TVŽ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE — ZAVOD ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE, KATEDRA ZA MATEMATIKU	**Matematika 1** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**16. domaća zadaća**

TANGENTA I NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU.

1. Napišite (u sva tri oblika: eksplicitnom, implicitnom i segmentnom) jednadžbu tangente i jednadžbu normale povučene na graf funkcije f u točki T ako je:

a) $f(x) = x^2,\ T = (1, y_T)$;

b) $f(x) = x^2 + 1,\ T = (x_T > 0,\ 5)$;

c) $f(x) = x^2 + 2 \cdot x - 2,\ T = (x_T < 0,\ 1)$;

d) $f(x) = 2 \cdot x^3 + 1,\ T = (1, y_T)$;

e) $f(x) = x^3 + x^2,\ T = (x_T \neq 0,\ 0)$;

f) $f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2,\ T = (x_T, 16)$;

g) $f(x) = e^x,\ T = (0, y_T)$;

h) $f(x) = e^{-x},\ T = (x_T, e)$;

i) $f(x) = e^{1-x},\ T = (1, y_T)$;

j) $f(x) = e^{-1-x},\ T = \left(x_T, \frac{1}{e^2}\right)$;

k) $f(x) = \ln x,\ T = (1, y_T)$;

l) $f(x) = \ln \frac{x}{2},\ T = (x_T, 1)$;

m) $f(x) = \ln^2 x,\ T = \left(\frac{1}{e}, y_T\right)$;

n) $f(x) = \ln^2(x^2),\ T = (-e, y_T)$;

o) $f(x) = \sin x,\ T = \left(\frac{\pi}{2}, y_T\right)$;

p) $f(x) = \cos x,\ T = \left(\frac{3 \cdot \pi}{2}, y_T\right)$;

q) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ T = \left(\frac{5 \cdot \pi}{4}, y_T\right)$;

r) $f(x) = \operatorname{ctg} x,\ T = \left(\frac{7 \cdot \pi}{4}, y_T\right)$;

s) $f(x) = \arcsin x,\ T = \left(x_T, \frac{\pi}{6}\right)$;

t) $f(x) = \arccos x,\ T = \left(x_T, \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$;

u) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ T = \left(x_T, -\frac{\pi}{4}\right)$;

v) $f(x) = \operatorname{arcctg} x,\ T = \left(x_T, \frac{\pi}{4}\right)$;

w) $f(x) = \operatorname{arsh} x,\ T = (1, y_T)$;

x) $f(x) = \operatorname{arch} x,\ T = (2, y_T)$;

TANGENTA I NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU.

y) $f(x)=\operatorname{arth} x,\ T=\left(\frac{1}{2}, y_T\right)$;

z) $f(x)=\operatorname{arcth} x,\ T=\left(\sqrt{3}, y_T\right)$.

2. Napišite (u sva tri oblika: eksplicitnom, implicitnom i segmentnom) jednadžbu tangente i jednadžbu normale povučene na krivulju K u točki T ako je:

a) $K\ldots\ x^2+y^2=100,\ T=(6, y_T>0)$;

b) $K\ldots\ x^2+y^2=169,\ T=(x_T<0, -12)$;

c) $K\ldots\ x^2+y^2-2\cdot x+4\cdot y-20=0,\ T=(x_T>0,\ 2)$;

d) $K\ldots\ x^2+y^2-4\cdot x+2\cdot y-95=0,\ T=(8,\ y_T<0)$;

e) $K\ldots\ x^2-y^2=9,\ T=(x_T<0,\ 4)$;

f) $K\ldots\ 4\cdot x^2-9\cdot y^2=36,\ T=(-3.75,\ y_T>0)$;

g) $K\ldots\ 9\cdot x^2-16\cdot y^2=144,\ T=\left(\frac{20}{3},\ y_T<0\right)$;

h) $K\ldots\ 4\cdot x^2+25\cdot y^2=100,\ T=(x_T>0, -1.6)$;

i) $K\ldots\ 169\cdot x^2+4\cdot y^2=676,\ T=(x_T<0, -5)$;

j) $K\ldots\ y^2-4\cdot x=5,\ T=(1,\ y>0)$;

k) $K\ldots\ y^2+4\cdot x+4=0,\ T=(-5,\ y<0)$;

l) $K\ldots\ x^2+x\cdot y+y^2=13,\ T=(x>0,\ 1)$;

m) $K\ldots\ x^2-x\cdot y-y^2=1,\ T=(2, y<0)$;

n) $K\ldots\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=5,\ T=(x>0,\ 8)$;

o) $K\ldots\ e^x\cdot y+x\cdot e^y=1,\ T=(1,0)$;

p) $K\ldots\ x\cdot e^{x-y}+(x-y)\cdot e^{x+y}+e=0,\ T=(0,1)$;

