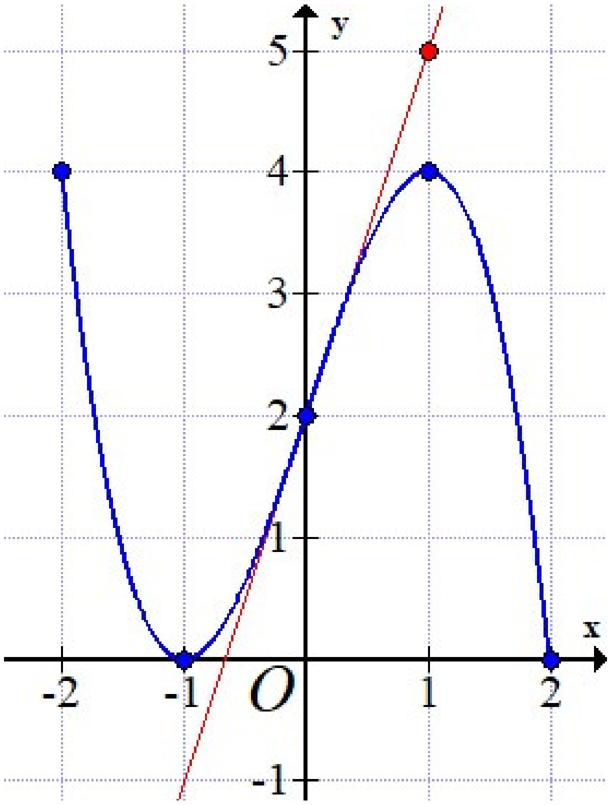
1. Na slici 1. prikazani su graf funkcije f na segmentu $[-2, 2]$ i tangenta povučena na taj graf u točki $(0, 2)$.



Slika 1.

a) Izračunajte $f'(0)+f'(1)$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: **a)** Iz slike 1. se vidi da je $(1,4)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije f. Prema Fermatovu teoremu slijedi:

$$f'(1)=0.$$

$f'(0)$ je koeficijent smjera tangente t povučene u točki $(0,2)$. Iz slike 1. se vidi da ta tangenta prolazi točkama $(0,2)$ i $(1,5)$, pa je njezin koeficijent smjera:

$$k_t=\frac{5-2}{1-0}=\frac{3}{1}=3.$$

Zbog toga je

$$f'(0)=3.$$

Tako konačno dobivamo:

$$f'(0)+f'(1)=0+3=3.$$

b) Izračunajte površinu trokuta kojega s objema koordinatnim osima zatvara **normala** povučena na graf funkcije f u točki $(0,2)$.

Rješenje: Koeficijent smjera normale n povučene u točki $(0,2)$ je suprotan i recipročan u odnosu na koeficijent smjera tangente t. Koristeći dio rješenja **a)** podzadatka dobivamo:

