



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU  
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE  
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

## MATEMATIKA 1

12. domaća zadaća:

### EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA. HIPERBOLNE I AREA FUNKCIJE.

1. Odredite prirodno područje definicije i inverz svake od sljedećih funkcija, nacrtajte pripadni graf i pomoću njega klasificirajte funkciju s obzirom na omeđenost i monotonost:

- a)  $f(x) = 2^x$ ;
- b)  $f(x) = -3^x$ ;
- c)  $f(x) = 2^x + 1$ ;
- d)  $f(x) = 1 - 3^x$ ;
- e)  $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ;
- f)  $f(x) = (-2) \cdot 3^x$ ;
- g)  $f(x) = 3 \cdot 2^x + 1$ ;
- h)  $f(x) = 2 \cdot 3^x - 4$ ;
- i)  $f(x) = 5 - 3 \cdot 2^x$ ;
- j)  $f(x) = -1 - 2 \cdot 3^x$ ;
- k)  $f(x) = e^{2 \cdot x}$ ;
- l)  $f(x) = e^{-2 \cdot x}$ ;
- m)  $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ ;
- n)  $f(x) = \sqrt{e^{-x}}$ ;
- o)  $f(x) = 2^{-x}$ ;
- p)  $f(x) = -3^{-x}$ ;
- q)  $f(x) = 2^{-x} + 1$ ;
- r)  $f(x) = 3^{-x} - 1$ ;
- s)  $f(x) = 1 - 2^{-x}$ ;
- t)  $f(x) = -1 - 3^{-x}$ ;
- u)  $f(x) = 3 \cdot 2^{-x}$ ;
- v)  $f(x) = (-2) \cdot 3^{-x}$ ;
- w)  $f(x) = 3 \cdot 2^{-x} + 1$ ;
- x)  $f(x) = 2 \cdot 3^{-x} - 1$ ;
- y)  $f(x) = 4 - 3 \cdot 2^{-x}$ ;
- z)  $f(x) = -1 - 2 \cdot 3^{-x}$ .

2. Odredite prirodno područje definicije i inverz svake od sljedećih funkcija, nacrtajte pripadni graf i pomoću njega klasificirajte funkciju s obzirom na omeđenost i monotonost:

- a)  $f(x) = \log_2(x + 1)$ ;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU  
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE  
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

## MATEMATIKA 1

12. domaća zadaća:

### EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA. HIPERBOLNE I AREA FUNKCIJE.

- b)  $f(x) = \log_3(1 - x)$ ;
- c)  $f(x) = \log_2(x - 1) + 1$ ;
- d)  $f(x) = \log_3(x + 1) - 1$ ;
- e)  $f(x) = 1 - \log_2(1 - x)$ ;
- f)  $f(x) = -1 - \log_3(x - 1)$ ;
- g)  $f(x) = 2 \cdot \log_2(x + 2)$ ;
- h)  $f(x) = (-2) \cdot \log_3(x - 3)$ ;
- i)  $f(x) = 3 \cdot \log_2(2 - x) + 2$ ;
- j)  $f(x) = 2 \cdot \log_3(3 - x) - 3$ ;
- k)  $f(x) = 3 - 2 \cdot \log_2(x + 1)$ ;
- l)  $f(x) = -1 - 2 \cdot \log_3(1 - x)$ ;
- m)  $f(x) = \ln(2 \cdot x)$ ;
- n)  $f(x) = \ln \frac{x}{2}$ ;
- o)  $f(x) = -\log_3(x - 1)$ ;
- p)  $f(x) = -\log_2(1 - x)$ ;
- q)  $f(x) = -\log_3(x - 1) + 1$ ;
- r)  $f(x) = -\log_2(x + 2) - 2$ ;
- s)  $f(x) = 2 - \log_{\frac{1}{3}}(3 - x)$ ;
- t)  $f(x) = -1 - \log_{\frac{1}{2}}(2 - x)$ ;
- u)  $f(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x + 1)$ ;
- v)  $f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$ ;
- w)  $f(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}}(3 - x) + 1$ ;
- x)  $f(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) - 3$ ;
- y)  $f(x) = 3 - 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}}(3 - x)$ ;
- z)  $f(x) = -1 - 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2 - x)$ .



