NEPREKIDNE FUNKCIJE

1. Izravno iz definicije neprekidne funkcije odredite je li funkcija f neprekidna u točki c ako je:

a) $f(x) = x + 1$, $c = 1$;
b) $f(x) = 1 - x$, $c = 2$;
c) $f(x) = 2 \cdot x + 1$, $c = 1$;
d) $f(x) = 5 \cdot x - 2$, $c = 2$;
e) $f(x) = 3 - 4 \cdot x$, $c = -2$;
f) $f(x) = x^2 + 1$, $c = -1$;
g) $f(x) = x^2 - 1$, $c = 1$;
h) $f(x) = 2 - x^2$, $c = 2$;
i) $f(x) = 4 \cdot x^2 + 1$, $c = -1$;
j) $f(x) = 2 \cdot x^2 - 3$, $c = -2$;
k) $f(x) = -x^2$, $c = 0$;
l) $f(x) = 5 - 2 \cdot x^2$, $c = -1$;
m) $f(x) = x^2 + 2 \cdot x$, $c = 0$;
n) $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x$, $c = -1$;
o) $f(x) = -x^2 - 2 \cdot x$, $c = -2$;
p) $f(x) = e^x$, $c = 1$;
q) $f(x) = \ln x$, $c = 0$;
r) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $c = \pi$;
s) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $c = 0$;

t) $f(x) = \begin{cases} \log_2(-x), & \text{za } x < -1 \\ x + 1, & \text{za } x \geq -1 \end{cases}$, $c = -1$;

u) $f(x) = \begin{cases} e^{x-2}, & \text{za } x \leq 2 \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, & \text{za } x > 2 \end{cases}$, $c = 2$;

v) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{20} \cdot x\right), & \text{za } x < 10 \\ \dfrac{1}{2}x - 4, & \text{za } x = 10 \\ 1 + \ln(x - 9), & \text{za } x > 10 \end{cases}$, $c = 10$;

w) $f(x) = \begin{cases} 1 - \log_{2011}(4028 - x), & \text{za } x < 2016; \\ \arccos\left(\dfrac{x}{2016}\right), & \text{za } x = 2016; \\ x^3 - 2016 \cdot x^2, & \text{za } x > 2016; \end{cases}$, $c = 2016$;

x) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, & \text{za } x < 1 \\ 5, & \text{za } x = 1 \\ 4 + \cos(\pi \cdot x), & \text{za } x > 1 \end{cases}$, $c = 1$;

NEPREKIDNE FUNKCIJE

y) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2\cdot x}, & \text{za } x<0;\\ \dfrac{1}{2}, & \text{za } x=0;\\ \dfrac{1}{2}\cdot\cos(\pi\cdot x), & \text{za } x>0;\end{cases}$, $c=0$;

z) $f(x)=\dfrac{2015\cdot x^2}{x}$, $x=0$.

2. Odredite realne brojeve $a, b\in\mathbb{R}$ tako da funkcija f bude neprekidna na skupu $\mathbb{R}$ ako je:

a) $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{za } x<0\\ a, & \text{za } x\geq 0;\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}a, & \text{za } x\leq 0\\ 1-x, & \text{za } x>0;\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}a, & \text{za } x\leq 0;\\ 2\cdot x+1, & \text{za } 0<x<1;\\ b, & \text{za } x\geq 1;\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}a\cdot x+2, & \text{za } x\leq 2;\\ 3\cdot x+4, & \text{za } 2<x<5;\\ b\cdot x+9, & \text{za } x\geq 5;\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}3-2\cdot a\cdot x, & \text{za } x\leq 3;\\ 9-x, & \text{za } 3<x<8;\\ 2-b\cdot x, & \text{za } x\geq 8;\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{za } x\leq\dfrac{\pi}{2};\\ a\cdot x, & \text{za } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi;\\ b+\cos x, & \text{za } x\geq\pi;\end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases}b+\operatorname{ctg} x, & \text{za } x\leq-\dfrac{\pi}{2};\\ x, & \text{za } -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{5\cdot\pi}{2};\\ a-\operatorname{ctg} x, & \text{za } x\geq\dfrac{5\cdot\pi}{2}\end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{za } x<1;\\ a\cdot x+b, & \text{za } 1\leq x\leq 2;\\ 2, & \text{za } x>2;\end{cases}$

