5 \quad /\cdot 2$$
$$x-3<4\cdot x+9,$$
$$x-4\cdot x<9+3,$$
$$(-3)\cdot x<12.$$

Odatle dijeljenjem s (–3) i promjenom znaka nejednakosti slijedi $x>-4$. Stoga je traženo rješenje interval $\langle-\infty,-4\rangle$.

19. 1.) $\frac{C}{6\cdot B-5}$. Imamo redom:

$$5\cdot A+C=6\cdot A\cdot B,$$
$$5\cdot A-6\cdot A\cdot B=-C$$
$$A\cdot(5-6\cdot B)=-C, \quad /:(5-6\cdot B)$$
$$A=-\frac{C}{5-6\cdot B}=\frac{C}{-(5-6\cdot B)}=\frac{C}{-5+6\cdot B}=\frac{C}{6\cdot B-5}.$$

2.) 0, $\frac{1}{3}$**.** Rastavimo lijevu stranu jednadžbe na faktore primjenjujući formulu za razliku kubova:

$$5\cdot y-135\cdot y^4=0, \quad /:5$$
$$y-27\cdot y^4=0,$$
$$y\cdot(1-27\cdot y^3)=0,$$
$$y\cdot\left[1^3-(3\cdot y)^3\right]=0,$$
$$y\cdot(1-3\cdot y)\cdot(1+3\cdot y+9\cdot y^2)=0$$

Izračunajmo diskriminantu D kvadratne jednadžbe $9\cdot y^2+3\cdot y+1=0$. Ona je jednaka: $D=3^2-4\cdot 9\cdot 1=9-36=-27$. Očito je $D<0$, pa navedena kvadratna jednadžba nema nijedno realno rješenje. Stoga mora biti $y=0$ ili $1-3\cdot y=0$. Prva jednadžba je

trivijalna, a iz druge slijedi $y=\frac{1}{3}$. Dakle, sva realna rješenja zadane jednadžbe su $y_1=0$ i $y_2=\frac{1}{3}$.

20. 1.) 38. Riješimo zadanu jednadžbu uobičajenim postupkom:

$$n_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot 0.75\cdot(-513)}}{2\cdot 0.75}=\frac{15\pm\sqrt{225-(-1539)}}{1.5}=\frac{15\pm\sqrt{225+1539}}{1.5}=$$
$$=\frac{15\pm\sqrt{1764}}{1.5}=\frac{15\pm 42}{1.5}\Rightarrow n_1=\frac{15+42}{1.5}=\frac{57}{1.5}=38,\ n_2=\frac{15-42}{1.5}=-\frac{27}{1.5}=-18.$$

Od dvaju dobivenih rješenja jedino $n_1=38$ pripada skupu prirodnih brojeva.

2.) 17. U izraz za iznos zarade Z uvrstimo $n = 40$ i $Z = 515$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
&515=0.75\cdot 40^2-t\cdot 40-5,\\
&515=0.75\cdot 1600-t\cdot 40-5,\\
&515=1200-t\cdot 40-5,\\
&40\cdot t=1200-5-515,\\
&40\cdot t=680.
\end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 40 slijedi $t = 17$. Dakle, traženi troškovi iznose 17 kn.

21. 1.) $x\le\log_7 2+1$ **ili** $x\in\left\langle-\infty,\log_7 2+1\right]$ **.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&7^{x-1}\le 2\quad /\log_7\\
&x-1\le\log_7 2\\
&x\le\log_7 2+1.
\end{aligned}$$

Dakle, traženo rješenje je poluzatvoreni interval $\left\langle-\infty,\log_7 2+1\right]$**.**