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU  
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE  
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

## MATEMATIKA 1

12. domaća zadaća:

### EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA. HIPERBOLNE I AREA FUNKCIJE.

3. Uz koje uvjete na vrijednosti  $a$  i  $b$  su istinite sljedeće jednakosti:

a)  $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ ;

b)  $\ln(a^b) = b \cdot \ln a$ ;

c)  $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ ;

d)  $\frac{1}{b} \cdot \ln(a^b) = \ln a$  ?

Objasnite svoje odgovore.

4. Odredite prirodno područje definicije i inverz svake od sljedećih funkcija, nacrtajte pripadni graf i pomoću njega klasificirajte funkciju s obzirom na omeđenost i monotonost:

a)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ;

b)  $f(x) = -e^{\frac{1}{x}}$ ;

c)  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ ;

d)  $f(x) = -e^{-\frac{1}{x}}$ ;

e)  $f(x) = \ln(x^2)$ ;

f)  $f(x) = \ln^2 x$ ;

g)  $f(x) = \ln(\ln x)$ ;

h)  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ ;

i)  $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ ;

j)  $f(x) = \ln(x+1)$ ;

k)  $f(x) = -\ln(1-x)$ ;

l)  $f(x) = 1 - \ln(-x)$ ;

m)  $f(x) = \ln|x|$ ;

n)  $f(x) = 2 \cdot \ln|x|$ ;

o)  $f(x) = \ln|2 \cdot x| - 1$ ;

p)  $f(x) = 1 - 2 \cdot \ln|x|$ ;

q)  $f(x) = \ln|x|$ ;

r)  $f(x) = \ln|x| - 1$ ;

s)  $f(x) = 1 - \ln|x|$ ;



## MATEMATIKA 1

12. domaća zadaća:

### EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA. HIPERBOLNE I AREA FUNKCIJE.

- t)  $f(x) = -1 - \ln(2 \cdot x)$ ;
- u)  $f(x) = \ln x + 1$ ;
- v)  $f(x) = \ln x - 1$ ;
- w)  $f(x) = |1 - \ln x| - 1$ ;
- x)  $f(x) = |2 + \ln |x|| - 2$ ;
- y)  $f(x) = \ln |x| - |1 - 1|$ ;
- z)  $f(x) = \ln |\ln |x| - 1|$ .

5. Dokažite valjanost sljedeće tablice:

	sh $x$	ch $x$	th $x$	cth $x$
sh $x$	–	$\sqrt{\text{ch}^2 x - 1}$	$\frac{\text{th } x}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\text{cth}^2 x - 1}}$
ch $x$	$\sqrt{1 + \text{sh}^2 x}$	–	$\frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}}$	$\frac{\text{cth } x}{\sqrt{\text{cth}^2 x - 1}}$
th $x$	$\frac{\text{sh } x}{\sqrt{1 + \text{sh}^2 x}}$	$\frac{\sqrt{\text{ch}^2 x - 1}}{\text{ch } x}$	–	$\frac{1}{\text{cth } x}$
cth $x$	$\frac{\sqrt{1 + \text{sh}^2 x}}{\text{sh } x}$	$\frac{\text{ch } x}{\sqrt{\text{ch}^2 x - 1}}$	$\frac{1}{\text{th } x}$	–

6. Izravno iz definicije hiperbolnih funkcija pokažite da vrijede sljedeće adicijske formule:

- a)  $\text{sh}(x \pm y) = \text{sh } x \cdot \text{ch } y \pm \text{ch } x \cdot \text{sh } y$ ;
- b)  $\text{ch}(x \pm y) = \text{ch } x \cdot \text{ch } y \pm \text{sh } x \cdot \text{sh } y$ ;
- c)  $\text{th}(x \pm y) = \frac{\text{th } x \pm \text{th } y}{1 \pm \text{th } x \cdot \text{th } y}$ ;
- d)  $\text{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \text{cth } x \cdot \text{cth } y}{\text{cth } x \pm \text{cth } y}$ .