q) $K\ldots\ x^3+y^3-3\cdot x\cdot y=0,\ T=(1.5,\ 1.5)$;

r) $K\ldots\ y^2=\frac{x^3}{1-x},\ T=(0.5,\ y<0)$;

s) $K\ldots\ y^2=x^2\cdot\frac{1+x}{1-x},\ T=\left(-\frac{1}{3},\ y>0\right)$;

t) $K\ldots\ (x^2+y^2)^2=4\cdot(x^2-y^2),\ T=(-2, y)$;

u) $K\ldots\ x\cdot\ln y+y\cdot\ln x=1,\ T=(1,e)$;

v) $K\ldots\ y\cdot e^{\frac{y}{x}}+x\cdot e^{\frac{x}{y}}=2\cdot e,\ T=(1,1)$;

w) $K\ldots\ x\cdot\sin y+y^2\cdot\sin x=0,\ T=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$;

x) $K\ldots\ x^2\cdot\cos y+2\cdot y\cdot\cos x=\pi,\ T=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

y) $K\ldots\ x\cdot\arcsin y+y^2\cdot\arcsin x=0,\ T=(0,\ 0.5)$;

TANGENTA I NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU.

z) $K \ldots \operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\operatorname{arcctg}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2},\ T=(1,1)$.

3. Odredite kut između sljedećih ravninskih krivulja, pa ga najprije izrazite u radijanima, a potom u obliku $x°y'z''$ ako je:

a) $y = x^2$, $y = 2 \cdot x^3$;
b) $y = x^2$, $y^2 = x$;
c) $y = \sqrt{x}$, $y = x$;
d) $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = \sqrt{x}$;
e) $y = \sin x$, $y = \cos x$;
f) $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$;
g) $y = \sin x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
h) $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$;
i) $y = \cos x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
j) $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
k) $y = e^x$, $x = 0$;
l) $y = e^x$, $y = 1$;
m) $y = e^{1-x^2}$, $y = e$;
n) $y = e^{x^2-1}$, $x = 1$;
o) $y = \ln x$, $x = e$;
p) $y = \ln x$, $y = 0$;
q) $y = \ln x$, $y = 1$;
r) $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$;
s) $y = \sin x$, $y = -1$;
t) $y = \cos x$, $x = 0$;
u) $y = \cos x$, $y = 0$;
v) $y = \operatorname{tg} x$, $x = \frac{\pi}{4}$;
w) $y = \operatorname{tg} x$, $y = -1$;
x) $y = \operatorname{ctg} x$, $x = \frac{3\cdot\pi}{4}$;
y) $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sqrt{3}$;
z) $xy = 4$, $x^2 - y^2 = 9$.

4. Odredite sve točke ravninske krivulje $y = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x$ u kojima je tangenta povučena na tu krivulju usporedna s osi apscisa. Napišite jednadžbe tih tangenata i njima odgovarajućih normala.

5. Odredite sve točke ravninske krivulje $y = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 25$ u kojima je tangenta povučena na tu krivulju usporedna s pravcem $2 \cdot x - y + 6 = 0$. Napišite jednadžbe tih tangenata i njima odgovarajućih normala.

TANGENTA I NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU.

6. Odredite sve točke ravninske krivulje $y = 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x$ u kojima je normala povučena na tu krivulju usporedna s pravcem $x + 36 \cdot y - 72 = 0$. Napišite jednadžbe tih normala i njima odgovarajućih tangenata.

7. U točki $T = (2, y_T)$ ravninske krivulje $x \cdot y = 16$ povučena je tangenta na krivulju. Izračunajte površinu trokuta kojega ta tangenta zatvara s objema koordinatnim osima, pa pokažite da se središte tom trokutu opisane kružnice podudara s točkom T.

8. U točki $T = (1, y_T > 0)$ ravninske krivulje $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 4$ povučena je tangenta na krivulju. Napišite jednadžbu te tangente u segmentnom obliku, pa izračunajte duljinu odsječka kojega ta tangenta odsijeca između obiju koordinatnih osi.

9. U točki $T = (x_T, 2)$ ravninske krivulje $x \cdot y = 16$ povučena je tangenta na krivulju. Pokažite da je duljina te tangente jednaka udaljenosti točke T od ishodišta koordinatnoga sustava.

10. U točki $T = (10, y_T > 0)$ ravninske krivulje $y^2 - x^2 = 36$ povučena je normala na krivulju. Pokažite da je točka T središte kružnice opisane trokutu kojega ta normala zatvara s objema koordinatnim osima.

11. U točki $T = (3, y_T > 0)$ ravninske krivulje $x - 3 \cdot y^2 = 0$ povučena je tangenta na krivulju. Pokažite da je sjecište te tangente s osi ordinata ujedno i polovište dužine čiji su krajevi točka T i sjecište iste tangente s osi apscisa.

12. U točki $T = (2, y_T)$ ravninske krivulje $y = \sqrt{4 - x^2} + 2 \cdot \ln \dfrac{x}{2 + \sqrt{4 - x^2}}$ povučena je tangenta na krivulju. Neka je S sjecište te tangente i osi ordinata. Izračunajte duljinu dužine $\overline{TS}$.

13. U točki $T = (x_T > 0, 4)$ ravninske krivulje zadane jednadžbom $x^2 - 2 \cdot y - 1 = 0$ povučena je normala na krivulju. Neka je S sjecište te normale i osi ordinata, a O ishodište koordinatnoga sustava. Pokažite da vrijedi jednakost $|OS| = |OT|$.

14. U točki $T = (1, y_T)$ ravninske krivulje $y = 2 \cdot x - x \cdot \ln x$ povučena je tangenta. Izračunajte duljinu odsječka kojega ta tangenta odsijeca na osi ordinata.

15. U točki $T = (-2, y_T < 0)$ ravninske krivulje zadane jednadžbom $y^2 + y + x = 0$ povučena je tangenta na krivulju. Izračunajte duljinu odsječka kojega ta tangenta odsijeca na osi apscisa.

16. U točki $T = (-1, y_T > 0)$ ravninske krivulje zadane jednadžbom $x^2 + 2 \cdot x + y^2 = 0$ povučena je tangenta na krivulju. Izračunajte opseg trokuta kojega ta tangenta zatvara s koordinatnim osima.

17. U točki $T = (2, y_T)$ ravninske krivulje zadane jednadžbom $y = x + 2 + \sqrt{2 \cdot x}$ povučena je tangenta na krivulju. Izračunajte zbroj duljina odsječaka koje ta tangenta odsijeca na objema koordinatnim osima.

TANGENTA I NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU.

18. U točki $T = (x_T > 0, 3)$ ravninske krivulje zadane jednadžbom $x^2 + y^2 - 6 \cdot y = 0$ povučena je tangenta na krivulju. Neka je S sjecište te tangente s osi apscisa. Izračunajte duljinu dužine $\overline{ST}$.

19. U točki $T = (-1, y_T > 0)$ ravninske krivulje $y^2 = -16 \cdot x$ povučena je tangenta na krivulju. Pokažite da polovište odsječka kojega ta tangenta odsijeca između obiju koordinatnih osi pripada krivulji $y^2 = 2 \cdot x$.

20. U točki $T = (-2, y_T < 0)$ ravninske krivulje $y^2 = 8 - 4 \cdot x$ povučene su tangenta i normala na krivulju. Odredite polovište odsječka kojega ta dva pravca odsijecaju na osi apscisa.

21. Pod kojim se kutom sijeku tangente na krivulju $y = x^4$ povučene iz točke $T = (2, 0)$?

22. Zadana je krivulja $y = \dfrac{3 \cdot x^2 + 1}{x^2 + 3}$. U točkama krivulje čija je ordinata jednaka 1 povučene su tangente na krivulju. Izračunajte površinu lika kojemu su vrhovi navedene točke krivulje i sva moguća sjecišta povučenih tangenata.

23. Zadana je krivulja $y = \ln\left(\dfrac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{2 - \sqrt{4 - x^2}}\right) - \sqrt{4 - x^2}$. U bilo kojoj točki T te krivulje povučena je tangenta na krivulju. Neka je S sjecište te tangente i osi ordinata. Izračunajte duljinu dužine $\overline{ST}$.

24. Pod kojim se kutom sijeku tangente povučene na krivulju $x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y - 4 = 0$ povučene iz točke $(4, 4)$?

25. Odredite kut između krivulja $y^2 = 4 \cdot x + 4$ i $y^2 = -12 \cdot x + 36$.

26. Nađite najmanji $n \in \mathbb{N}$ za koji krivulja $y = \operatorname{arctg}(n \cdot x)$ siječe os apscisa pod kutem strogo većim od $88°$.

27. Odredite parametar $a \in \mathbb{R}$ tako da krivulja $y = \ln x$ dodiruje krivulju $y = a \cdot x^2$. (*Napomena*: Krivulje se *dodiruju* u točki T ako u toj točki imaju zajedničku tangentu.)

28. Odredite zajedničke tangente krivulja $y = x^2 - 6 \cdot x + 5$ i $y = -x^2 - 4 \cdot x$.

29. Odredite točku krivulje $(x^2 + 1) \cdot y = 1$ u kojoj je tangenta usporedna s osi apscisa.

30. Zadana je krivulja $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

a) Napišite jednadžbu tangente na zadanu krivulju u točki čija je apscisa 1.

b) Kojemu pravcu se približava tangenta krivulje ako prva koordinata dirališta tangente teži u $+\infty$? Obrazložite svoj odgovor.