



MATEMATIKA 1

17. domaća zadaća: TANGENTA I NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU

1. Napišite (u sva tri oblika: eksplicitnom, implicitnom i segmentnom) jednadžbu tangente i jednadžbu normale povučene na graf funkcije f u točki T , te izračunajte njihove duljine (s točnošću od 10^{-5}) ako je:

- a) $f(x) = x^2$, $T = (1, y_T)$;
- b) $f(x) = x^2 + 1$, $T = (x_T > 0, 5)$;
- c) $f(x) = x^2 + 2 \cdot x - 2$, $T = (x_T < 0, 1)$;
- d) $f(x) = 2 \cdot x^3 + 1$, $T = (1, y_T)$;
- e) $f(x) = x^3 + x^2$, $T = (x_T \neq 0, 0)$;
- f) $f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2$, $T = (x_T, 16)$;
- g) $f(x) = e^x$, $T = (0, y_T)$;
- h) $f(x) = e^{-x}$, $T = (x_T, e)$;
- i) $f(x) = e^{1-x}$, $T = (1, y_T)$;
- j) $f(x) = e^{-1-x}$, $T = \left(x_T, \frac{1}{e^2}\right)$;
- k) $f(x) = \ln x$, $T = (1, y_T)$;
- l) $f(x) = \ln \frac{x}{2}$, $T = (x_T, 1)$;
- m) $f(x) = \ln^2 x$, $T = \left(\frac{1}{e}, y_T\right)$;
- n) $f(x) = \ln^2(x^2)$, $T = (-e, y_T)$;
- o) $f(x) = \sin x$, $T = \left(\frac{\pi}{2}, y_T\right)$;
- p) $f(x) = \cos x$, $T = \left(\frac{3 \cdot \pi}{2}, y_T\right)$;
- q) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $T = \left(\frac{5 \cdot \pi}{4}, y_T\right)$;
- r) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $T = \left(\frac{7 \cdot \pi}{4}, y_T\right)$;
- s) $f(x) = \arcsin x$, $T = \left(x_T, \frac{\pi}{6}\right)$;
- t) $f(x) = \arccos x$, $T = \left(x_T, \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

17. domaća zadaća: **TANGENTA I NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU**

u) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $T = \left(x_T, -\frac{\pi}{4}\right)$;

v) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $T = \left(x_T, \frac{\pi}{4}\right)$;

w) $f(x) = \operatorname{arsh} x$, $T = (1, y_T)$;

x) $f(x) = \operatorname{arch} x$, $T = (2, y_T)$;

y) $f(x) = \operatorname{arth} x$, $T = \left(\frac{1}{2}, y_T\right)$;

z) $f(x) = \operatorname{arcth} x$, $T = (\sqrt{3}, y_T)$.

2. Napišite (u sva tri oblika: eksplicitnom, implicitnom i segmentnom) jednadžbu tangente i jednadžbu normale povučene na krivulju K u točki T , pa izračunajte njihove duljine (s točnošću od 10^{-5}) ako je:

a) $K \dots x^2 + y^2 = 100$, $T = (6, y_T > 0)$;

b) $K \dots x^2 + y^2 = 169$, $T = (x_T < 0, -12)$;

c) $K \dots x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y - 20 = 0$, $T = (x_T > 0, 2)$;

d) $K \dots x^2 + y^2 - 4 \cdot x + 2 \cdot y - 95 = 0$, $T = (8, y_T < 0)$;

e) $K \dots x^2 - y^2 = 9$, $T = (x_T < 0, 4)$;

f) $K \dots 4 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 = 36$, $T = \left(-\frac{15}{4}, y_T > 0\right)$;

g) $K \dots 9 \cdot x^2 - 16 \cdot y^2 = 144$, $T = \left(\frac{20}{3}, y_T < 0\right)$;

h) $K \dots 4 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 100$, $T = \left(x_T > 0, -\frac{8}{5}\right)$;

i) $K \dots 169 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 676$, $T = (x_T < 0, -5)$;

j) $K \dots y^2 - 4 \cdot x = 5$, $T = (1, y > 0)$;

k) $K \dots y^2 + 4 \cdot x + 4 = 0$, $T = (-5, y < 0)$;

l) $K \dots x^2 + x \cdot y + y^2 = 13$, $T = (x > 0, 1)$;

m) $K \dots x^2 - x \cdot y - y^2 = 1$, $T = (2, y < 0)$;

n) $K \dots \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5$, $T = (x > 0, 8)$;

o) $K \dots e^x \cdot y + x \cdot e^y = 1$, $T = (1, 0)$;



MATEMATIKA 1

17. domaća zadaća: **TANGENTA I NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU**

p) $K... x \cdot e^{x-y} + (x-y) \cdot e^{x+y} + e = 0, T = (0,1);$

q) $K... x^3 + y^3 - 3 \cdot x \cdot y = 0, T = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right);$

r) $K... y^2 = \frac{x^3}{1-x}, T = \left(\frac{1}{2}, y < 0\right);$

s) $K... y^2 = x^2 \cdot \frac{1+x}{1-x}, T = \left(-\frac{1}{3}, y > 0\right);$

t) $K... (x^2 + y^2)^2 = 4 \cdot (x^2 - y^2), T = (-2, y);$

u) $K... x \cdot \ln y + y \cdot \ln x = 1, T = (1, e);$

v) $K... y \cdot e^{\frac{y}{x}} + x \cdot e^{\frac{x}{y}} = 2 \cdot e, T = (1,1);$

w) $K... x \cdot \sin y + y^2 \cdot \sin x = 0, T = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right);$

x) $K... x^2 \cdot \cos y + 2 \cdot y \cdot \cos x = \pi, T = \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

y) $K... x \cdot \arcsin y + y^2 \cdot \arcsin x = 0, T = \left(0, \frac{1}{2}\right);$

z) $K... \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}, T = (1,1).$

3. Odredite kut između sljedećih ravninskih krivulja, pa ga najprije izrazite u radijanima, a potom u obliku $x^\circ y' z''$ ako je:

a) $y = x^2, y = 2 \cdot x^3;$

b) $y = x^2, y^2 = x;$

c) $y = \sqrt{x}, y = x;$

d) $y = \sqrt[3]{x^2}, y = \sqrt{x};$

e) $y = \sin x, y = \cos x;$

f) $y = \sin x, y = \operatorname{tg} x;$

g) $y = \sin x, y = \operatorname{ctg} x;$

h) $y = \cos x, y = \operatorname{tg} x;$

i) $y = \cos x, y = \operatorname{ctg} x;$

j) $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x;$

k) $y = e^x, x = 0;$

l) $y = e^x, y = 1;$

m) $y = e^{1-x^2}, y = e;$



MATEMATIKA 1

17. domaća zadaća: **TANGENTA I NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU**

n) $y = e^{x^2-1}$, $x = 1$;

o) $y = \ln x$, $x = e$;

p) $y = \ln x$, $y = 0$;

q) $y = \ln x$, $y = 1$;

r) $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$;

s) $y = \sin x$, $y = -1$;

t) $y = \cos x$, $x = 0$;

u) $y = \cos x$, $y = 0$;

v) $y = \operatorname{tg} x$, $x = \frac{\pi}{4}$;

w) $y = \operatorname{tg} x$, $y = -1$;

x) $y = \operatorname{ctg} x$, $x = \frac{3 \cdot \pi}{4}$;

y) $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sqrt{3}$;

z) $xy = 4$, $x^2 - y^2 = 9$.

4. Odredite sve točke ravninske krivulje $y = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x$ u kojima je tangenta povučena na tu krivulju usporedna s osi apscisa. Napišite jednadžbe tih tangenata i njima odgovarajućih normala.
5. Odredite sve točke ravninske krivulje $y = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 25$ u kojima je tangenta povučena na tu krivulju usporedna s pravcem $2 \cdot x - y + 6 = 0$. Napišite jednadžbe tih tangenata i njima odgovarajućih normala, pa izračunajte njihove duljine.
6. Odredite sve točke ravninske krivulje $y = 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x$ u kojima je normala povučena na tu krivulju usporedna s pravcem $x + 36 \cdot y - 72 = 0$. Napišite jednadžbe tih normala i njima odgovarajućih tangenata, pa izračunajte njihove duljine.
7. U točki $T = (2, y_T)$ ravninske krivulje $x \cdot y = 16$ povučena je tangenta na krivulju. Izračunajte površinu trokuta kojega ta tangenta zatvara s objema koordinatnim osima, pa pokažite da se središte tom trokutu opisane kružnice podudara s točkom T .
8. U točki $T = (1, y_T > 0)$ ravninske krivulje $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 4$ povučena je tangenta na krivulju. Napišite jednadžbu te tangente u segmentnom obliku, pa izračunajte duljinu odsječka kojega ta tangenta odsijeca između obiju koordinatnih osi.
9. U točki $T = (x_T, 2)$ ravninske krivulje $x \cdot y = 16$ povučena je tangenta na krivulju. Pokažite da je duljina te tangente jednaka udaljenosti točke T od ishodišta koordinatnoga sustava.



MATEMATIKA 1

17. domaća zadaća: TANGENTA I NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU

10. U točki $T = (10, y_T > 0)$ ravninske krivulje $y^2 - x^2 = 36$ povučena je normala na krivulju. Pokažite da je točka T središte kružnice opisane trokutu kojega ta normala zatvara s objema koordinatnim osima.
11. U točki $T = (3, y_T > 0)$ ravninske krivulje $x - 3 \cdot y^2 = 0$ povučena je tangenta na krivulju. Pokažite da je sjecište te tangente s osi ordinata ujedno i polovište dužine čiji su krajevi točka T i sjecište iste tangente s osi apscisa.
12. U točki $T = (2, y_T)$ ravninske krivulje $y = \sqrt{4 - x^2} + 2 \cdot \ln \frac{x}{2 + \sqrt{4 - x^2}}$ povučena je tangenta na krivulju. Neka je S sjecište te tangente i osi ordinata. Izračunajte duljinu dužine \overline{TS} .
13. U točki $T = (x_T > 0, 4)$ ravninske krivulje zadane jednadžbom $x^2 - 2 \cdot y - 1 = 0$ povučena je normala na krivulju. Neka je S sjecište te normale i osi ordinata, a O ishodište koordinatnoga sustava. Pokažite da vrijedi jednakost $|OS| = |OT|$.
14. U točki $T = (1, y_T)$ ravninske krivulje $y = 2 \cdot x - x \cdot \ln x$ povučena je tangenta. Izračunajte duljinu odsječka kojega ta tangenta odsijeca na osi ordinata.
15. U točki $T = (-2, y_T < 0)$ ravninske krivulje zadane jednadžbom $y^2 + y + x = 0$ povučena je tangenta na krivulju. Izračunajte duljinu odsječka kojega ta tangenta odsijeca na osi apscisa.
16. U točki $T = (-1, y_T > 0)$ ravninske krivulje zadane jednadžbom $x^2 + 2 \cdot x + y^2 = 0$ povučena je tangenta na krivulju. Izračunajte opseg trokuta kojega ta tangenta zatvara s koordinatnim osima.
17. U točki $T = (2, y_T)$ ravninske krivulje zadane jednadžbom $y = x + 2 + \sqrt{2 \cdot x}$ povučena je tangenta na krivulju. Izračunajte zbroj duljina odsječaka koje ta tangenta odsijeca na objema koordinatnim osima.
18. U točki $T = (x_T > 0, 3)$ ravninske krivulje zadane jednadžbom $x^2 + y^2 - 6 \cdot y = 0$ povučena je tangenta na krivulju. Izračunajte duljinu te tangente.
19. U točki $T = (-1, y_T > 0)$ ravninske krivulje $y^2 = -16 \cdot x$ povučena je tangenta na krivulju. Pokažite da polovište odsječka kojega ta tangenta odsijeca između obiju koordinatnih osi pripada krivulji $y^2 = 2 \cdot x$.
20. U točki $T = (-2, y_T < 0)$ ravninske krivulje $y^2 = 8 - 4 \cdot x$ povučene su tangenta i normala na krivulju. Odredite polovište odsječka kojega ta dva pravca odsijecaju na osi apscisa.