NEPREKIDNE FUNKCIJE

i) $f(x)=\begin{cases}-2, & \text{za } x<2;\\ a\cdot x+b, & \text{za } 2\le x\le 3;\\ -1, & \text{za } x>3;\end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases}-2, & \text{za } x<-1;\\ a\cdot x+b, & \text{za } -1\le x\le 1;\\ x, & \text{za } x>1;\end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{za } x<-2;\\ a\cdot x+b, & \text{za } -2\le x\le 0;\\ 2, & \text{za } x>0;\end{cases}$

l) $f(x)=\begin{cases}2\cdot x, & \text{za } x<1;\\ a\cdot x+b, & \text{za } 1\le x\le 2;\\ x+1, & \text{za } x>2;\end{cases}$

m) $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{za } x<0;\\ a\cdot x+b, & \text{za } 0\le x\le 1;\\ -x, & \text{za } x>1;\end{cases}$

n) $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{za } x<-1;\\ a\cdot x+b, & \text{za } -1\le x\le 2;\\ 2\cdot x+3, & \text{za } x>2;\end{cases}$

o) $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{za } x<0;\\ a\cdot x+b, & \text{za } 0\le x\le 1;\\ 1-x, & \text{za } x>1;\end{cases}$

p) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{za } x<-1;\\ a\cdot x+b, & \text{za } -1\le x\le 0;\\ x+1, & \text{za } x>0;\end{cases}$

q) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{za } x<1;\\ a\cdot x+b, & \text{za } 1\le x\le 2;\\ 1-x, & \text{za } x>2;\end{cases}$

r) $f(x)=\begin{cases}x^2-2, & \text{za } x<0;\\ a\cdot x+b, & \text{za } 0\le x\le 1;\\ x^2+2, & \text{za } x>1;\end{cases}$

s) $f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{za } x<0;\\ a\cdot x+b, & \text{za } 0\le x\le 1;\\ e^{-x}, & \text{za } x>1;\end{cases}$

NEPREKIDNE FUNKCIJE

t) $f(x)=\begin{cases} e^{2\cdot x}, \text{ za } x<\dfrac{1}{2}; \\ a\cdot x+b, \text{ za } \dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}; \\ e^{-2\cdot x}, \text{ za } x>\dfrac{3}{2}; \end{cases}$

u) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{ch} x, \text{ za } x<-1; \\ a\cdot x+b, \text{ za } -1\le x\le 1; \\ \operatorname{sh} x, \text{ za } x>1; \end{cases}$

v) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{cth} x, \text{ za } x<-1; \\ a\cdot x+b, \text{ za } -1\le x\le 1; \\ \operatorname{th} x, \text{ za } x>1; \end{cases}$

w) $f(x)=\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{5}{2}-x\right)+1, \text{za } x<2; \\ a\cdot x+b, \text{za } 2\le x\le 5; \\ 2^{x-4}-1, \text{za } x>5 \end{cases}$;

x) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x}, \text{za } x<0; \\ a\cdot x+b, \text{za } 0\le x\le 1;; \\ \dfrac{\sin(x-1)}{2\cdot x-2}, \text{za } x>1; \end{cases}$

y) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(\pi\cdot x)}{1-x}, \text{za } x<1; \\ a\cdot x+b, \text{za } 1\le x\le 2; \\ \dfrac{\sqrt{2\cdot x}-2}{x-2}, \text{za } x>2; \end{cases}$

z) $f(x)=\begin{cases} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2\cdot x}, \text{za } x<0; \\ e^{a\cdot x+b}, \text{ za } 0\le x\le 1. \\ \left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^{x-1}, \text{za } x>1; \end{cases}$

3. **a)** Neka je f neprekidna funkcija na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$. Mora li f na tom intervalu imati najmanju, odnosno najveću vrijednost? Obrazložite svoj odgovor.

b) Neka je f neprekidna funkcija na poluotvorenom intervalu $\langle a, b]$. Mora li f na tom intervalu imati najmanju, odnosno najveću vrijednost? Obrazložite svoj odgovor.

NEPREKIDNE FUNKCIJE

c) Neka je f neprekidna funkcija na poluzatvorenom intervalu $[a, b\rangle$. Mora li f na tom intervalu imati najmanju, odnosno najveću vrijednost? Obrazložite svoj odgovor.

4. Grafički odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije f na segmentu $[a, b]$ ako je:

a) $f(x) = x - 1$, $a = 0$, $b = 1$;
b) $f(x) = 1 - x$, $a = 0$, $b = 1$;
c) $f(x) = 2 \cdot x + 1$, $a = -2$, $b = 2$;
d) $f(x) = 1 - 2 \cdot x$, $a = -1$, $b = 1$;
e) $f(x) = |x|$, $a = -1$, $b = 1$;
f) $f(x) = 2 \cdot |x|$, $a = -2$, $b = 1$;
g) $f(x) = |x| + 1$, $a = -2$, $b = 2$;
h) $f(x) = 1 - |x|$, $a = -1$, $b = 2$;
i) $f(x) = |x - 2|$, $a = 1$, $b = 3$;
j) $f(x) = |x - 2| + x$, $a = -1$, $b = 2$;
k) $f(x) = x^2 - 4 \cdot x + 3$, $a = 1$, $b = 4$;
l) $f(x) = -x^2 + 3 \cdot x - 2$, $a = 1$, $b = 4$;
m) $f(x) = 2^x + 1$, $a = 0$, $b = 1$;
n) $f(x) = 1 - 2^x$, $a = -1$, $b = 1$;
o) $f(x) = 3 \cdot 2^{-x} - 2$, $a = -2$, $b = -1$;
p) $f(x) = 1 - e^{-x}$, $a = -1$, $b = 0$;
q) $f(x) = \log x + 1$, $a = 1$, $b = 10$;
r) $f(x) = 1 - \log(x + 1)$, $a = 0$, $b = 9$;
s) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$;
t) $f(x) = -\ln(-x)$, $a = -e^2$, $b = -e$;
u) $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = 4$;
v) $f(x) = \sin(-x)$, $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$.
w) $f(x) = -\sin(2 \cdot x)$, $a = -\pi$, $b = 2 \cdot \pi$;
x) $f(x) = \cos x$, $a = -4$, $b = 0$;
y) $f(x) = -\cos(-2 \cdot x)$, $a = -1$, $b = 5$;
z) $f(x) = -\cos(2 \cdot \pi \cdot x)$, $a = -2$, $b = 2$.