2.) $\frac{1}{2}\cdot\log_a 5$**.** Označimo zadani izraz s x. Tada redom imamo:

$$\begin{aligned}
&x=\frac{1}{\log_5\left(a^2\right)}\quad /\cdot\log_5\left(a^2\right),\\
&\left[\log_5\left(a^2\right)\right]\cdot x=1,\\
&\left(2\cdot\log_5 a\right)\cdot x=1,\quad /:(2\cdot x)\\
&\log_5 a=\frac{1}{2\cdot x},\\
&\frac{1}{\log_a 5}=\frac{1}{2\cdot x},
\end{aligned}$$

$$\log_a 5 = 2\cdot x, \quad /:2$$
$$x = \frac{1}{2}\cdot \log_a 5.$$

22. 1.) 170. Primijetimo da vrijedi jednakost $a_{57} = a_{54} + 3\cdot d$. U nju uvrstimo $a_{57} = 206$ i $d = 12$, pa dobijemo:

$$206 = a_{54} + 3\cdot 12,$$
$$a_{54} = 206 - 3\cdot 12 = 206 - 36 = 170.$$

2.) 1. U binomni poučak uvrstimo $x = -1$, $y = 2$ i $n = 100$. Dobijemo:

$$[(-1)+2]^{100} = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cdot(-1)^k\cdot 2^{100-k} = \binom{100}{0}\cdot(-1)^0\cdot 2^{100-0} + \binom{100}{1}\cdot(-1)^1\cdot 2^{100-1} +$$
$$+\binom{100}{2}\cdot(-1)^2\cdot 2^{100-2} + \ldots + \binom{100}{98}\cdot(-1)^{98}\cdot 2^{100-98} + \binom{100}{99}\cdot(-1)^{99}\cdot 2^{100-99} +$$
$$+\binom{100}{100}\cdot(-1)^{100}\cdot 2^{100-100} = \binom{100}{0}\cdot 1\cdot 2^{100} + \binom{100}{1}\cdot(-1)\cdot 2^{99} + \binom{100}{2}\cdot 1\cdot 2^{98} + \ldots$$
$$+\binom{100}{98}\cdot 1\cdot 2^2 + \binom{100}{99}\cdot(-1)\cdot 2^1 + \binom{100}{100}\cdot 1\cdot 2^0 = \binom{100}{0}\cdot 2^{100} - \binom{100}{1}\cdot 2^{99} +$$
$$+\binom{100}{2}\cdot 2^{98} + \ldots + \binom{100}{98}\cdot 2^2 - \binom{100}{99}\cdot 2^2 + \binom{100}{100}.$$

Tako smo na desnoj strani dobili izraz čiju vrijednost tražimo. Tu ćemo vrijednost lako izračunati koristeći lijevu stranu: $[(-1)+2]^{100} = 1^{100} = 1$.

23. 1.) –13. Prema Vietèovim formulama, umnožak svih rješenja zadane jednadžbe jednak je $\frac{2-p}{3}$. Taj izraz treba biti jednak 5, pa dobivamo jednadžbu $\frac{2-p}{3} = 5$. Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$\frac{2-p}{3} = 5 \quad /\cdot 3$$
$$2 - p = 15,$$
$$-p = 15 - 2,$$
$$-p = 13, \quad /:(-1)$$
$$p = -13.$$

2.) $p < -1$ **ili** $p \in \langle -\infty, -1\rangle$ **.** Vodeći koeficijent (koeficijent uz x^2) u pravilu funkcije *f* jednak je 3. Stoga će funkcija *f* poprimati strogo pozitivne vrijednosti ako i samo ako diskriminanta kvadratne jednadžbe $f(x) = 0$ bude strogo negativna. (U tom slučaju ta jednadžba nema realnih rješenja, pa se graf funkcije *f* nalazi iznad osi apscisa, a to

upravo znači da funkcija poprima samo strogo pozitivne vrijednosti.) Diskriminanta kvadratne jednadžbe $f(x)=0$ je

$$D=(-6)^2-4\cdot 3\cdot(2-p)=36-24+12\cdot p=12\cdot p+12.$$

Taj izraz treba biti strogo negativan, pa dobivamo nejednadžbu $12\cdot p+12<0$. Riješimo tu nejednadžbu:

$$\begin{aligned}&12\cdot p+12<0,\\&12\cdot p<-12,\quad /:12\\&p<-1.\end{aligned}$$

Dakle, traženi realni brojevi tvore otvoreni interval $\langle -\infty,-1\rangle$.