Usporedite navedene formule s njihovim trigonometrijskim analogonima, pa uočite sličnosti i razlike.

7. Koristeći rezultat prethodnoga zadatka pokažite da vrijede sljedeće jednakosti:

- a)  $\text{sh}(2 \cdot x) = 2 \cdot \text{sh } x \cdot \text{ch } x$ ;
- b)  $\text{ch}(2 \cdot x) = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$ ;
- c)  $\text{th}(2 \cdot x) = \frac{2 \cdot \text{th } x}{1 + \text{th}^2 x}$ ;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU  
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE  
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

## MATEMATIKA 1

12. domaća zadaća:

### EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA. HIPERBOLNE I AREA FUNKCIJE.

$$d) \operatorname{cth}(2 \cdot x) = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 x}{2 \cdot \operatorname{cth} x}.$$

Usporedite navedene formule s njihovim trigonometrijskim analogonima, pa uočite sličnosti i razlike.

8. Koristeći rezultate prethodnih zadataka dokažite sljedeće identitete:

$$a) \operatorname{sh} \frac{x}{2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, & \text{za } x > 0; \\ -\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, & \text{za } x < 0; \end{cases}$$

$$b) \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}};$$

$$c) \operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1};$$

$$d) \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x};$$

$$e) \operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \cdot \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2};$$

$$f) \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \cdot \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x - y}{2};$$

$$g) \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \cdot \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{x - y}{2};$$

$$h) \operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y};$$

$$i) \operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y = \frac{\operatorname{sh}(y \pm x)}{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y}.$$

9. Odredite prirodno područje definicije i inverz svake od sljedećih funkcija, nacrtajte pripadni graf i pomoću njega klasificirajte funkciju s obzirom na omeđenost i monotonost:

a)  $f(x) = \operatorname{sh}(2 \cdot x)$ ;

b)  $f(x) = -\operatorname{sh}(2 \cdot x)$ ;

c)  $f(x) = \operatorname{sh}(2 \cdot x) + 1$ ;

d)  $f(x) = \operatorname{sh}(2 \cdot x) - 1$ ;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU  
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE  
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

## MATEMATIKA 1

12. domaća zadaća:

### EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA. HIPERBOLNE I AREA FUNKCIJE.

- e)  $f(x) = 1 - \operatorname{sh}(2 \cdot x)$ ;
- f)  $f(x) = -1 - \operatorname{sh}(2 \cdot x)$ ;
- g)  $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sh}(2 \cdot x)$ ;
- h)  $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sh}(2 \cdot x) + 1$ ;
- i)  $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sh}(2 \cdot x) - 1$ ;
- j)  $f(x) = 1 - 2 \cdot \operatorname{sh}(2 \cdot x)$ ;
- k)  $f(x) = -1 - 2 \cdot \operatorname{sh}(2 \cdot x)$ ;
- l)  $f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{2}$ ;
- m)  $f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{2} + 1$ ;
- n)  $f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{2} - 1$ ;
- o)  $f(x) = -\operatorname{sh} \frac{x}{2}$ ;
- p)  $f(x) = 1 - \operatorname{sh} \frac{x}{2}$ ;
- q)  $f(x) = -1 - \operatorname{sh} \frac{x}{2}$ ;
- r)  $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2}$ ;
- s)  $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2} + 1$ ;
- t)  $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2} - 1$ ;
- u)  $f(x) = 1 - 2 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2}$ ;
- v)  $f(x) = -1 - 2 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2}$ ;
- w)  $f(x) = \operatorname{sh} |x|$ ;
- x)  $f(x) = \operatorname{lsh} |x|$ ;
- y)  $f(x) = |1 - \operatorname{sh} x|$ ;
- z)  $f(x) = 1 - \operatorname{lsh} |x|$ .