$$k_n = \frac{-1}{k_t} = \frac{-1}{3}.$$

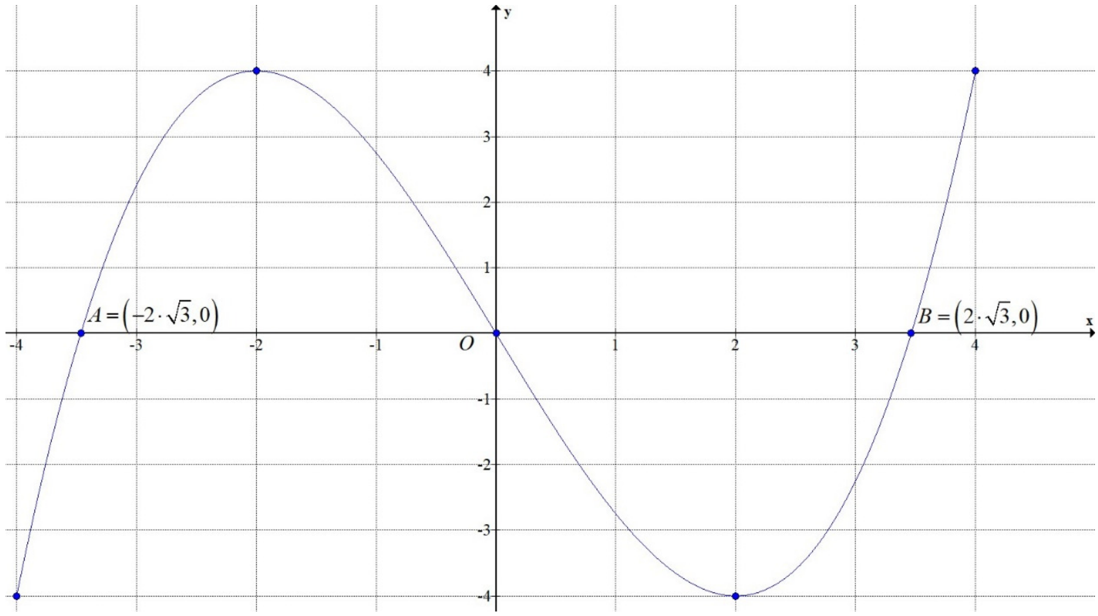
Dakle, normala n ima koeficijent smjera jednak $\frac{-1}{3}$ i prolazi točkom $(0,2)$. Odredimo njezinu jednadžbu zapisanu u segmentnom obliku. Imamo redom:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}\cdot x + 2, \\ \frac{1}{3}\cdot x + y &= 2, \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$\begin{aligned} P &= \frac{|6|\cdot|2|}{2} = \\ &= \frac{6\cdot 2}{2} = \\ &= 6 \text{ kv. jed.} \end{aligned}$$

2. Na slici 2. prikazan je graf **prve derivacije** polinoma $p:[-4,4]\to[-4,4]$.



Slika 2.

Odredite (i precizno obrazložite svoje tvrdnje):

a) **skup** svih $x\in[-4,4]$ za koje polinom p ima **lokalni ekstrem**;

Rješenje: Lokalni ekstremi polinoma p su sve nultočke polinoma p' takve da polinom p' mijenja predznak pri prolazu kroz te točke. Iz slike vidimo:

- Pri prolazu kroz točku $x_1=-2\cdot\sqrt{3}$ polinom p' mijenja predznak iz negativnoga u pozitivan. To znači da za $x_1=-2\cdot\sqrt{3}$ polinom p ima lokalni minimum.
- Pri prolazu kroz točku $x_2=0$ polinom p' mijenja predznak iz pozitivnoga u negativan. To znači da za $x_2=0$ polinom p ima lokalni maksimum.
- Pri prolazu kroz točku $x_3=2\cdot\sqrt{3}$ polinom p' mijenja predznak iz negativnoga u pozitivan. To znači da za $x_3=2\cdot\sqrt{3}$ polinom p ima lokalni minimum.

Dakle, traženi je skup $S=\left\{-2\cdot\sqrt{3},0,2\cdot\sqrt{3}\right\}$.

b) vrijednost $x \in \langle -4, 4 \rangle$ za koju polinom p **najbrže raste**;

Rješenje: Vrijednost $x \in \langle -4, 4 \rangle$ za koju polinom p najbrže raste jednaka je apscisi točke **globalnoga** maksimuma polinoma p' na zadanom intervalu. (**Oprez: Nije ispravno** zaključiti da je ta apscisa jednaka apscisi točke **lokalnoga** maksimuma polinoma p' jer lokalni maksimum ne mora biti i globalni.) Iz slike vidimo da je $T_1 = (-2, 4)$ točka globalnoga maksimuma polinoma p'. Zbog toga je $x = -2$.

c) vrijednost $x \in \langle -4, 4 \rangle$ za koju polinom p **najsporije pada**.

Rješenje: Vrijednost $x \in \langle -4, 4 \rangle$ za koju polinom p najsporije pada jednaka je apscisi točke **globalnoga** minimuma polinoma p' na zadanom intervalu. (**Oprez: Nije ispravno** zaključiti da je ta vrijednost jednaka apscisi točke **lokalnoga** minimuma polinoma p' jer lokalni minimum ne mora biti i globalni.) Iz slike vidimo da je $T_2 = (2, -4)$ točka globalnoga minimuma polinoma p'. Zbog toga je $x = 2$.

3. Nađite sve globalne ekstreme funkcije $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$ definirane pravilom $f(x)=x^4-8\cdot x^2$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Najprije odredimo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cdot x^3-8\cdot 2\cdot x = \\ &= 4\cdot x\cdot\left(x^2-4\right). \end{aligned}$$

Iz jednadžbe $f'(x)=0$ slijedi

$$x\cdot\left(x^2-4\right)=0,$$

a odatle je $x_1=-2,\ x_2=0$ i $x_3=2.$

Preostaje izračunati vrijednosti funkcije f u rubnim točkama segmenta (domene), te u svim trima stacionarnim točkama. Primijetimo da je funkcija f parna na $D(f)=[-3,3]$, što znači da vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} &f(-3)=f(3) \text{ i} \\ &f(-2)=f(2). \end{aligned}$$

Tako imamo:

$$\begin{aligned} &f(-3)=f(3)=3^4-8\cdot 3^2=81-72=9, \\ &f(-2)=f(2)=2^4-8\cdot 2^2=16-32=-16, \\ &f(0)=0^4-8\cdot 0^2=0-0=0. \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo:

f ima globalni minimum -16. On se postiže za $x=-2$ i za $x=2$. (Kraće možemo reći da su točke globalnoga minimuma $T_1=(-2,-16)$ i $T_2=(2,-16)$.)

f ima globalni maksimum 9. On se postiže za $x=-3$ i za $x=3$. (Kraće možemo reći da su točke globalnoga maksimuma $T_3=(-3,9)$ i $T_2=(3,9)$.)

4. Polinom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiran je pravilom $p(x) = x^4 - 4 \cdot x^3 + 16$. Odredite **sve točke lokalnih ekstrema** i **sve točke pregiba** grafa toga polinoma.

Rješenje: Najprije odredimo:

$$p'(x) = 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2,$$
$$p''(x) = 12 \cdot x^2 - 24 \cdot x.$$

Iz jednadžbe $p'(x) = 0$ slijedi

$$x^2 \cdot (x - 3) = 0,$$

a odatle su $x_1 = 0,\ x_2 = 3$.

Uočimo da je predznak vrijednosti p' jednak predznaku vrijednosti izraza $x - 3$. Izraz $x - 3$ je strogo negativan kad god je $x < 3$, a strogo pozitivan kad god je $x > 3$. Zbog toga p' *ne mijenja predznak* pri prolazu kroz točku s apscisom $x = 0$, pa točka $(0, p(0))$ *nije* točka lokalnoga ekstrema polinoma *p*. Nasuprot tome, točka $(3, p(3)) = (3, -11)$ je točka lokalnoga minimuma polinoma *p*.

Nadalje, iz

$$p''(x) = 0$$

slijedi

$$x \cdot (x - 2) = 0,$$

a odatle su $x_1 = 0,\ x_3 = 2$.

Lako vidimo da su npr.

$$p''(-1) > 0,\ p''(1) < 0 \ \text{ i } \ p''(3) > 0,$$

pa zaključujemo da su $(0, p(0)) = (0, 16)$ i $(2, p(2)) = (2, 0)$ točke pregiba grafa polinoma *p*.

5. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. **Točka pregiba grafa** funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definirane pravilom

$$f(x) = \frac{a \cdot x + b}{x^2}$$

je $T = (3, 16)$. Odredite **sve intervale monotonosti i sve točke lokalnih ekstrema** zadane funkcije. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Iz podatka da točka T pripada grafu funkcije f zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$f(3) = 16.$$

U pravilo funkcije f uvrstimo $x = 3,\ f(3) = 16,$ pa dobijemo:

$$\frac{3 \cdot a + b}{3^2} = 16, \quad / \cdot 3^2$$
$$3 \cdot a + b = 144.$$

Nadalje, T je točka pregiba proizvoljno mnogo puta derivabilne funkcije f. Zbog toga vrijednost druge derivacije te funkcije za $x = 3$ mora biti jednaka nuli.

Primjenom pravila za deriviranje količnika odredimo:

$$f'(x) = \frac{-a \cdot x - 2 \cdot b}{x^3},$$
$$f''(x) = \frac{2 \cdot a \cdot x + 6 \cdot b}{x^4}.$$

Uvrštavanjem $x = 3,\ f''(3) = 0$ u pravilo funkcije f'' dobijemo:

$$\frac{2 \cdot a \cdot 3 + 6 \cdot b}{3^4} = 0,$$
$$6 \cdot a + 6 \cdot b = 0, \quad / : 6$$
$$a + b = 0.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 3 \cdot a + b = 144, \\ a + b = 0. \end{cases}$$

Njegovo je rješenje

$$(a, b) = (72, -72).$$

Zbog toga su:

$$f(x) = \frac{72 \cdot x - 72}{x^2} = \\ = 72 \cdot \frac{x-1}{x^2},$$

$$f'(x) = \frac{-72 \cdot x + 144}{x^2} = \\ = (-72) \cdot \frac{x-2}{x^2}.$$

Iz jednadžbe $f'(x) = 0$ odmah slijedi da je stacionarna točka zadane funkcije $x = 2$. Sastavimo tablicu.

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$		$+$		$-$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Odatle zaključujemo da f strogo raste na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, 2\rangle$, a strogo pada na intervalu $\langle 2, +\infty\rangle$. Točka $T_1 = (2, f(2)) = (2, 18)$ je jedina točka lokalnoga ekstrema funkcije f i ona je ujedno i točka lokalnoga maksimuma te funkcije.

6. Odredite prirodnu domenu, sve intervale monotonosti, sve lokalne ekstreme i sve asimptote na graf funkcije

a) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$;

Rješenje: Iz uvjeta $x \neq 0$ slijedi $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Prva derivacija funkcije f je:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}.$$

Iz jednadžbe

$$f'(x) = 0$$

slijedi $x^2 = 4$. Odavde su $x_1 = -2,\ x_2 = 2.$

Sastavimo tablicu.

$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
p'	$+$		$-$		$-$		$-$	
p	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Primijetimo da je f neparna, a f' parna funkcija na $D(f)$.

Izračunamo

$$f'(-4) = f'(4) = 0.75 > 0.$$

Dakle, f strogo raste na intervalima $\langle -\infty, -2 \rangle$ i $\langle 2, +\infty \rangle$.

Izračunamo

$$f'(-1) = f'(1) = -3 < 0.$$

Dakle, f strogo pada na intervalima $\langle -2, 0 \rangle$ i $\langle 0, 2 \rangle$.

Prema tome, intervali rasta su $\langle -\infty, -2 \rangle$ i $\langle 2, +\infty \rangle$, a intervali pada $\langle -2, 0 \rangle$ i $\langle 0, 2 \rangle$.

Nadalje,

$$T_1 = (-2, f(-2)) = (-2, -4)$$

je točka lokalnoga maksimuma, dok je

$$T_2 = (2, f(2)) = (2, 4)$$

točka lokalnoga minimuma funkcije f.

Naposljetku, odredimo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0-}\left(x+\frac{4}{x}\right) = -\infty, \\
&\lim_{x\to 0+}\left(x+\frac{4}{x}\right) = +\infty, \\
&k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \\
&\quad = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right) = \\
&\quad = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to\infty}(f(x) - k\cdot x) = \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{4}{x}-x\right) = \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x}\right) = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pa zaključujemo da su asimptote na graf zadane funkcije pravci

$$x = 0 \text{ i } y = x.$$

b) $g(u)=\dfrac{4\cdot u+1}{e^{4\cdot u}}$.

Rješenje: Budući da vrijedi nejednakost

$$e^{4\cdot u}>0,\ \forall u\in\mathbb{R},$$

nemamo nikakvih uvjeta na vrijednost varijable *u*. Zbog toga je $D(g)=\mathbb{R}$.

Prva derivacija funkcije *g* je:

$$\begin{aligned} g'(u)&=\frac{4\cdot e^{4\cdot u}-(4\cdot u+1)\cdot 4\cdot e^{4\cdot u}}{\left(e^{4\cdot u}\right)^2}= \\ &=\frac{e^{4\cdot u}(4-(4\cdot u+1)\cdot 4)}{\left(e^{4\cdot u}\right)^2}= \\ &=\frac{(-16)}{e^{4\cdot u}}\cdot u. \end{aligned}$$

Iz jednadžbe $g'(u)=0$ odmah slijedi $u=0$.

Zbog toga promatramo ponašanje funkcije *g* na intervalima $\langle-\infty,0\rangle$ i $\langle 0,+\infty\rangle$. Sastavimo tablicu.

	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	+		−
g	↗		↘

Primijetimo da je, zbog nejednakosti

$$\frac{-16}{e^{4\cdot u}}<0,\forall u\in\mathbb{R},$$

predznak funkcije g' suprotan predznaku varijable *u*.

Odaberemo $u=-1$. Tada je

$$g'(-1)>0,$$

pa *g* strogo raste na intervalu $\langle-\infty,0\rangle$.

Odaberemo $u=1$. Tada je

$$g'(1) < 0,$$

pa g pada na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$.

Odatle zaključujemo da je $T = (0, g(0)) = (0,1)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije g.

Budući da je $D(g) = \mathbb{R}$, graf funkcije g nema nijednu uspravnu asimptotu. Međutim, vrijede jednakosti:

$$\lim_{u \to -\infty} g(u) = \lim_{u \to -\infty} \left((4 \cdot u + 1) \cdot e^{-4 \cdot u} \right) = \{ -\infty \cdot (+\infty) \} = -\infty,$$

$$\begin{aligned} \lim_{u \to +\infty} g(u) &= \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{4 \cdot u + 1}{e^{4 \cdot u}} \right) = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \\ &= \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{4}{4 \cdot e^{4 \cdot u}} \right) = \\ &= \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{1}{e^{4 \cdot u}} \right) = \\ &= 0, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da graf funkcije g ima desnu vodoravnu asimptotu $y = 0$.

7. Potencijalna energija čestice u električnom polju dana je izrazom

$$U(r)=\frac{1}{2\cdot r^2}-\frac{3}{r},$$

gdje je r udaljenost čestice od središta polja. Odredite najveću moguću vrijednost privlačne sile F u tom polju.

(*Uputa*: Primijenite jednakost $F=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$.)

Rješenje: Prva derivacija funkcije U je

$$\begin{aligned}F(r)&=U'(r)=\\&=\left(\frac{1}{2}\cdot r^{-2}-3\cdot r^{-1}\right)'=\\&=-r^{-3}+3\cdot r^{-2}.\end{aligned}$$

Treba odrediti globalni maksimum te funkcije uz uvjet $r>0$, odnosno na intervalu $D(F)=\langle 0,+\infty\rangle$

Prva derivacija funkcije F je

$$\begin{aligned}F'(r)&=3\cdot r^{-4}-6\cdot r^{-3}=\\&=3\cdot r^{-4}\cdot(1-2\cdot r).\end{aligned}$$

Iz jednadžbe $F'(r)=0$ slijedi

$$1-2\cdot r=0,$$

odnosno $r=\frac{1}{2}$.

Sastavimo tablicu.

	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
F'		$+$		$-$	
F		$\nearrow$		$\searrow$	

Lako se vidi da su npr.

$$F'\left(\frac{1}{4}\right) > 0 \text{ i } F'(1) < 0,$$

pa zaključujemo da funkcija F strogo raste na intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, a strogo pada na intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$.

Dakle, F postiže globalni maksimum za $r = \frac{1}{2}$ i taj maksimum je jednak

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

Prema tome, tražena sila iznosi 4 N.