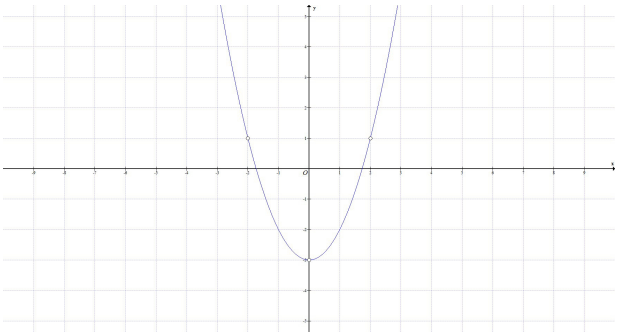
24. 1.) Vidjeti Sliku 1. Iz podatka da je graf kvadratne funkcije simetričan s obzirom na os ordinata (os y) zaključujemo da je ta kvadratna funkcija parna. Stoga njezino pravilo nužno ima oblik $f(x)=a\cdot x^2+c$, gdje su $a,c\in\mathbb{R}$ konstante. Odredimo te konstante koristeći dvije zadane točke grafa funkcije. U pravilo funkcije f najprije uvrstimo $x=0$ i $f(0)=-3$:

$$\begin{aligned}&-3=a\cdot 0^2+c,\\&-3=0+c,\\&c=-3.\end{aligned}$$

Preostaje odrediti konstantu a. U pravilo funkcije f uvrstimo $x=2$, $f(2)=1$ i $c=-3$:

$$\begin{aligned}&1=a\cdot 2^2+(-3),\\&a\cdot 4-3=1,\\&4\cdot a=1+3,\\&4\cdot a=4,\quad /:4\\&a=1.\end{aligned}$$

Dakle, tražena kvadratna funkcija je $f(x)=x^2-3$. Tjeme njezina grafa je sjecište toga grafa s osi ordinata, a to je točka (0, –3). Radi parnosti je i $f(-2)=f(2)=1$. Stoga u pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtamo točke (0, –3), (2, 1) i (–2, 1), pa ih spojimo parabolom. Dobivamo Sliku 1.

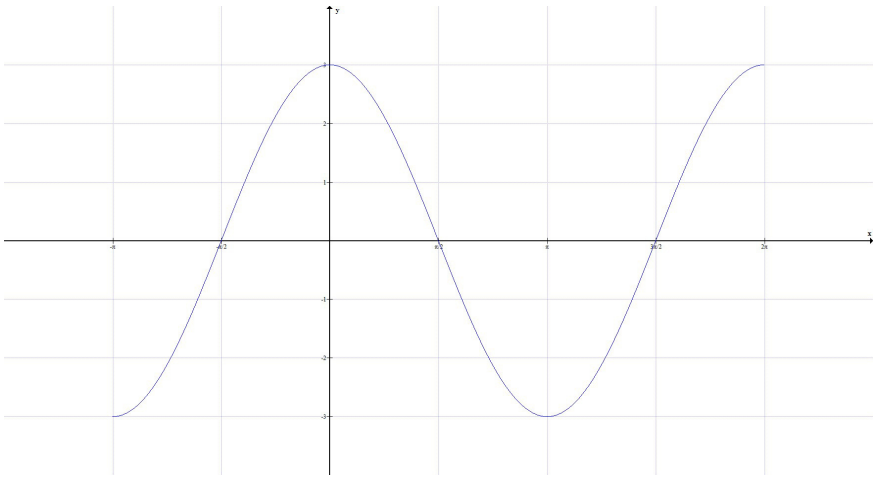


Slika 1.

2.) Vidjeti Sliku 2. Traženi graf možemo dobiti tako da graf funkcije $\cos x$ „izdužimo“ triput (svaku ordinatu te točke povećamo tri puta), a možemo se poslužiti i donjom tablicom:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\cdot\pi$	$2\cdot\pi$
$f(x)$	–3	0	3	0	–3	0	3

U obama slučajevima dobivamo Sliku 2.



Slika 2.