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU  
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE  
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

## MATEMATIKA 1

12. domaća zadaća:

### EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA. HIPERBOLNE I AREA FUNKCIJE.

10. Riješite prethodni zadatak zamijenivši funkciju sh s:

- a) ch;
- b) th;
- c) cth;
- d) Arsh;
- e) Arch;
- f) Arth;
- g) Arcth.

11. Izravno iz definicije area funkcija pokažite da za svaki  $x > 0$  vrijede jednakosti:

$$\text{Arch } x = \text{Arch} \sqrt{x^2 - 1} = \text{Arth} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \text{Arcth} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

12. Izravno iz definicije area funkcija pokažite da za svaki  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  vrijede jednakosti:

$$\text{Arth } x = \text{Arsh} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{Arch} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{Arcth} \frac{1}{x}.$$

13. Izravno iz definicije area funkcija pokažite da za svaki  $x > 1$  vrijede jednakosti:

$$\text{Arcth } x = \text{Arsh} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \text{Arch} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \text{Arth} \frac{1}{x}.$$

14. Izravno iz definicije area funkcija pokažite da su funkcije Arsh  $x$ , Arth  $x$  i Arcth  $x$  neparne funkcije. Je li Arch parna ili neparna funkcija? Obrazložite svoj odgovor.

15. Izravno iz definicije area funkcija dokažite sljedeće identitete:

- a)  $\text{Arsh } x \pm \text{Arsh } y = \text{Arsh} \left( x \cdot \sqrt{1 + y^2} \pm y \cdot \sqrt{1 + x^2} \right);$
- b)  $\text{Arch } x \pm \text{Arch } y = \text{Arch} \left[ x \cdot y \pm \sqrt{(x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1)} \right];$
- c)  $\text{Arth } x \pm \text{Arth } y = \text{Arth} \frac{x \pm y}{1 \pm x \cdot y};$
- d)  $\text{Arcth } x \pm \text{Arcth } y = \text{Arcth} \frac{x \cdot y \pm 1}{y \pm x}.$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU  
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE  
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

## MATEMATIKA 1

12. domaća zadaća:

### EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA. HIPERBOLNE I AREA FUNKCIJE.

16. Odredite prirodno područje definicije sljedećih funkcija:

- a)  $f(x) = \operatorname{Arsh}\sqrt{x}$
- b)  $f(x) = \operatorname{Arsh}\sqrt{1-x^2}$ ;
- c)  $f(x) = \operatorname{Arsh}\frac{1}{x}$ ;
- d)  $f(x) = \operatorname{Arsh}\frac{1}{\sqrt{x}}$ ;
- e)  $f(x) = \operatorname{Arsh}\sqrt{x^2-4} + e^{\frac{1}{x-5}}$ ;
- f)  $f(x) = \operatorname{Arch}\sqrt{x}$ ;
- g)  $f(x) = \operatorname{Arch}\frac{1}{x}$ ;
- h)  $f(x) = \operatorname{Arch}\sqrt{10-x^2}$ ;
- i)  $f(x) = \operatorname{Arch}\frac{1}{\sqrt{x}}$
- j)  $f(x) = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{Arch}\sqrt{17-x^2}$ ;
- k)  $f(x) = \operatorname{Arth}\sqrt{x}$ ;
- l)  $f(x) = \operatorname{Arth}\frac{1}{x}$ ;
- m)  $f(x) = \operatorname{Arth}\frac{1}{\sqrt{x}}$
- n)  $f(x) = \operatorname{Arth}|x-1|$ ;
- o)  $f(x) = \operatorname{Arth}|2-x| + e^{\frac{1}{x-1}}$ ;
- p)  $f(x) = \operatorname{Arcth}\sqrt{x}$ ;
- q)  $f(x) = \operatorname{Arcth}\frac{1}{x}$ ;
- r)  $f(x) = \operatorname{Arcth}\frac{1}{\sqrt{x}}$
- s)  $f(x) = \operatorname{Arcth}|x-4|$ ;
- t)  $f(x) = \operatorname{Arcth}|x-10| + e^{\sqrt{20-x}}$ .