1. **C**. Vrijedi jednakost: $-\frac{3}{4}=-0.75$, pa zaključujemo da vrijedi nejednakost $-1<\left(-\frac{3}{4}\right)<-0.5$.

To znači da zadani broj pripada intervalu $\langle -1,-0.5\rangle$.

2. **D**. Riješimo zadanu jednadžbu na uobičajen način:

$$2\cdot x^2-7\cdot x+3=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{7\pm 5}{4}.$$

Traženo veće rješenje dobivamo odabirom znaka + i ono iznosi:

$$x_1=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3.$$

3. **A**. Neka je $T=(x_T,y_T)$ tražena točka. Iz zadanih podataka slijedi da moraju vrijediti jednakosti:

$$\begin{cases} x_T-1=-5, \\ y_T-2=10. \end{cases}$$

Iz tih jednakosti odmah slijedi $(x_T,y_T)=(-4,12)$. Dakle, tražena točka je $T=(-4,12)$.

4. **B**. Geometrijski red ima konačan zbroj ako i samo ako za njegov količnik q vrijedi nejednakost $|q|<1$. Količnik prvoga reda jednak je $q_1=\frac{-3}{1}=-3$. Količnik drugoga reda jednak je $q_2=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$. Količnik trećega reda jednak je $q_3=\frac{2}{1}=2$. Količnik četvrtoga reda jednak je $q_4=\frac{\frac{3}{2}}{1}=\frac{3}{2}$. Apsolutne vrijednosti izračunanih količnika su redom 3, $\frac{1}{2}$, 2 i $\frac{3}{2}$. Vidimo da za količnik q_2 vrijedi nejednakost $|q_2|=\frac{1}{2}<1$, pa pripadni geometrijski red ima konačan zbroj.

5. **D**. Neka je h tražena visina (iskazana u cm). Prosječna visina svih 5 + 3 + 10 + 2 = 20 učenika jednaka je aritmetičkoj sredini zadanih 20 podataka:

$$\overline{h}=\frac{5\cdot 172+3\cdot 176+10\cdot 178+2\cdot h}{5+3+10+2}=\frac{860+528+1780+2\cdot h}{20}=\frac{3168+2\cdot h}{20}=\frac{1584+h}{10}.$$

Vrijednost ovoga razlomka mora biti jednaka 177 cm, pa dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1584+h}{10}=177.$$

Riješimo ovu jednadžbu na uobičajen način:

$$\frac{1584+h}{10}=177, \quad /\cdot 10$$
$$1584+h=1770,$$
$$h=1770-1584=186.$$

6. **A.** Koristeći definiciju funkcije apsolutne vrijednosti imamo redom:

$$\left||x-2|-4\right|=4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|-4=4 \text{ ili} \\ |x-2|-4=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|=8 \text{ ili} \\ |x-2|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=8 \text{ ili} \\ x-2=-8 \text{ ili} \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{-6,2,10\}.$$

Zaključujemo da je traženi zbroj jednak (–6) + 2 + 10 = 6.

7. **C**. Površina zadanoga pravokutnika jednaka je $P=12.8\cdot 5=64\cdot\pi \text{ cm}^2$. Iz pretpostavke da je osjenčana površina jednaka površini polukruga zaključujemo da je površina polukruga jednaka polovici površine pravokutnika. Označimo li traženi polumjer (izražen u cm) sa *r*, dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi=\frac{1}{2}\cdot 64.$$

Dijeljenjem s $\frac{1}{2}\cdot\pi$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $r^2=\frac{64}{\pi}$ čije je jedino strogo pozitivno realno rješenje $r=\sqrt{\frac{64}{\pi}}=\frac{8}{\sqrt{\pi}}\approx 4.51351666838205\approx 4.51.$

8. **B.** Označimo duljine stranica trokuta redom s *a*, *b* i *c*. Iz podatka da je *a* : *b* : *c* = 4 : 5 : 6 zaključujemo da postoji $k>0$ takav da vrijede jednakosti $a=4\cdot k$, $b=5\cdot k$ i $c=6\cdot k$. Najveći kut trokuta nalazi se nasuprot najdulje stranice trokuta, a u ovom je slučaju riječ o stranici *c*. Označimo li traženu mjeru s γ, onda primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}=\frac{(4\cdot k)^2+(5\cdot k)^2-(6\cdot k)^2}{2\cdot(4\cdot k)\cdot(5\cdot k)}=\frac{16\cdot k^2+25\cdot k^2-36\cdot k^2}{40\cdot k^2}=\frac{5\cdot k^2}{40\cdot k^2}=\frac{1}{8}.$$

U intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ ova trigonometrijska jednadžba ima jedinstveno rješenje:

$$\gamma=\arccos\left(\frac{1}{8}\right)=1.4454684956 \text{ radijana}=82.8192442^\circ=82^\circ 49' 9''.$$

9. **C**. Bez sniženja bismo oba proizvoda platili ukupno 85 + 199 = 284 kn. Nakon sniženja od 10% cijena majice iznosi:

$$85-\frac{10}{100}\cdot 85=85-\frac{1}{10}\cdot 85=85-8.5=76.5 \text{ kn}.$$

Nakon sniženja od 25% cijena hlača iznosi:

$$199-\frac{25}{100}\cdot 199=199-\frac{1}{4}\cdot 199=199-49.75=149.25 \text{ kn}.$$

Odatle zaključujemo da ćemo nakon obaju sniženja te proizvode platiti ukupno 76.5 + + 149.25 = 225.75 kn, odnosno za 284 – 225.75 = 58.25 kn manje nego prije sniženja. Iskazana u postocima ušteda iznosi:

$$p=\frac{58.25}{284}\cdot 100=\frac{5825}{284}\approx 20.51056338\approx 20.51\%.$$

10. D. Iz prve rečenice zadatka zaključujemo da postoji $k\in\mathbb{N}$ takav da je $n=8\cdot k+3$. Pomnožimo li ovu jednakost s 5, dobit ćemo $5\cdot n=40\cdot k+15$. Podijelimo $40\cdot k+15$ bombona na osmero djece tako da svako dijete dobije jednak broj bombona:

$$\frac{40\cdot k+15}{8}=\frac{40\cdot k+8+7}{8}=\frac{40\cdot k}{8}+\frac{8}{8}+\frac{7}{8}=5\cdot k+1+\frac{7}{8}.$$

Odatle zaključujemo da bi svako dijete dobilo $5\cdot k+1$ bombona i da bi 7 bombona ostalo nepodijeljeno. Dakle, traženi je broj jednak 7.