25. 1.) $2\cdot a^2$. Imamo redom:

$$\frac{\sin^2 x-\cos^2 x+1}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{2\cdot\sin^2 x}{\cos^2 x}=2\cdot\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=2\cdot\mathrm{tg}^2 x.$$

Označimo li $a=\mathrm{tg}\,x$, zaključujemo da je zadani izraz jednak $2\cdot a^2$.

2.) $x=(2\cdot k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ **ili** $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$, **gdje je** $k\in\mathbb{Z}$**.** Primijenimo formulu za razliku kvadrata i identitet $\sin^2 x=\frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(2\cdot x)\right]$. Dobivamo:

$$\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},$$

$$(\sin x)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4},$$

$$\sin^2 x-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(2\cdot x)\right]=\frac{3}{4}+\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(2\cdot x)\right]=1\quad /\cdot 2$$

$$1-\cos(2\cdot x)=2,$$
$$-\cos(2\cdot x)=2-1,$$
$$-\cos(2\cdot x)=1,\quad /:(-1)$$
$$\cos(2\cdot x)=-1.$$

Odatle slijedi $2\cdot x=(2\cdot k+1)\cdot\pi$. Dijeljenjem ovoga izraza s 2 dobivamo:

$$x=(2\cdot k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\text{ , pri čemu je } k\in\mathbb{Z}.$$

26. 1.) ≈ 2.81. Povucimo visinu iz vrha u kojemu se sastaju krakovi trokuta na osnovicu. Dobivamo pravokutan trokut kojemu je mjera jednoga kuta 32°, a duljina jedne katete jednaka polovici duljine osnovice polaznoga trokuta $a_1=\frac{9}{2}$ cm. Traženu duljinu v visine na osnovicu izračunamo primjenom trigonometrijske funkcije tangens:

$$\text{tg } 32^\circ=\frac{v}{\frac{9}{2}}\Rightarrow v=\frac{9}{2}\cdot\text{tg } 32^\circ=2.811912084\approx 2.81\,\text{cm}.$$

2.) 0.654142184 rad. $=37^\circ 28'47''$**.** Primijenimo sinusov poučak. Označimo li traženu mjeru kuta s α, dobivamo redom:

$$\frac{17.8}{\sin(73^\circ 26')}=\frac{11.3}{\sin\alpha},$$
$$17.8\cdot\sin\alpha=11.3\cdot\sin(73^\circ 26')$$
$$\sin\alpha=\frac{11.3}{17.8}\cdot\sin(73^\circ 26').$$

Budući da se nasuprot kraćoj stranici nalazi kut manje mjere, znamo da će rješenje zadatka biti kut u intervalu $\langle 0,73^\circ 26'\rangle$. Stoga možemo primijeniti funkciju arkus sinus i dobiti:

$$\alpha=\arcsin\left[\frac{11.3}{17.8}\cdot\sin(73^\circ 26')\right]=\arcsin\left(\frac{11.3}{17.8}\cdot 0.958488619\right)=\arcsin(0.60847873)=$$
$$=0.654142184\text{ rad. }=37^\circ 28'47''.$$

27. 1.) $y=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{11}{2}$ **ili** $6\cdot x+10\cdot y-55=0$. Izračunajmo najprije koeficijent smjera pravca koji prolazi točkama *A* i *B*:

$$k=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-3}{4-(-1)}=\frac{-3}{4+1}=-\frac{3}{5}.$$

Preostaje napisati jednadžbu pravca koji prolazi točkom *S* i ima koeficijent smjera jednak *k*. Koristimo izraz za određivanje jednadžbe pravca ako su zadani jedna točka

pravca i koeficijent smjera pravca:

$$y-4=-\frac{3}{5}\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right),$$
$$y-4=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{3}{2},$$
$$y=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{3}{2}+4,$$
$$y=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{3+4\cdot 2}{2},$$
$$y=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{3+8}{2},$$
$$y=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{11}{2}.$$

Ovu jednadžbu podesnije je zapisati u implicitnom obliku:

$$y=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{11}{2}\quad /\cdot 10$$
$$10\cdot y=-6\cdot x+55,$$
$$6\cdot x+10\cdot y-55=0.$$