5. Ispitajte ima li funkcija f nultočku u segmentu $[a, b]$ ako je:

a) $f(x) = x^3 - 2 \cdot x - 4$, $a = -2$, $b = -1$;
b) $f(x) = x^3 + 2 \cdot x + 6$, $a = -2$, $b = -1$;
c) $f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 - 5$, $a = 1$, $b = 2$;
d) $f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 - 7$, $a = 2$, $b = 3$;
e) $f(x) = 2 \cdot x^3 + x - 1$, $a = 0$, $b = 1$;
f) $f(x) = 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x - 3$, $a = 1$, $b = 2$;
g) $f(x) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$, $a = 0.5$, $b = 1$;
h) $f(x) = 2 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 5$, $a = 1.5$, $b = 2$;
i) $f(x) = 4 - x - x^3$, $a = 1$, $b = 1.5$;
j) $f(x) = 5 - 5 \cdot x - x^3$, $a = 0.5$, $b = 1$;

NEPREKIDNE FUNKCIJE

k) $f(x) = 1 - 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 - x^3$, $a = 2$, $b = \frac{5}{2}$;

l) $f(x) = 6 - 4 \cdot x + 7 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3$, $a = 3$, $b = \frac{7}{2}$;

m) $f(x) = 9 + 12 \cdot x - 19 \cdot x^2 - 23 \cdot x^3$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$;

n) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2 \cdot x + 1$, $a = -1$, $b = 0$;

o) $f(x) = \ln x + x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$;

p) $f(x) = x^2 - 20 \cdot \ln x$, $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$;

q) $f(x) = x^2 - 20 \cdot \ln x$, $a = 3$, $b = \frac{7}{2}$;

r) $f(x) = \ln(x^3 - 2 \cdot x^2 + 1)$, $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{5}{2}$;

s) $f(x) = \log_2(1 - 3 \cdot x + x^3)$, $a = 2$, $b = 5$;

t) $f(x) = \sin x + \ln x$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$;

u) $f(x) = \cos x - \ln x$, $a = \frac{13}{2}$, $b = 7$;

v) $f(x) = \ln x + \operatorname{arctg} x$, $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$;

w) $f(x) = e^x - \sin x$, $a = -\frac{7}{2}$, $b = -3$;

x) $f(x) = e^x + \cos x$, $a = -2$, $b = -\frac{3}{2}$;

y) $f(x) = e^{2 \cdot x} - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, $a = -7$, $b = -6$;

z) $f(x) = \arcsin x - \arccos x$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$.

6. Zadana je funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ pravilom

$$f(x) = \ln(x^3 - 6 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 2).$$

Pokažite da postoji $x \in [0, 1]$ takav da je $f(x) = x$.

7. Zadane su funkcije $f(x) = \log(x + 1)$ i $g(x) = e^x \cdot \sin x$. Pokažite da postoji $x \in [3, 4]$ takav da je $f(x) = g(x)$.

8. Zadane su funkcije $f(x) = \ln(1 - x)$ i $g(x) = e^x \cdot \cos x$. Pokažite da postoji $x \in [-1, 0]$ takav da je $f(x) = g(x)$.

NEPREKIDNE FUNKCIJE

9. Nađite primjer funkcije neprekidne na segmentu $[0, 2]$ takve da je $f(0) \cdot f(2) > 0$ i da dotična funkcija ima nultočku u navedenom segmentu. Koliko ukupno ima takvih funkcija? (*Naputak*: Traženu funkciju potražite u obliku polinoma drugoga stupnja.)

10. Nađite primjer funkcije neprekidne na segmentu $[0, 2]$ takve da je $f(0) \cdot f(2) > 0$ i da dotična funkcija ima najmanje dvije nultočke u navedenom segmentu. Koliko ukupno ima takvih funkcija? (*Naputak*: Traženu funkciju potražite u obliku polinoma trećega stupnja.)