11. C. Riješimo zadanu jednadžbu po nepoznanici z. Imamo redom:

$$3\cdot z-4\cdot i\cdot z=11-27\cdot i-5-6\cdot i,$$
$$z\cdot(3-4\cdot i)=6-33\cdot i,$$
$$z=\frac{6-33\cdot i}{3-4\cdot i}=\frac{6-33\cdot i}{3-4\cdot i}\cdot\frac{3+4\cdot i}{3+4\cdot i}=\frac{18-99\cdot i+24\cdot i-132\cdot i^2}{3^2-(4\cdot i)^2}=\frac{18-99\cdot i+24\cdot i+132}{9-16\cdot i^2}=$$
$$=\frac{150-75\cdot i}{9+16}=\frac{25\cdot(6-3\cdot i)}{25}=6-3\cdot i.$$

Sada lako slijedi $\mathrm{Im}(z)=-3$.

12. B. Neka su $S=(p,q)$ i r redom središte, odnosno polumjer kružnice iz zadatka. Iz podatka da kružnica dodiruje os apscisa u točki (3, 0) zaključujemo da vrijede jednakosti $p=3$ i $q=r$. To znači da jednadžba kružnice ima oblik $(x-3)^2+(y-r)^2=r^2$. Uvrstimo li u ovu jednakost $x=0$ i $y=10$, dobit ćemo:

$$(0-3)^2+(10-r)^2=r^2,$$
$$(-3)^2+10^2-2\cdot 10\cdot r+r^2=r^2,$$
$$9+100-20\cdot r=0,$$
$$20\cdot r=109,\quad /:20$$
$$r=\frac{109}{20}=5.45.$$

13. B. Koristeći definiciju kompozicije funkcija imamo redom:

$$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(2\cdot 3-1)=g(6-1)=g(5)=5^2+5=25+5=30.$$

14. A. Baze logaritamskih funkcija navedene pod **C** i **D** su strogo veće od 1, pa su te funkcije rastuće. Za preostale dvije funkcije dokažimo najprije sljedeće tvrdnje.

Tvrdnja 1. Kompozicija dviju padajućih funkcija je rastuća funkcija.

Dokaz: Neka su *f* i *g* padajuće funkcije, te neka su $x_1, x_2 \in D(g \circ f)$ takvi da je $x_1 \le x_2$. Budući da je *f* padajuća funkcija, nejednakost $x_1 \le x_2$ povlači nejednakost $f(x_1) \ge f(x_2)$, odnosno nejednakost $f(x_2) \le f(x_1)$.
Budući da je *g* padajuća funkcija, nejednakost $f(x_2) \le f(x_1)$ povlači nejednakost $g(f(x_2)) \ge g(f(x_1))$, odnosno nejednakost $(g \circ f)(x_2) \ge (g \circ f)(x_1)$, odnosno nejednakost $(g \circ f)(x_1) \le (g \circ f)(x_2)$.
Tako smo dobili da iz pretpostavke $x_1 \le x_2$ slijedi $(g \circ f)(x_1) \le (g \circ f)(x_2)$, pa je $g \circ f$ rastuća funkcija, što je i trebalo pokazati. ■

Tvrdnja 2. Kompozicija padajuće i rastuće funkcije je padajuća funkcija.

Dokaz: Neka su *f* rastuća funkcija, *g* padajuća funkcija i $x_1, x_2 \in D(g \circ f)$ takvi da je $x_1 \le x_2$.
Budući da je *f* rastuća funkcija, nejednakost $x_1 \le x_2$ povlači nejednakost $f(x_1) \le f(x_2)$.
Budući da je *g* padajuća funkcija, nejednakost $f(x_1) \le f(x_2)$ povlači nejednakost $g(f(x_1)) \ge g(f(x_2))$, odnosno nejednakost $(g \circ f)(x_1) \ge (g \circ f)(x_2)$.
Tako smo dobili da iz pretpostavke $x_1 \le x_2$ slijedi $(g \circ f)(x_1) \ge (g \circ f)(x_2)$, pa je $g \circ f$ padajuća funkcija, što je i trebalo pokazati. ■

Nastavimo s rješavanjem zadatka. Funkcija $f_1(x) = \log_{0.5} x$ je padajuća funkcija (jer joj je baza strogo manja od 1). Funkcija $f_2(x) = -x$ je padajuća funkcija (jer joj je koeficijent uz *x* strogo negativan). Prema Tvrdnji 1., funkcija $f_3(x) = (f_2 \circ f_1)(x) = -\log_{0.5} x$ je rastuća funkcija.
Funkcija $f_4(x) = \log_2 x$ je rastuća funkcija (jer joj je baza strogo veća od 1). Prema Tvrdnji 2., funkcija $f_5(x) = (f_2 \circ f_4)(x) = -\log_2 x$ je padajuća funkcija.

15. B. Graf funkcije *f* ima oblik ∪, što znači da je vodeći koeficijent *a* strogo pozitivan, tj. $a > 0$. Iz slike se vidi da taj graf siječe os ordinata u točki koja se nalazi na negativnom dijelu te osi. Koordinate te točke su (0, *c*), pa zaključujemo da je koeficijent *c* strogo negativan, tj. $c < 0$. Nadalje, tjeme grafa funkcije *f* se nalazi u četvrtom kvadrantu, što znači da je prva koordinata toga tjemena strogo pozitivan realan broj. Ta koordinata je jednaka $-\frac{b}{2 \cdot a}$. Zbog $a > 0$, nejednakost $-\frac{b}{2 \cdot a} > 0$ je ekvivalentna s nejednakosti $-b > 0$, odnosno s nejednakosti $b < 0$.

Dakle, broj *a* je strogo pozitivan, a brojevi *b* i *c* su strogo negativni. Odatle slijedi da su brojevi $a \cdot c$, $c - a$ i $b - a$ strogo negativni (umnožak pozitivnoga i negativnoga broja, te razlika negativnoga i pozitivnoga broja je negativan broj), a broj $b \cdot c$ strogo pozitivan (kao umnožak dvaju negativnih brojeva).

16. 1.) 12. Ukupan broj jabuka jednak je $\frac{5}{8}\cdot 48=30$. To znači da u košari ima 48 – 30 = 18 krušaka i limuna. Ukupan broj krušaka u košari jednak je $\frac{1}{3}\cdot 18=6$, pa je ukupan broj limuna u košari jednak 18 – 6 = 12.

2.) 93837.9. Površina od 15 katastarskih jutara jednaka je površini od $15\cdot 5774.64=86619.6\ \text{m}^2$. Nadalje, ako površina od 1600 četvornih hvati odgovara površini od 5774.64 m^2, onda površina od 2000 četvornih hvati odgovara površini od $\frac{2000}{1600}\cdot 5774.64=7218.3\ \text{m}^2$. Dakle, ukupna površina iznosi 86619.6 + 7218.3 = 93837.9 m^2.

17. 1.) 86. Iz zadanih podataka zaključujemo da je dvostruka vrijednost traženoga broja jednaka 172. Dakle, traženi broj jednak je 172 : 2 = 86.

2.) 2; $-\frac{1}{4}$. Uvrstimo li drugu jednadžbu sustava u prvu jednadžbu, dobit ćemo:

$$\begin{aligned}&3\cdot x+x-3-5=0,\\&4\cdot x=8,\quad /:4\\&x=2.\end{aligned}$$

Uvrstimo li ovu vrijednost u drugu jednadžbu sustava, dobit ćemo:

$$\begin{aligned}&2-3=4\cdot y,\\&4\cdot y=-1,\quad /:4\\&y=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Dakle, rješenje sustava je $(x,y)=\left(2,-\frac{1}{4}\right)$.

18. 1.) 108°**.** Mjera kuta suplementarnoga kutu čija je mjera 150° jednaka je $180^\circ-150^\circ=30^\circ$. Mjera trećega kuta trokuta kojemu mjere dvaju kutova iznose 42° i 30° jednaka je $180^\circ-(42^\circ+30^\circ)=180^\circ-72^\circ=108^\circ$. Taj kut trokuta i kut α su vršni kutovi, pa oni imaju jednake mjere. Tako zaključujemo da mjera kuta α iznosi 108°.

2.) 576. Površina osnovke zadane piramide jednaka je $B=a^2=12^2=144\ \text{cm}^2$. Tako slijedi da je traženi obujam jednak:

$$V=\frac{1}{3}\cdot B\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 144\cdot 12=576\ \text{cm}^3.$$

19. 1.) $x\le -\frac{1}{5}$ **ili** $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right]$. Pomnožimo zadanu nejednadžbu s 2. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&6-(x-1)\ge 2\cdot(2\cdot x+4),\\&6-x+1\ge 4\cdot x+8,\end{aligned}$$

$$-x-4\cdot x\geq 8-6-1,$$
$$-5\cdot x\geq 1,\quad /:(-5)$$
$$x\leq -\frac{1}{5}.$$

Dakle, skup svih rješenja zadane nejednadžbe je interval $\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right]$.

2.) $x\in\langle 0,2\rangle$. Primijetimo najprije da je izraz $\log_4 x$ definiran ako i samo ako je $x>0$. Uz tu je pretpostavku funkcija $f(x)=\log_4 x$ rastuća, pa koristeći definiciju logaritma imamo redom:

$$x<4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^{2\cdot\frac{1}{2}}=2^1=2.$$

Dakle, skup svih rješenja zadane jednadžbe tvore strogo pozitivni realni brojevi koji su strogo manji od 2. Oni tvore interval $\langle 0,2\rangle$.

20. 1.) 3. Koristeći svojstva komutativnosti zbrajanja i množenja realnih brojeva, te formulu za kub binoma imamo redom:

$$(ab+c)\cdot(c+ab)\cdot(ba+c)=(ab+c)\cdot(ab+c)\cdot(ab+c)=(ab+c)^3=$$
$$(ab)^3+3\cdot(ab)^2\cdot c+3\cdot(ab)\cdot c+c^3=a^3\cdot b^3+3\cdot a^2\cdot b^2\cdot c+3\cdot a\cdot b\cdot c^2+c^3.$$

Odatle lako slijedi da je traženi koeficijent jednak 3.

2.) $2\cdot b$. Primjenom formule za razliku kvadrata dobivamo:

$$\left(\frac{1}{3\cdot a-b}-\frac{1}{3\cdot a+b}\right)\cdot\left(9\cdot a^2-b^2\right)=\frac{3\cdot a+b-(3\cdot a-b)}{(3\cdot a-b)\cdot(3\cdot a+b)}\cdot\left(9\cdot a^2-b^2\right)=$$
$$=\frac{3\cdot a+b-3\cdot a+b}{(3\cdot a)^2-b^2}\cdot\left(9\cdot a^2-b^2\right)=\frac{2\cdot b}{9\cdot a^2-b^2}\cdot\left(9\cdot a^2-b^2\right)=2\cdot b.$$

21. 1.) $\frac{3}{2}\cdot(\cos 210^\circ+i\cdot\sin 210^\circ)=-\frac{3}{4}\cdot\sqrt{3}-\frac{3}{4}\cdot i.$ Iz zadane slike slijedi da je modul traženoga broja r = 1.5, dok je glavni argument traženoga broja jednak $\varphi=270^\circ-60^\circ=210^\circ$. Zbog toga je:

$$z=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)=1.5\cdot(\cos 210^\circ+i\cdot\sin 210^\circ)=1.5\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot i\right)=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot i\right)=$$
$$=-\frac{3}{4}\cdot\sqrt{3}-\frac{3}{4}\cdot i.$$

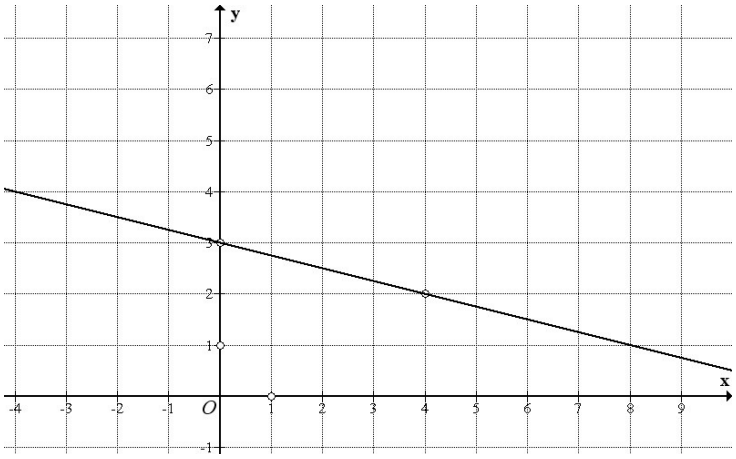
2.) 7. Faktori 1!, 2!, 3! i 4! ne sadrže nijednu nulu jer u pripadnim umnošcima nema nijednoga djelitelja broja 5. Faktori 5!, 6!, 7!, 8! i 9! sadrže po jednu nulu koju „generiraju“ faktori 2 i 5 u svakom od njih. Faktor 10! sadrži dvije nule: prvu „generiraju“ faktori 2 i 5, a drugu „generira“ faktor 10. Dakle, traženi je broj jednak $5\cdot 1+1+1=7$.

22. 1.) $\frac{1}{10}=0.1;\ \sqrt{10}.$ Računamo redom:

$$f(-3)=10^{\frac{-3}{3}}=10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1,$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=10^{\frac{\frac{3}{2}}{3}}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}.$$

2.) Vidjeti Sliku 1. Iz podatka $f(0)=3$ zaključujemo da traženi graf prolazi točkom (0, 3). Iz druge rečenice zadatka proizlazi da je $f(0+4)=f(0)-1$, odnosno $f(4)=3-1$, odnosno $f(4)=2.$ Dakle, graf prolazi i točkom (4, 2). Zbog toga u zadani pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtamo točke (0, 3) i (4, 2), pa ih spojimo pravcem. Dobiveni pravac je traženi graf (vidjeti sliku 1.).



Slika 1.

23. 1.) $6\cdot x^2+6\cdot x-2$. Koristimo osnovna pravila za deriviranje funkcija, te podatke o derivaciji potencije $x^a,\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, i derivaciji konstante iz tablice derivacija elementarnih funkcija. Imamo redom:

$$f'(x)=(2\cdot x+3)'\cdot\left(x^2-1\right)+(2\cdot x+3)\cdot\left(x^2-1\right)'=\left((2\cdot x)'+3'\right)\cdot\left(x^2-1\right)+(2\cdot x+3)\cdot\left((x^2)'-1'\right)=$$
$$=\left(2\cdot(x)'+0\right)\cdot\left(x^2-1\right)+(2\cdot x+3)\cdot\left(2\cdot x^{2-1}-0\right)=\left(2\cdot 1+0\right)\cdot\left(x^2-1\right)+(2\cdot x+3)\cdot\left(2\cdot x\right)=$$
$$=2\cdot\left(x^2-1\right)+4\cdot x^2+6\cdot x=2\cdot x^2-2+4\cdot x^2+6\cdot x=6\cdot x^2+6\cdot x-2.$$

2.) $-\frac{2}{5}=-0.4$ **.** Traženi koeficijent je jednak vrijednosti prve derivacije funkcije *f* u točki $x=5$, tj. $k=f'(5).$ Koristeći osnovna pravila za deriviranje funkcija, imamo redom:

$$f(x)=\frac{10}{x}=10\cdot x^{-1}\Rightarrow f'(x)=\left(10\cdot x^{-1}\right)'=10\cdot\left(x^{-1}\right)'=10\cdot(-1)\cdot x^{-1-1}=-10\cdot x^{-2}\Rightarrow$$
$$k=f'(5)=-10\cdot 5^{-2}=-10\cdot\frac{1}{5^2}=-\frac{10}{25}=-\frac{2}{5}=-0.4.$$

24. 1.) ≈ 12.07. Treba izračunati duljinu stranice $\overline{AB}$ (ili duljinu stranice $\overline{CD}$, svejedno). Promotrimo trokut *ABD*. Mjera kuta kod vrha *B* toga trokuta jednaka je mjeri kuta kod vrha *D* u trokutu *BCD* jer je riječ o sukladnim kutovima uz priječnicu (transverzalu). Iz slike se vidi da je mjera kuta kod vrha *D* u trokutu *BCD* jednaka 29°, pa zaključujemo da je mjera kod vrha *B* trokuta *ABD* jednaka 29°. Mjera kuta *A* u trokutu *ABD* jednaka je:

$$\angle BAD = 180^\circ - (73^\circ + 29^\circ) = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ.$$

Preostaje primijeniti sinusov poučak i izračunati traženu duljinu (iskazanu u cm):

$$\frac{\left|\overline{AB}\right|}{\sin\angle BDA} = \frac{\left|\overline{BD}\right|}{\sin\angle BAD} \Rightarrow \left|\overline{AB}\right| = \frac{\left|\overline{BD}\right|}{\sin\angle BAD}\cdot\sin\angle BDA = \frac{12.35}{\sin 78^\circ}\cdot\sin 73^\circ \approx 12.0742142875813.$$

2.) $\frac{15}{4} = 3.75$. Dokažimo najprije sljedeću tvrdnju.

Tvrdnja 3. Neka je zadan trokut *ABC* kao na slici u zadatku 24.2. Povucimo pravac *p* paralelan sa stranicom $\overline{AB}$ toga trokuta i neka taj pravac dijeli visinu povučenu iz vrha *C* na stranicu $\overline{AB}$ u omjeru $m:n$ računajući od vrha *C*, pri čemu su $m,n>0$. Tada je omjer površina likova na koje pravac *p* dijeli trokut *ABC* jednak $m^2:\left(2\cdot m\cdot n+n^2\right)$, pri čemu prvi član omjera odgovara površini lika kojemu je jedan vrh *C*.

Dokaz: Koristimo oznake sa slike u zadatku 24.2. Neka su *N* nožište visine povučene iz vrha *C* i *M* točka u kojoj pravac *p* siječe dužinu $\overline{CN}$. Pravac *p* dijeli trokut *ABC* na dva dijela. Prvi dio je trokut *CDE*, a drugi trapez *ABDE*. Površina trokuta *ABC* jednaka je zbroju površine trokuta *CDE* i površine trapeza *ABDE*. S jedne je strane

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CN}\right|,$$

a s druge

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta CDE} + P_{ABDE} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{DE}\right|\cdot\left|\overline{CM}\right| + \frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{DE}\right|\right)\cdot\left|\overline{MN}\right|.$$

Iz pretpostavke da pravac *p* dijeli dužinu $\overline{CN}$ u omjeru $m:n$ računajući od vrha *C* slijedi da vrijedi jednakost $\left|\overline{CM}\right|:\left|\overline{MN}\right| = m:n$. To znači da postoji $k>0$ takav da su:

$$\left|\overline{CM}\right| = k\cdot m \text{ i } \left|\overline{MN}\right| = k\cdot n.$$

Tada je duljina visine $\overline{CN}$ jednaka:

$$\left|\overline{CN}\right| = \left|\overline{CM}\right| + \left|\overline{MN}\right| = k\cdot m + k\cdot n = k\cdot(m+n).$$

Uvrstimo ove izraze u ranije napisane izraze za površinu trokuta *ABC* i izjednačimo te izraze (jer je riječ o izrazima za istu veličinu). Dobivamo:

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CN}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{DE}\right|\cdot\left|\overline{CM}\right|+\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{DE}\right|\right)\cdot\left|\overline{MN}\right|,$$

$$\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CN}\right|=\left|\overline{DE}\right|\cdot\left|\overline{CM}\right|+\left(\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{DE}\right|\right)\cdot\left|\overline{MN}\right|,$$

$$\left|\overline{AB}\right|\cdot k\cdot(m+n)=\left|\overline{DE}\right|\cdot k\cdot m+\left(\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{DE}\right|\right)\cdot k\cdot n,\quad /:k$$

$$\left|\overline{AB}\right|\cdot(m+n)=\left|\overline{DE}\right|\cdot m+\left(\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{DE}\right|\right)\cdot n,$$

$$\left|\overline{AB}\right|\cdot m+\left|\overline{AB}\right|\cdot n=\left|\overline{DE}\right|\cdot m+\left|\overline{AB}\right|\cdot n+\left|\overline{DE}\right|\cdot n,$$

$$\left|\overline{AB}\right|\cdot m=\left|\overline{DE}\right|\cdot(m+n),$$

$$\left|\overline{DE}\right|=\frac{m}{m+n}\cdot\left|\overline{AB}\right|.$$

Površina trokuta *CDE* jednaka je:

$$P_{\Delta CDE}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{DE}\right|\cdot\left|\overline{CM}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{m+n}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot k\cdot m=\frac{m^2}{m+n}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot k\right).$$

Površina trapeza *ABDE* jednaka je:

$$P_{ABDE}=\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{DE}\right|\right)\cdot\left|\overline{MN}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overline{AB}\right|+\frac{m}{m+n}\cdot\left|\overline{AB}\right|\right)\cdot k\cdot n=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\left(1+\frac{m}{m+n}\right)\cdot k\cdot n=$$

$$=\frac{m+n+m}{m+n}\cdot n\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot k\right)=\frac{2\cdot m+n}{m+n}\cdot n\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot k\right)=\frac{2\cdot m\cdot n+n^2}{m+n}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot k\right).$$

Zbog toga je traženi omjer površina jednak:

$$P_{\Delta CDE}:P_{ABDE}=\left(\frac{m^2}{m+n}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot k\right)\right):\left(\frac{2\cdot m\cdot n+n^2}{m+n}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot k\right)\right)=m^2:\left(2\cdot m\cdot n+n^2\right),$$

što je i trebalo pokazati. ■

Posljedica 1. Uz oznake kao u Tvrdnji 3. i dokazu te tvrdnje vrijede jednakosti:

$$P_{\Delta CDE}=\left(\frac{m}{m+n}\right)^2\cdot P_{\Delta ABC},$$

$$P_{ABDE}=\frac{2\cdot m\cdot n+n^2}{(m+n)^2}\cdot P_{\Delta ABC}.$$

Dokaz: Iz rezultata Tvrdnje 1. slijedi da postoji $k_1>0$ takav da vrijede jednakosti $P_{\Delta CDE}=k_1\cdot m^2$ i $P_{ABDE}=k_1\cdot\left(2\cdot m\cdot n+n^2\right)$. Uvrstimo ove jednakosti u jednakost $P_{\Delta ABC}=P_{\Delta CDE}+P_{ABDE}$, pa dobivamo:

$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta CDE}+P_{ABDE}=P_{\Delta CDE}=k_1\cdot m^2+k_1\cdot\left(2\cdot m\cdot n+n^2\right)=k_1\cdot\left(m^2+2\cdot m\cdot n+n^2\right)=k_1\cdot(m+n)^2,$$

a odavde je:

$$k_1 = \frac{1}{(m+n)^2} \cdot P_{\Delta ABC}.$$

Uvrštavanjem ovoga izraza u jednakosti $P_{\Delta CDE} = k_1 \cdot m^2$ i $P_{ABDE} = k_1 \cdot \left(2 \cdot m \cdot n + n^2\right)$ dobivamo željene jednakosti. ■

Primijenimo Tvrdnju 3. i Posljedicu 1. na naš zadatak. Prema pretpostavci, pravac p prolazi polovištem visine povučene iz vrha C, što znači da on dijeli tu visinu na dva jednako duga dijela, tj. u omjeru 1:1. Dakle, $m = n = 1$, pa primjenom druge jednakosti iz Posljedice 1. odmah slijedi:

$$P_{ABDE} = \frac{2 \cdot m \cdot n + n^2}{(m+n)^2} \cdot P_{\Delta ABC} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2}{(1+1)^2} \cdot 5 = \frac{2+1}{2^2} \cdot 5 = \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ cm}^2.$$

25. 1.) 36. Odmah imamo: $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36.$

2.) $\frac{9}{k+1}$**, uz uvjet** $k \neq -1$**.** Iz druge jednadžbe sustava je $\frac{x}{y} = k$, a odavde je $x = k \cdot y$. Uvrštavanjem ovoga izraza u prvu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\begin{aligned} &\sqrt{k \cdot y + y} = 3, \quad /^2 \\ &k \cdot y + y = 9, \\ &y \cdot (k+1) = 9, \quad /:(k+1) \\ &y = \frac{9}{k+1}. \end{aligned}$$

Posljednje dijeljenje smo smjeli provesti uz dodatnu pretpostavku $k \neq -1$. Ako bi bilo $k = -1$, onda bi slijedilo $x = k \cdot y = (-1) \cdot y = -y$ i $\sqrt{x+y} = \sqrt{-y+y} = \sqrt{0} = 0 \neq 3$, pa u tom slučaju zadani sustav nema rješenja.

3.) $-\frac{31}{2}$ i 0**.** Podsjetimo da je umnožak dvaju brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Također, potencija (s prirodnim eksponentom) nekoga broja jednaka je nuli ako i samo ako je baza te potencije jednaka nuli. Primjenom tih tvrdnji na umnožak iz zadatka dobivamo da mora vrijediti $2 \cdot x + 3 = 0$ ili $5 \cdot x - 8 = 0$. Odatle slijedi $x = -\frac{3}{2}$ ili $x = \frac{8}{5}$.

Za $x = -\frac{3}{2}$ vrijednost izraza $5 \cdot x - 8$ jednaka je $5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 8 = -\frac{15}{2} - 8 = \frac{-15-16}{2} = -\frac{31}{2}$.

Za $x = \frac{8}{5}$ vrijednost izraza $5 \cdot x - 8$ jednaka je 0.

Dakle, izraz $5 \cdot x - 8$ može poprimiti vrijednosti iz skupa $\left\{-\frac{31}{2}, 0\right\}$.

26. 1.) $E=\left(-\frac{1}{4},\ 2\right)$. Zadatak je najlakše i najbrže riješiti koristeći vektore. Najprije odredimo $\overrightarrow{AB}=(-2-5)\cdot\vec{i}+(3-(-1))\cdot\vec{j}=-7\cdot i+4\cdot\vec{j}$. Računajući od točke A, točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $1:3$, točka D u omjeru $2:2=1:1$ (tj. točka D je polovište dužine $\overline{AB}$), a točka E u omjeru $3:1$. Odatle zaključujemo da je:

$$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{3+1}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\cdot\left(-7\cdot i+4\cdot\vec{j}\right)=-\frac{21}{4}\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}.$$

Pretpostavimo li da je $E=(x_E,y_E)$, iz dobivene jednakosti slijedi:

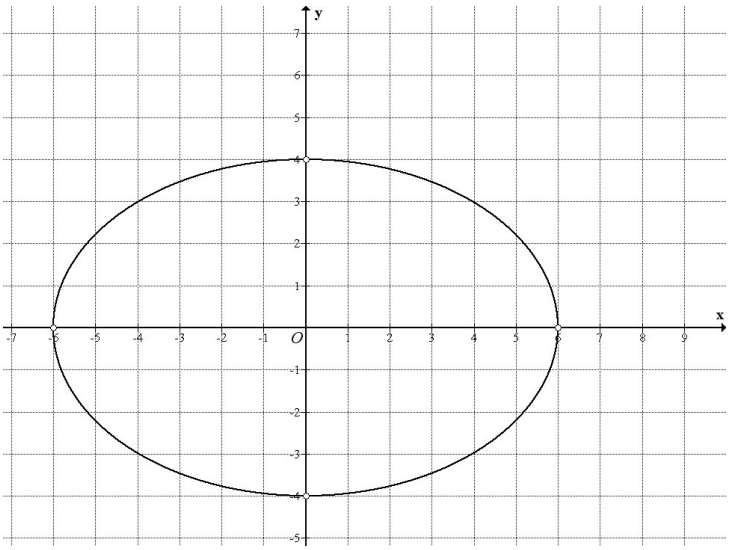
$$\begin{cases} x_E-5=-\frac{21}{4}, \\ y_E-(-1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E=-\frac{21}{4}+5=\frac{-21+20}{4}=-\frac{1}{4}, \\ y_E=3-1=2. \end{cases}$$

Dakle, $E=\left(-\frac{1}{4},\ 2\right)$.

2.) Vidjeti Sliku 2. Podijelimo jednadžbu zadane krivulje sa 144, pa dobivamo:

$$\frac{4\cdot x^2}{144}+\frac{9\cdot y^2}{144}=1,$$
$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1,$$
$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

Vidimo da je riječ o elipsi kojoj su duljina velike poluosi $a=6$ i duljina male poluosi $b=4$. Ona prolazi točkama (6, 0), (0, 4), (–6, 0) i (0, –4). Ucrtamo te točke u pravokutni koordinatni sustav, pa ih spojimo elipsom. Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

3.) $\frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11}{5} \cdot \sqrt{5}.$. Iz jednadžbe parabole $y^2 = 12 \cdot x$ usporedbom s izrazom $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ zaključujemo da vrijedi jednakost $2 \cdot p = 12$ iz koje je $p = 6$. Žarište parabole je točka $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{6}{2}, 0\right) = (3,0)$. Njezina udaljenost od pravca $y = 2 \cdot x + 5$, odnosno pravca $2 \cdot x - y + 5 = 0$ iznosi:

$$d = \frac{2 \cdot 3 - 0 + 5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6+5}{\sqrt{4+1}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{11}{5} \cdot \sqrt{5}.$$

27. 1.) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Zadana racionalna funkcija je definirana kad god je njezin nazivnik različit od nule. Iz $x - 2 = 0$ slijedi $x = 2$, pa zaključujemo da je zadana racionalna funkcija definirana kad god je $x \neq 2$. Skup svih realnih brojeva različitih od 2 je $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2.) $\frac{\pi}{3}$**.** Temeljni period funkcije $f_1(x) = \cos(a \cdot x)$, gdje je $a > 0$, dan je izrazom $T = \frac{2 \cdot \pi}{a}$. Naime, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi identitet $\cos(a \cdot x) = \sin\left(a \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$, a znamo da je temeljni period harmonijske funkcije $f_2(x) = \sin(a \cdot x + b)$ jednak $T = \frac{2 \cdot \pi}{a}$. U ovom slučaju je $a = 6$, pa je traženi temeljni period jednak $T = \frac{2 \cdot \pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

3.) $[-2, 2]$. Znamo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $-1 \leq \sin x \leq 1$. Pomnožimo li je s (–2), dobit ćemo nejednakost $2 \geq -2 \cdot \sin x \geq -2$, odnosno - zapisano pomoću znaka ≤ - nejednakost $-2 \leq -2 \cdot \sin x \leq 2$. To znači da vrijedi nejednakost $-2 \leq g(x) \leq 2$, pa je traženi skup segment $[-2, 2]$.

28. –4; 6. Iz slike se vidi da je točka (–1, –3) točka globalnoga minimuma funkcije *f* na njezinoj domeni.

Graf funkcije $f_1(x) = f(x+3)$ dobijemo tako da svaku točku zadanoga grafa pomaknemo za 3 jedinice duljine ulijevo usporedno s osi apscisa. Time se mijenja samo apscisa svake točke grafa funkcije *f*, dok ordinata te točke ostaje nepromijenjena. Pomicanjem točke (–1, –3) za 3 jedinice duljine ulijevo usporedno s osi apscisa dobivamo točku (–1–3, –3) = (–4, –3). Svojstvo globalne minimalnosti pritom ostaje „sačuvano“, tj. (–4, –3) je točka globalnoga minimuma funkcije f_1.

Naposljetku, graf funkcije $g = -2 \cdot f_1$ dobivamo tako da ordinatu svake točke grafa funkcije f_1 pomnožimo s (–2). Apscisa te točke se pritom ne mijenja. Time točka (–4, –3) prelazi u točku (–4, (–2) · (–3)) = (–4, 6). Množenjem negativnim brojem mijenja se i svojstvo globalne minimalnosti, pa točka globalnoga minimuma postaje točka globalnoga maksimuma nove funkcije. Dakle, točka globalnoga maksimuma funkcije *g* je (–4, 6). Zaključujemo da *g* poprima maksimalnu vrijednost 6 za *x* = –4.

29. 1.) ≈ 19.32. Neka je r traženi polumjer (izražen u cm). Pripadni središnji kut je dvostruko veći od obodnoga kuta, pa njegova mjera iznosi $2\cdot 15^\circ = 30^\circ$. Označimo li sa S, A i B redom središte kružnice, te krajnje točke zadane tetive, onda primjenom kosinusova poučka na trokut SAB dobivamo:

$$\left|\overline{AB}\right|^2 = \left|\overline{SA}\right|^2 + \left|\overline{SB}\right|^2 - 2\cdot\left|\overline{SA}\right|\cdot\left|\overline{SB}\right|\cdot\angle ASB,$$
$$10^2 = r^2 + r^2 - 2\cdot r\cdot r\cdot\cos 30^\circ,$$
$$100 = 2\cdot r^2 - 2\cdot r^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$100 = 2\cdot r^2 - \sqrt{3}\cdot r^2,$$
$$r^2\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = 100,$$
$$r^2 = \frac{100}{2-\sqrt{3}} = \frac{100}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{100\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{100\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3} = \frac{100\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{1} = 100\cdot\left(2+\sqrt{3}\right),$$
$$r = \sqrt{100\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)} = \sqrt{100}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = 10\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 19.31851652578 \text{ cm}.$$

2.) $x = \operatorname{arctg}(2) + k\cdot\pi \approx 1.107 + k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ Najprije primijetimo da mora vrijediti nejednakost $\operatorname{tg} x \neq 0$. Uvažavajući taj uvjet, množenjem zadane jednadžbe s tg x dobivamo:

$$\operatorname{tg}^2 x + 4 = 4\cdot\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg}^2 x - 4\cdot\operatorname{tg} x + 4 = 0,$$
$$(\operatorname{tg} x - 2)^2 = 0,$$
$$\operatorname{tg} x - 2 = 0,$$
$$\operatorname{tg} x = 2,$$
$$x = \operatorname{arctg}(2) + k\cdot\pi = 1.1071487177940905 + k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

3.) 240. Iz podatka da su x, $2\cdot x$ i $2\cdot y$ tri uzastopna člana aritmetičkoga niza slijedi da vrijedi jednakost $2\cdot x = \frac{x+2\cdot y}{2}$. Odatle množenjem s 2 dobivamo $4\cdot x = x + 2\cdot y$, odnosno $2\cdot y = 3\cdot x$, otkuda je $y = \frac{3}{2}\cdot x$.

Analogno, iz podatka da su $2\cdot x$, $2\cdot y$ i $x - y + 12$ tri uzastopna člana aritmetičkoga niza slijedi da vrijedi jednakost $2\cdot y = \frac{2\cdot x + x - y + 12}{2}$. Odatle množenjem s 2 dobivamo $4\cdot y = 2\cdot x + x - y + 12$, a odatle sređivanjem slijedi $-3\cdot x + 5\cdot y = 12$.

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}\cdot x, \\ -3\cdot x + 5\cdot y = 12. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav metodom zamjene, tj. uvrštavajući prvu jednadžbu sustava u drugu jednadžbu:

$$-3\cdot x+5\cdot\frac{3}{2}\cdot x=12,$$
$$-3\cdot x+\frac{15}{2}\cdot x=12,$$
$$\left(-3+\frac{15}{2}\right)\cdot x=12,$$
$$\frac{-3\cdot 2+15}{2}\cdot x=12,$$
$$\frac{-6+15}{2}\cdot x=12,$$
$$\frac{9}{2}\cdot x=12,\quad /\cdot\frac{2}{9}$$
$$x=12\cdot\frac{2}{9}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}.$$

Dakle, prvi član niza je $a_1=x=\frac{8}{3}$. Razlika niza d jednaka je razlici drugoga i prvoga člana niza:

$$d=2\cdot x-x=x=\frac{8}{3}.$$

Tako konačno dobivamo da je traženi devedeseti član niza jednak:

$$a_{90}=a_1+(90-1)\cdot d=\frac{8}{3}+89\cdot\frac{8}{3}=\frac{8+89\cdot 8}{3}=\frac{8+712}{3}=\frac{720}{3}=240.$$

4.) ≈ 26.9**.** Podatak da se potpuno prazna baterija napuni do 99% za 70 minuta znači da je $B(70)=99$. Uvrštavanjem $t=70$ i $B(70)=99$ u pravilo funkcije B dobivamo:

$$99=100\cdot\left(1-a^{-70}\right),\quad /:100$$
$$1-a^{-70}=\frac{99}{100},$$
$$a^{-70}=1-\frac{99}{100}=\frac{100-99}{100}=\frac{1}{100}=100^{-1},\quad /^{-1}$$
$$a^{70}=100,$$
$$a=\sqrt[70]{100}=\sqrt[70]{10^2}=\sqrt[35]{10}.$$

Ako se baterija punila 25 minuta, onda je njezina napunjenost nakon isteka toga vremena jednaka:

$$B(25)=100\cdot\left(1-\left(\sqrt[35]{10}\right)^{-25}\right)=100\cdot\left(1-10^{-\frac{25}{35}}\right)=100\cdot\left(1-10^{-\frac{5}{7}}\right).$$

Mi tražimo vrijeme za koje će se isprazniti baterija koja se punila 25 minuta. Drugim riječima, tražimo vrijeme t_0 za koje je $B(25)-3\cdot t_0=0$. Uvrštavanjem vrijednosti $B(25)$ dobivamo:

$$100\cdot\left(1-10^{-\frac{5}{7}}\right)-3\cdot t_0=0,$$

$$t_0=\frac{100}{3}\cdot\left(1-10^{-\frac{5}{7}}\right)\approx 26.8976742370558 \text{ minuta.}$$

5.) $6\cdot x+10\cdot y+9=0$ **ili** $y=-\frac{3}{5}\cdot x-\frac{9}{10}$ **ili** $\frac{x}{-\frac{3}{2}}+\frac{y}{-\frac{9}{10}}=1$. Neka je $T=(x_T,y_T)$ bilo koja točka jednako udaljena od zadanih pravaca. Udaljenost točke T od prvoga pravca jednaka je:

$$d_1=\frac{|3\cdot x_T+5\cdot y_T-1|}{\sqrt{3^2+5^2}}.$$

Udaljenost točke T od drugoga pravca jednaka je:

$$d_2=\frac{|3\cdot x_T+5\cdot y_T+10|}{\sqrt{3^2+5^2}}.$$

Te udaljenosti moraju biti jednake, pa izjednačavanjem gornjih dvaju izraza dobivamo:

$$\frac{|3\cdot x_T+5\cdot y_T-1|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{|3\cdot x_T+5\cdot y_T+10|}{\sqrt{3^2+5^2}},$$

$$|3\cdot x_T+5\cdot y_T-1|=|3\cdot x_T+5\cdot y_T+10|.$$

Izrazi pod apsolutnom vrijednošću ne mogu biti istoga predznaka jer bismo u tom slučaju izostavljanjem znaka apsolutne vrijednosti dobili očigledno netočnu jednakost $-1=10$. Zbog toga mora vrijediti:

$$3\cdot x_T+5\cdot y_T-1=-(3\cdot x_T+5\cdot y_T+10).$$

Sređivanjem ovoga izraza dobivamo:

$$3\cdot x_T+5\cdot y_T-1+3\cdot x_T+5\cdot y_T+10=0,$$

$$6\cdot x_T+10\cdot y_T+9=0.$$

Budući da je T bila proizvoljna točka, traženi skup točaka je pravac $6\cdot x+10\cdot y+9=0$. Zapišemo li njegovu jednadžbu u eksplicitnom obliku, dobit ćemo $y=-\frac{3}{5}\cdot x-\frac{9}{10}$, a zapišemo li je u segmentnom obliku, dobit ćemo $\frac{x}{-\frac{3}{2}}+\frac{y}{-\frac{9}{10}}=1$. Svaki od tih triju oblika je ispravno rješenje zadatka.

30. 396 (uz pretpostavku da je poklopac ima bridove duge 12 cm i 6 cm). Neka su a, b i c redom duljina, širina i visina kutije (izražene u cm). Iz podatka da je duljina kutije dvostruko veća od širine kutije slijedi jednakost $a = 2 \cdot b$. Ukupna duljina ukrasne niti jednaka je zbroju duljina svih bridova kvadra jer se niti nigdje ne preklapaju. Kvadar ima ukupno 4 brida duljine a, 4 brida duljine b i 4 brida duljine c, pa je zbroj duljina svih bridova kvadra jednak $4 \cdot a + 4 \cdot b + 4 \cdot c$. Taj zbroj treba biti jednak 108, pa dobivamo jednakost $4 \cdot a + 4 \cdot b + 4 \cdot c = 108$, odnosno, nakon dijeljenja s 4, $a + b + c = 27$. Uvrstimo li u ovu jednakost $a = 2 \cdot b$, dobit ćemo jednakost $3 \cdot b + c = 27$ iz koje je $c = 27 - 3 \cdot b$.

Obujam kutije jednak je $V = a \cdot b \cdot c = (2 \cdot b) \cdot b \cdot (27 - 3 \cdot b) = 54 \cdot b^2 - 6 \cdot b^3$. Želimo da vrijednost toga izraza bude maksimalna. Pritom uočimo da mora vrijediti relacija $b \in [0,9]$. Naime, prema prirodi zadatka, vrijednost b je nenegativna. Takva je i vrijednost c, što daje $27 - 3 \cdot b \geq 0$, odnosno $-3 \cdot b \geq -27$, a odatle je $b \leq 9$. Zbog toga je $b \in [0,9]$.

Dakle, tražimo globalni maksimum funkcije $V = V(b) = 54 \cdot b^2 - 6 \cdot b^3$ na segmentu $[0,9]$. Odredimo njezine stacionarne točke. Prva derivacija funkcije V je:

$$V'(b) = 54 \cdot 2 \cdot b^{2-1} - 6 \cdot 3 \cdot b^{3-1} = 108 \cdot b - 18 \cdot b^2 = 18 \cdot b \cdot (6 - b).$$

Iz ovoga izraza lako odredimo sve $b \in [0,9]$ za koje je $V'(b) = 0$. To su $b_1 = 0$ i $b_2 = 6$. Sada izračunamo:

$$V(0) = 54 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0^3 = 54 \cdot 0 - 6 \cdot 0 = 0 - 0 = 0,$$
$$V(6) = 54 \cdot 6^2 - 6 \cdot 6^3 = 54 \cdot 36 - 6 \cdot 216 = 1944 - 1296 = 648,$$
$$V(9) = 54 \cdot 9^2 - 6 \cdot 9^3 = 54 \cdot 81 - 6 \cdot 729 = 4374 - 4374 = 0.$$

Dakle, funkcija V ima globalni maksimum 648 za $b = 6$. Sada lako izračunamo:

$$a = 2 \cdot b = 2 \cdot 6 = 12,$$
$$c = 27 - 3 \cdot b = 27 - 3 \cdot 6 = 27 - 18 = 9.$$

Tražena površina papira jednaka je oplošju kutije bez poklopca. U zadatku se ne navodi s koje strane je kutija otvorena, pa ćemo pretpostaviti da je kutija (standardno) otvorena na strani čija je duljina 12 cm, a širina 6 cm. Zbog toga su strane kutije jedan pravokutnik čija je duljina 12 cm, a širina 6 cm, dva pravokutnika čije su duljine 12 cm i širine 9 cm, te dva pravokutnika čije su duljine 6 cm i širine 9 cm. Ukupan zbroj njihovih površina jednak je:

$$O = a \cdot b + 2 \cdot (a \cdot c + b \cdot c) = 12 \cdot 6 + 2 \cdot (12 \cdot 9 + 6 \cdot 9) = 72 + 2 \cdot (108 + 54) = 72 + 2 \cdot 162 =$$
$$= 72 + 324 = 396 \text{ cm}^2.$$

Pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač