



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

11. domaća zadaća:

TRIGONOMETRIJSKE I CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE.

1. Odredite amplitudu, kružnu frekvenciju, fazni pomak, temeljni period, najveću strogo negativnu nultočku i najmanju strogo pozitivnu nultočku svake od sljedećih funkcija, pa nacrtajte njezin graf na osnovnom segmentu:

a) $f(x) = \sin(2 \cdot x)$;

b) $f(x) = -\sin(3 \cdot x)$;

c) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$;

d) $f(x) = -\sin \frac{x}{3}$;

e) $f(x) = \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$;

f) $f(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$;

g) $f(x) = 2 \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$;

h) $f(x) = 2 \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$;

i) $f(x) = -\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$;

j) $f(x) = -\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$;

k) $f(x) = (-2) \cdot \sin \left(x - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right)$;

l) $f(x) = (-2) \cdot \sin \left(x + \frac{2 \cdot \pi}{3} \right)$;

m) $f(x) = 3 \cdot \sin \left(x - \frac{3 \cdot \pi}{4} \right)$;

n) $f(x) = (-3) \cdot \sin \left(x + \frac{3 \cdot \pi}{4} \right)$;

o) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin \left(x - \frac{5 \cdot \pi}{6} \right)$;

p) $f(x) = \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{5 \cdot \pi}{6} \right)$;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

11. domaća zadaća:

TRIGONOMETRIJSKE I CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE.

- q) $f(x) = \sin\left(2 \cdot x - \frac{7 \cdot \pi}{6}\right)$;
- r) $f(x) = -\sin\left(2 \cdot x + \frac{4 \cdot \pi}{3}\right)$;
- s) $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x - \frac{3 \cdot \pi}{4}\right)$;
- t) $f(x) = (-2) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3 \cdot \pi}{4}\right)$
- u) $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x + \frac{5 \cdot \pi}{6}\right)$;
- v) $f(x) = (-3) \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x - \frac{7 \cdot \pi}{12}\right)$;
- w) $f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{4} \cdot x + \frac{5 \cdot \pi}{8}\right)$;
- x) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{4} \cdot x - \frac{5 \cdot \pi}{8}\right)$;
- y) $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x - \frac{\pi}{12}\right)$;
- z) $f(x) = \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x + \frac{\pi}{9}\right)$.

2. Koristeći identitet $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ odredite amplitudu, kružnu frekvenciju, fazni pomak, temeljni period, najveću strogo negativnu nultočku i najmanju strogo pozitivnu nultočku svake od sljedećih funkcija, pa nacrtajte pripadni graf na osnovnom segmentu:

- a) $f(x) = \cos(2 \cdot x)$;
- b) $f(x) = -\cos\frac{x}{2}$;
- c) $f(x) = -\cos(3 \cdot x)$;
- d) $f(x) = \cos\frac{x}{3}$;
- e) $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

11. domaća zadaća:

TRIGONOMETRIJSKE I CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE.

- f) $f(x) = (-2) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
- g) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{4}\right)$;
- h) $f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos\left(2 \cdot x + \frac{3 \cdot \pi}{4}\right)$;
- i) $f(x) = (-3) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5 \cdot \pi}{4}\right)$;
- j) $f(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot x - \frac{5 \cdot \pi}{4}\right)$;
- k) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot x - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right)$;
- l) $f(x) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot x + \frac{5 \cdot \pi}{6}\right)$.

3. Zapišite zadanu funkciju u obliku $f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$, pa nacrtajte njezin graf na osnovnom segmentu ako je:

- a) $f(t) = \sin t + \cos t$;
- b) $f(t) = \sqrt{3} \cdot \sin(2 \cdot t) + \cos(2 \cdot t)$;
- c) $f(t) = \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)$;
- d) $f(t) = \sin(3 \cdot t) + \sqrt{3} \cdot \cos(3 \cdot t)$;
- e) $f(t) = \sin\left(\frac{t}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{t}{3}\right)$.

4. Odredite amplitudu, kružnu frekvenciju i fazni pomak superpozicije harmonijskih gibanja f_1 i f_2 , te nacrtajte grafove svih triju funkcija ako je:

- a) $f_1(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;
- b) $f_1(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
- c) $f_1(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

11. domaća zadaća:

TRIGONOMETRIJSKE I CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE.

- d) $f_1(x) = \sin\left(x - \frac{7 \cdot \pi}{6}\right), f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
- e) $f_1(x) = \sin\left(x + \frac{7 \cdot \pi}{6}\right), f_2(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right);$
- f) $f_1(x) = \sin\left(x - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$
- g) $f_1(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), f_2(x) = \sin\left(x + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right);$
- h) $f_1(x) = \sin\left(x - \frac{5 \cdot \pi}{4}\right), f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$
- i) $f_1(x) = \sin\left(x + \frac{5 \cdot \pi}{4}\right), f_2(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$
- j) $f_1(x) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right), f_2(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right);$
- k) $f_1(x) = (-2) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), f_2(x) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{5 \cdot \pi}{4}\right);$
- l) $f_1(x) = 3 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), f_2(x) = (-3) \cdot \sin\left(x + \frac{5 \cdot \pi}{6}\right);$
- m) $f_1(x) = \sin\left(x + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), f_2(x) = (-2) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$
- n) $f_1(x) = \sin\left(x - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), f_2(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{5 \cdot \pi}{3}\right);$
- o) $f_1(x) = (-3) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x - \pi\right), f_2(x) = 2 \cdot \sin\frac{x}{2};$
- p) $f_1(x) = 2 \cdot \sin(2 \cdot x + \pi), f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot x);$
- q) $f_1(x) = (-2) \cdot \sin\frac{x}{3}, f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x + \pi\right);$
- r) $f_1(x) = -\sin\left(2 \cdot x + \frac{\pi}{6}\right), f_2(x) = 2 \cdot \sin\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{6}\right);$
- s) $f_1(x) = 3 \cdot \sin\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{3}\right), f_2(x) = (-2) \cdot \sin\left(2 \cdot x + \frac{5 \cdot \pi}{3}\right);$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

11. domaća zadaća:

TRIGONOMETRIJSKE I CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE.

- t) $f_1(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x - \frac{\pi}{4}\right), f_2(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3 \cdot \pi}{4}\right);$
- u) $f_1(x) = \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x - \frac{5 \cdot \pi}{4}\right), f_2(x) = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3 \cdot \pi}{4}\right);$
- v) $f_1(x) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x - \frac{7 \cdot \pi}{6}\right), f_2(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x + \frac{5 \cdot \pi}{3}\right);$
- w) $f_1(x) = \sin \frac{x}{6}, f_2(x) = \cos \frac{x}{6};$
- x) $f_1(x) = \sin\left(\frac{1}{4} \cdot x - \frac{\pi}{4}\right), f_2(x) = (-2) \cdot \cos \frac{x}{4};$
- y) $f_1(x) = \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), f_2(x) = 2 \cdot \cos \frac{x}{3};$
- z) $f_1(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), f_2(x) = -\cos \frac{x}{2}.$

5. Odredite prirodno područje definicije i inverz svake od sljedećih ciklometrijskih funkcija, pa nacrtajte pripadni graf:

- a) $f(x) = \arcsin(2 \cdot x);$
- b) $f(x) = \arccos(2 \cdot x);$
- c) $f(x) = \operatorname{arctg}(2 \cdot x);$
- d) $f(x) = \operatorname{arcctg}(2 \cdot x);$
- e) $f(x) = \arcsin \frac{x}{2};$
- f) $f(x) = \arccos \frac{x}{2};$
- g) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2};$
- h) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{x}{2};$
- i) $f(x) = \arcsin(x + 1);$
- j) $f(x) = \arccos(x - 1);$
- k) $f(x) = \operatorname{arctg}(x + 2);$
- l) $f(x) = \operatorname{arcctg}(x - 2).$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

11. domaća zadaća:

TRIGONOMETRIJSKE I CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE.

6. Dokažite da za svaki $x \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijede sljedeći identiteti:

a) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos \sqrt{1-x^2}$;

b) $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin \sqrt{1-x^2}$.

7. Dokažite da za svaki $x > 0$ vrijede sljedeći identiteti:

a) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

b) $\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

8. Pokažite da za sve $x, y \in \mathbf{R}$ takve da točka (x, y) pripada jediničnom krugu vrijedi:

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin \left(x \cdot \sqrt{1-y^2} \pm y \cdot \sqrt{1-x^2} \right).$$

9. Pokažite da za sve $x, y \in [0, 1]$ vrijedi:

$$\arccos x \pm \arccos y = \pm \arccos \left(x \cdot y \pm \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \right).$$

10. Pokažite da za sve $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi:

$$\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \mp x \cdot y}.$$

11. Dokažite sljedeće identitete:

a) $2 \cdot \arcsin x = \arcsin \left(2 \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} \right)$, za svaki $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$;

b) $2 \cdot \arccos x = \arccos(2 \cdot x^2 - 1)$, za svaki $x \in [0, 1]$;

c) $2 \cdot \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cdot x}{1-x^2} \right)$, za svaki $x \in \langle -1, 1 \rangle$.