2.) $\sqrt{34}$ **jedinice duljine**. Tražena duljina jednaka je udaljenosti točaka *A* i *B*. Primjenom formule za udaljenost dviju točaka u ravnini dobijemo:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{[4-(-1)]^2+(0-3)^2}=\sqrt{(4+1)^2+(-3)^2}=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}\,.$$

3.) ***C* = (6, 5).** Primijenit ćemo osnovno svojstvo paralelograma *ABCD*: četverokut *ABCD* je paralelogram ako i samo ako dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ imaju isto polovište. U našem zadatku to znači da je točka *S* polovište dužine $\overline{AC}$. Primjenom formule za računanje koordinata polovišta dužine dobivamo:

$$\begin{cases}\frac{5}{2}=\frac{-1+x_C}{2},\\ 4=\frac{3+y_C}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5=-1+x_C,\\ 8=3+y_C\end{cases}\Leftrightarrow(x_C,y_C)=(6,5).$$

Dakle, točka *C* ima koordinate (6, 5).

28. 1.). $D_f=\left[-3,+\infty\right\rangle\setminus\{2\}$. Zadana funkcija je definirana za sve $x\in\mathbb{R}$ za koje su istodobno važeće relacije $x+3\geq 0$ (jer je drugi korijen definiran samo za nenegativne vrijednosti radikanda) i $x-2\neq 0$ (jer je razlomak definiran samo u slučaju kad je njegov nazivnik različit od nule). Iz prve relacije odmah slijedi $x\geq -3$, a iz druge $x\neq 2$. Dakle, rješenje zadatka su svi realni brojevi koji su istodobno jednaki ili veći od 3, te različiti od 2. Oni tvore skup $\left[-3,+\infty\right\rangle\setminus\{2\}$.

2.) $x=\frac{15}{8}$**.** Lijeva strana polazne jednadžbe je vrijednost drugoga korijena, a ta je vrijednost uvijek nenegativan realan broj. Stoga i desna strana polazne jednadžbe mora biti nenegativan realan broj. Taj zahtjev daje uvjet $4-x\geq 0$, odnosno $x\leq 4$.

Uvažavajući taj uvjet, kvadriramo zadanu jednadžbu. Dobivamo redom:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=(4-x)^2,$$
$$x^2+1=4^2-2\cdot 4\cdot x+x^2,$$
$$1=16-8\cdot x,$$
$$8\cdot x=16-1,$$
$$8\cdot x=15.$$

Dijeljenjem ove jednakosti s 15 dobivamo $x=\frac{15}{8}$. Ta vrijednost je strogo manja od 4, pa je jedino rješenje zadane jednadžbe $x=\frac{15}{8}$.

3.) 4. Odredimo najprije prvu derivaciju funkcije *f*. Primijenimo osnovna pravila za deriviranje:

$$f'(x)=(3\cdot x^2+10)'=(3\cdot x^2)'+(10)'=3\cdot(x^2)'+0=3\cdot 2\cdot x^{2-1}=6\cdot x^1=6\cdot x.$$

Tako dobivamo:

$$f(2)-f'(3)=(3\cdot 2^2+10)-(6\cdot 3)=3\cdot 4+10-18=12+10-18=4.$$

29. 1.) $\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]=\left\langle -\infty,-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle 0,+\infty\right\rangle$**.** Imamo redom:

$$(2\cdot x-1)^2+3\cdot(2\cdot x-1)+2>0,$$
$$(2\cdot x)^2-2\cdot(2\cdot x)\cdot 1+1^2+6\cdot x-3+2>0,$$
$$4\cdot x^2-4\cdot x+1+6\cdot x-3+2>0,$$
$$4\cdot x^2+2\cdot x>0\quad /:2$$
$$2\cdot x^2+x>0,$$
$$x\cdot(2\cdot x+1)>0.$$

Uočimo da kvadratna jednadžba $2\cdot x^2+x=0$, odnosno njoj ekvivalentna jednadžba $x\cdot(2\cdot x+1)=0$ ima rješenja $x_1=0$ i $x_2=-\frac{1}{2}$. Stoga kvadratna funkcija $f(x)=2\cdot x^2+x$ poprima strogo pozitivne vrijednosti na skupu koji se dobije kad se iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ izbaci segment određen nultočkama te funkcije, tj. segment

$\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]$. Dakle, rješenje zadatka je skup $\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]$. Taj skup možemo zapisati kao uniju dvaju otvorenih intervala: $\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]=\left\langle -\infty,-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle 0,+\infty\right\rangle$.

2.) 4; 6; –2. Antilogaritmiranjem prve jednadžbe dobijemo $3\cdot x+z=10^1$, odnosno $3\cdot x+z=10.$

Nadalje, uočimo da je $0.04=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}=\frac{1}{5^2}=5^{-2}$, pa izjednačavanjem eksponenata u drugoj jednadžbi dobijemo $x-y=-2$.

Tako smo dobili sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{cases}3\cdot x+z=10,\\ x-y=-2,\\ y+3\cdot z=0.\end{cases}$$

Zbrojimo li drugu i treću jednadžbu, pa tako dobivenoj jednadžbi nadopišemo prvu jednadžbu sustava, dobivamo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases}3\cdot x+z=10,\\ x+3\cdot z=-2.\end{cases}$$

Taj sustav možemo riješiti npr. metodom suprotnih koeficijenata. Pomnožimo drugu jednadžbu s (–3) i pribrojimo tako dobivenu jednadžbu prvoj jednadžbi. Dobivamo:

$$-8\cdot z=16.$$

Odatle dijeljenjem s (–8) slijedi z = –2. Sada iz druge jednadžbe odmah dobivamo $x=-2-3\cdot z=-2-3\cdot(-2)=-2+6=4,$ a iz treće jednadžbe ranije razmatranoga sustava triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice $y=-3\cdot z=-3\cdot(-2)=6.$ Dakle, rješenje zadatka je uređena trojka $(x,y,z)=(4,6,-2)$.

3.) $15+10\cdot\sqrt{3}$**.** Spojimo središta triju manjih kružnica. Dobivamo jednakostraničan trokut čija je duljina stranice 15 + 15 = 30 cm. Točka S je jednako udaljena od svakoga vrha toga trokuta, i ta udaljenost je jednaka $R-15$ cm, pri čemu je R traženi polumjer. Stoga zaključujemo da je točka S središte kružnice opisane uočenom jednakostraničnom trokutu. Polumjer te kružnice je $r=\frac{30}{3}\cdot\sqrt{3}=10\cdot\sqrt{3}$ (dvije trećine visine jednakostraničnoga trokuta). Tako iz $R-15=10\cdot\sqrt{3}$ odmah slijedi $R=15+10\cdot\sqrt{3}$ cm.

4.) $56\cdot\pi+8\cdot\sqrt{5}\cdot\pi\ \text{cm}^2$**.** Rotacijom zadanoga trapeza oko njegove dulje osnovice nastaju valjak i stožac koji imaju zajedničku osnovku („spaja“ ih upravo ta osnovka). Stoga strane dobivenoga tijela tvore jedna osnovka valjka, plašt valjka i plašt stošca. Izračunajmo zasebno površinu svake pojedine strane.

Osnovka valjka ima polumjer jednak duljini kraćega kraka trapeza. Ta duljina iznosi 4 cm, pa je površina osnovke valjka $B = 4^2 \cdot \pi = 16 \cdot \pi \text{ cm}^2$.

Razvijemo li plašt valjka u ravninu, dobit ćemo pravokutnik kojemu jedna stranica ima duljinu jednaku opsegu osnovke valjka, a druga stranica ima duljinu jednaku duljini kraće osnovice. Stoga je površina plašta jednaka $P_1 = (2 \cdot 4 \cdot \pi) \cdot 5 = 40 \cdot \pi \text{ cm}^2$.

Preostaje izračunati površinu plašta stošca. U tu nam svrhu treba duljina njegove izvodnice. Duljina polumjera osnovke stošca jednaka je duljini polumjera osnovke valjka i iznosi 4 cm. Duljina visine stošca jednaka je razlici duljina veće i manje osnovice trapeza i iznosi 7 – 5 = 2 cm. Primijenimo Pitagorin poučak, pa dobijemo:

$$s = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5} \ .$$

Stoga je površina plašta stošca jednaka

$$P_2 = 4 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 8 \cdot \sqrt{5} \cdot \pi \text{ cm}^2 \ .$$

Dakle, traženo oplošje iznosi:

$$O = B + P_1 + P_2 = 16 \cdot \pi + 40 \cdot \pi + 8 \cdot \sqrt{5} \cdot \pi = 56 \cdot \pi + 8 \cdot \sqrt{5} \cdot \pi \text{ cm}^2 \ .$$

30. $\frac{106}{7} \approx 15.143$ **km.** Neka su redom t, v_A i v_V vrijeme proteklo od početka gibanja obaju prijevoznih sredstava do trenutka u kojemu će navedena udaljenost biti najmanja, brzina automobila i brzina vlaka. Označimo s D položaj vlaka, a s E položaj automobila u trenutku t. Odredimo najprije duljine dužina $\overline{BD}$ i $\overline{BE}$.

Za vrijeme t vlak je prešao $v_v \cdot t$ km. Dakle, $\left|\overline{AD}\right| = v_V \cdot t$, pa je $\left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{AB}\right| - \left|\overline{AD}\right| = 53 - v_v \cdot t$ km.

Za vrijeme t automobil je prešao ukupno $v_A \cdot t$ km. Dakle, $\left|\overline{BE}\right| = v_A \cdot t$ km.

Prema pretpostavci, automobil je dvostruko brži od vlaka, što znači da vrijedi jednakost $v_A = 2 \cdot v_v$. Uvrštavanjem te jednakosti u jednakost $\left|\overline{BE}\right| = v_A \cdot t$ dobijemo $\left|\overline{BE}\right| = 2 \cdot v_V \cdot t$.

Označimo $x = v_v \cdot t$. Promotrimo trokut BDE. Duljine dvaju njegovih stranica su $\left|\overline{BD}\right| = 53 - v_v \cdot t = 53 - x$ i $\left|\overline{BE}\right| = 2 \cdot v_V \cdot t = 2 \cdot x$. Duljina treće stranice je upravo zračna udaljenost d između automobila i vlaka. Prema kosinusovu poučku, kvadrat te udaljenosti jednak je:

$$d^2 = \left|\overline{DE}\right|^2 = \left|\overline{BD}\right|^2 + \left|\overline{BE}\right|^2 - 2 \cdot \left|\overline{BD}\right| \cdot \left|\overline{BE}\right| \cdot \cos\left(\angle DBE\right) =$$
$$= (53 - x)^2 + (2 \cdot x)^2 - 2 \cdot (53 - x) \cdot (2 \cdot x) \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= 53^2 - 2\cdot 53\cdot x + x^2 + 4\cdot x^2 - 2\cdot(53-x)\cdot 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} =$$
$$= 2809 - 106\cdot x + x^2 + 4\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot(53-x) =$$
$$= 2809 - 106\cdot x + x^2 + 4\cdot x^2 - 106\cdot x + 2\cdot x^2 =$$
$$= 7\cdot x^2 - 212\cdot x + 2809.$$

Ta udaljenost će biti najkraća za onu vrijednost nepoznanice x za koju kvadratna funkcija $f(x) = 7\cdot x^2 - 212\cdot x + 2809$ postiže svoju najmanju vrijednost (tada će i d postići najmanju vrijednost). Budući da je f kvadratna funkcija čiji je vodeći koeficijent (to je 7) strogo veći od nule, ona postiže najmanju vrijednost za:

$$x = \frac{212}{2\cdot 7} = \frac{212}{14} = \frac{106}{7}$$

(prva koordinata tjemena pripadne parabole). Iz interpretacije varijable x slijedi da je x upravo duljina puta kojega je prešao vlak do trenutka kad je zračna udaljenost između njega i automobila bila najmanja. Dakle, tražena udaljenost iznosi:

$$x = \frac{106}{7} \approx 15.142857 \approx 15.143 \text{ km}.$$

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač