## OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE. MATEMATIČKA INDUKCIJA.

**1.** Koje od sljedećih rečenica su izjave? Za svaku izjavu odredite njezinu istinitost.

**a)** Mjerna jedinica za jakost struje je volt.
**b)** Mjerna jedinica za jakost struje je amper.
**c)** Koja je mjerna jedinica za jakost struje?
**d)** Tetraedar je zabrinut jer je Jadransko more veće od nule.
**e)** Ne slušaj Micu Trofrtaljku pod nastavom iz Osnova elektrotehnike 1!
**f)** Pravokutnik je četverokut s okomitim dijagonalama.
**g)** Kvadrat je četverokut s okomitim dijagonalama.
**h)** Miroslav Krleža je napisao „Braću Karamazove."
**i)** Dalibor Matanić je režirao film „Zvizdan".
**j)** Jelena Rozga pjeva pjesmu „Ludo ljeto".
**k)** Ivan Žak pjeva pjesmu „Pretjerujem".
**l)** Justin Bieber pjeva pjesmu „Can't feel my face".
**m)** Madonna pjeva pjesmu „Like a Prayer".
**n)** Jedna od županija u Republici Hrvatskoj je Ličko-kninska.
**o)** Jedan od gradova u Republici Hrvatskoj je Dugo Selo.
**p)** Jedna od općina u Republici Hrvatskoj je općina Frkljevci.
**q)** Jedno od naselja u Republici Hrvatskoj je Podbablje Gornje.
**r)** Stjepan Radić je hrvatski matematičar.
**s)** Stjepan Gradić je hrvatski matematičar.
**t)** Pitagorin poučak prvi je otkrio Pitagora.
**u)** Dva trokuta su sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.
**v)** Dva trokuta su slična ako se podudaraju u sve tri stranice.
**w)** Dva trokuta su sukladna ako se podudaraju u sva tri kuta.
**x)** Dva trokuta su slična ako se podudaraju u sva tri kuta.
**y)** Obujam bilo koje prizme jednak je umnošku oplošja i visine te prizme.
**z)** Obujam bilo koje kugle upravno je razmjeran njezinu polumjeru.

**2.** Izrecite izjave $-A$, $-B$, $A+B$, $A\cdot B$, $A\to B$, $B\to A$ i $A\leftrightarrow B$ i odredite istinitost tih izjava, kao i istinitost zadanih izjava $A$ i $B$ ako je:

**a)** $A$: „Sava protječe kroz Zagreb.", $B$: „Zagreb je glavni grad Republike Hrvatske.";
**b)** $A$: „Rijeka je grad na Indijskom oceanu.", $B$: „Split nije grad na Jadranskom moru.";
**c)** $A$: „New York je grad u Rusiji.", $B$: „Moskva je grad u Rusiji.";
**d)** $A$: „Los Angeles je grad u SAD.", $B$: „Kijev je grad u SAD.";
**e)** $A$: „Dobriša Cesarić je napisao pjesmu 'Slap'.", $B$: „Fjodor Mihailovič Dostojevski je napisao roman 'Rat i mir'."
**f)** $A$: „Broj $e$ je iracionalan.", $B$: „Broj $\pi$ je racionalan.";
**g)** $A$: „$\sqrt{625}$ nije cijeli broj.", $B$: „$\sqrt{576}$ je prirodan broj.";
**h)** $A$: „Skup $\mathbb{R}$ je podskup skupa $\mathbb{C}$.", $B$: „Skup $\mathbb{C}$ je podskup skupa $\mathbb{R}$.";
**i)** $A$: „Broj 12345 je paran.", $B$: „Broj 2468 je paran.";
**j)** $A$: „Broj 54321 je neparan.", $B$: „Broj 8642 je neparan.";
**k)** $A$: „ Zbroj bilo kojih dvaju prirodnih brojeva je prirodan broj.", $B$: „Razlika bilo kojih dvaju prirodnih brojeva je prirodan broj.";
**l)** $A$: „Količnik bilo kojih dvaju cijelih brojeva je cijeli broj.", $B$: „Umnožak bilo kojih dvaju cijelih brojeva je cijeli broj.";

**OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE. MATEMATIČKA INDUKCIJA.**

**m)** *A*: „$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ je realan broj.“; *B*: „$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ je prirodan broj.“;
**n)** *A*: „$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ je prirodan broj.“; *B*: „$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ je imaginaran broj.“;
**o)** *A*: „Usporedni pravci se ne sijeku.“, *B*: „Okomiti pravci se sijeku.“;
**p)** *A*: „Usporedni pravci se sijeku.“, *B*: „Okomiti pravci se ne sijeku.“;
**q)** *A*: „U kuglu se može upisati kocka.“, *B*: „U kocku se ne može upisati kugla.“;
**r)** *A*: „U kvadrat se ne može upisati krug.“, *B*: „U krug se može upisati kvadrat.“;
**s)** *A*: „Opseg kvadrata je upravno razmjeran duljini stranice kvadrata.“, *B*: „Površina kvadrata je upravno razmjerna duljini stranice kvadrata.“;
**t)** *A*: „Opseg kvadrata je obrnuto razmjeran duljini stranice kvadrata.“, *B*: „Površina kvadrata je obrnuto razmjerna duljini stranice kvadrata.“;
**u)** *A*: „Površina trokuta je upravno razmjerna kosinusu najvećega kuta trokuta.“, *B*: „Površina trokuta je upravno razmjerna sinusu najvećega kuta trokuta.“;
**v)** *A*: „Jedinična kružnica ima duljinu polumjera jednaku 1 jedinica duljine.“, *B*: „Jedinična kružnica ima površinu jednaku 1 četvornu jedinicu.“;
**w)** *A*: „“, *B*: „Jedinična kružnica ima površinu jednaku 1 četvornu jedinicu.“;
**x)** *A*: „Broj π je strogo veći od broja *e*.“, *B*: „Broj *e* je strogo veći od broja π.“;
**y)** *A*: „Broj *e* je strogo manji od imaginarne jedinice *i*.“, *B*: „Imaginarna jedinica *i* je strogo manja od broja *e*.“;
**z)** *A*: „Dva trokuta su sukladna.“, *B*: „Dva trokuta se podudaraju u dvije stranice i kutu među tim stranicama.“

**3.** Zapišite svaku od sljedećih izjava i njezinu negaciju koristeći kvantifikatore i uobičajene oznake za brojevne skupove (skup iracionalnih brojeva označite s $\mathbb{I}$), pa odredite istinitost dobivenih izjava ako je:

**a)** *A*: „Svaki prirodan broj je veći od nule.“;
**b)** *B*: „Postoji prirodan broj koji je strogo manji od 2015.“;
**c)** *C*: „Svaki cijeli broj je manji od nule.“;
**d)** *D*: „Postoji cijeli broj koji je strogo veći od 2015.“;
**e)** *E*: „Svaki cijeli broj je racionalan broj.“;
**f)** *F*: „Postoji iracionalan broj koji nije cijeli broj.“;
**g)** *E*: „Svaki racionalan broj je cijeli broj.“;
**h)** *F*: „Postoji realan broj koji nije cijeli broj.“;
**i)** *I*: „Svaki racionalan broj je realan broj.“
**j)** *J*: „Postoji iracionalan broj koji nije prirodan broj.“;
**k)** *K*: „Količnik bilo kojih dvaju prirodnih brojeva je prirodan broj.“;
**l)** *L*: „Postoje dva prirodna broja čiji umnožak nije prirodan broj.“;
**m)** *M*: „Razlika bilo kojih dvaju cijelih brojeva je cijeli broj.“;
**n)** *N*: „Postoje dva cijela broja čiji umnožak nije cijeli broj.“;
**o)** *O*: „Količnik bilo kojih dvaju realnih brojeva je realan broj.“;
**p)** *P*: „Postoje dva realna broja čiji umnožak nije racionalan broj.“
**q)** *Q*: „Za svaki prirodan broj *x* postoji cijeli broj *y* takav da je $x < y$.“;
**r)** *R*: „Za svaki cijeli broj *x* postoji prirodan broj *y* takav da je $x > y$.“;
**s)** *S*: „Za svaki racionalan broj *x* postoji iracionalan broj *y* takav da je $x < y$.“;

**OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE. MATEMATIČKA INDUKCIJA.**

**t)** $T$: „Za svaki iracionalan broj $x$ postoji racionalan broj $y$ takav da je $x > y$.“;
**u)** $U$: „Postoji točno jedan prirodan broj $x$ takav da je $x < 2$.“;
**v)** $V$: „Postoji točno jedan iracionalan broj $x$ takav da je $x > 0$.“;
**w)** $W$: „Postoji točno jedan cijeli broj $x$ takav da je $x < \pi$.“;
**x)** $X$: „Postoji točno jedan iracionalan broj $x$ takav da je $x = e$.“;
**y)** $Y$: „Postoji točno jedan realan broj $x$ takav da je $\pi \cdot x = e$.“;
**z)** $Z$: „Postoji točno jedan racionalan broj $x$ takav da je $e \cdot x = \pi$.“.

**4.** Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeće jednakosti:

**a)** $\sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k) = 2 + 4 + \ldots + (2 \cdot n) = n^2 + n$;

**b)** $\sum_{k=1}^{n} (3 \cdot k - 2) = 1 + 4 + \ldots + (3 \cdot n - 2) = \dfrac{n \cdot (3 \cdot n - 1)}{2}$;

**c)** $\sum_{k=1}^{n} (4 \cdot k + 1) = 5 + 9 + \ldots + (4 \cdot n + 1) = n \cdot (2 \cdot n + 3)$;

**d)** $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

**e)** $\sum_{k=1}^{n} 3^{1-k} = 1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{3^{n-1}} = \dfrac{3 - 3^{1-n}}{2}$;

**f)** $\sum_{k=1}^{n} (2^k + 1) = 3 + 5 + \ldots + (2^n + 1) = 2^{n+1} + n - 2$;

**g)** $\sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1)^2 = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2 \cdot n - 1)^2 = \dfrac{n \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{3}$;

**h)** $\sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k)^2 = 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = \dfrac{2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{3}$;

**i)** $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2$;

**j)** $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k^2 = \dfrac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{2}$;

**k)** $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k \cdot (k+1)} = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

**l)** $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2 \cdot k - 1) \cdot (2 \cdot k + 1)} = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1)} = \dfrac{n}{2 \cdot n + 1}$;

**m)** $\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{8}{9} + \ldots + \dfrac{n^2 - 1}{n^2} = \dfrac{n+1}{2 \cdot n}$;

**n)** $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$. (*Podsjetnik*: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

## OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE. MATEMATIČKA INDUKCIJA.

**5.** Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeće nejednakosti:

**a)** $2^n \geq n+1$;
**b)** $2^n \geq 2 \cdot n$;
**c)** $n^n \geq n!$.

**6.** Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, vrijede sljedeće nejednakosti:

**a)** $2^n \geq 4 \cdot n$;
**b)** $2^n \geq n^2$;
**c)** $n! > 2^n$;
**d)** $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$, pri čemu je $x > -1$.

**7.** Matematičkom indukcijom dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$:

**a)** broj $2^{2 \cdot n} - 1$ djeljiv s 3;
**b)** broj $11^n - 6$ djeljiv sa 5;
**c)** broj $7^n - 2^n$ djeljiv sa 5;
**d)** broj $3^{2 \cdot n} - 1$ djeljiv sa 8;
**e)** broj $23^n - 1$ djeljiv sa 11;
**f)** broj $2^{3 \cdot n} + 1$ djeljiv sa 9;
**g)** broj $2^{5 \cdot n} + 1$ djeljiv sa 33;
**h)** broj $n^3 + 2 \cdot n$ djeljiv s 3;
**i)** broj $n^3 + 5 \cdot n$ djeljiv sa 6;
**j)** broj $n^7 - n$ djeljiv sa 7;
**k)** broj $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$ paran broj;
**l)** broj $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ prirodan broj.

**8.** Matematičkom indukcijom dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ ukupan broj međusobno različitih podskupova $n$-članoga skupa jednak $2^n$. (*Napomena*: Prazan skup je podskup svakoga skupa.)

**9.** Matematičkom indukcijom dokažite da se svaki prirodan broj jednak ili veći od 4 može prikazati kao zbroj konačno mnogo pribrojnika od kojih je svaki jednak ili 2 ili 5. (*Uputa*: U koraku indukcije promotrite dva različita slučaja: barem jedan pribrojnik u prikazu broja $n$ je jednak 5 i svi pribrojnici u prikazu broja $n$ su jednaki 2.)

**10.** Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ realnih brojeva definiran je jednakostima $\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt{2 \cdot a_n + 1}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n < 4$.