1. Odredite sve **globalne** ekstreme funkcije $h(w)=\sqrt{8\cdot w-w^2}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Odredimo najprije prirodnu domenu zadane funkcije. Izraz pod drugim korijenom treba biti nenegativan, pa dobivamo nejednadžbu

$$8\cdot w-w^2\geq 0.$$

Skup svih rješenja te nejednadžbe je segment $[0,8]$. Dakle, $D(h)=[0,8]$.

Nađimo prvu derivaciju zadane funkcije:

$$\begin{aligned}
h'(w)&=\left(\left(8\cdot w-w^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\\
&=\frac{1}{2}\cdot\left(8\cdot w-w^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(8\cdot w-w^2\right)'=\\
&=\frac{1}{2}\cdot\left(8\cdot w-w^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(8-2\cdot w\right)=\\
&=\left(8\cdot w-w^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(4-w\right)=\\
&=\frac{4-w}{\left(8\cdot w-w^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\\
&=\frac{4-w}{\sqrt{8\cdot w-w^2}}.
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem prve derivacije s nulom dobivamo:

$$\begin{aligned}
&4-w=0,\\
&w=4.
\end{aligned}$$

Preostaje izračunati:

$$\begin{aligned}
&h(0)=h(8)=0,\\
&h(4)=4.
\end{aligned}$$

Dakle, najmanja vrijednost funkcije h jednaka je 0, dok je njezina najveća vrijednost jednaka 4.

2. Pokažite da je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana pravilom

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{za } x>0,\\ 1, & \text{inače}\end{cases}$$

neprekidna u točki $c=0$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Računamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} 1=1,\\
&\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\\
&\qquad=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\lim_{x\to 0+}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\\
&\qquad=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{e}=1,\\
&f(0)=1.
\end{aligned}$$

Dakle, $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)=2,$ pa slijedi tvrdnja.

3. U sjecištu krivulje $K\ldots\, y = 3 - \mathrm{e}^x$ s osi ordinata povučena je normala na krivulju. Izračunajte površinu trokuta kojega ta normala zatvara s objema koordinatnim osima.

Rješenje: Sjecište zadane krivulje s osi ordinata je točka

$$S = (0, y(0)) = (0, 2).$$

Koeficijent smjera normale n jednak je:

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{-1}{y'(0)} = \\ &= \frac{-1}{\left(-\mathrm{e}^x\right)_{x=0}} = \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^0} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Jednadžba normale n zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$\begin{aligned} n\ldots\, y &= 1 \cdot (x - 0) + 2, \\ y &= x + 2, \\ -x + y &= 2, \\ \frac{x}{-2} + \frac{y}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Odatle slijedi da je tražena površina jednaka:

$$P = \frac{|-2| \cdot 2}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ kv. jed.}$$

4. Pokažite da su **sve točke lokalnih ekstrema** i **sve točke pregiba** krivulje $y = x^3 + 3 \cdot x^2 + 2$ kolinearne.

Rješenje : Prve dvije derivacije izraza kojim je zadana krivulja su:

$$y' = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x,$$
$$y'' = 6 \cdot x + 6.$$

Iz jednadžbe $y' = 0$ slijedi

$x \cdot (x + 2) = 0,$

a odatle su $x_1 = -2,\ x_2 = 0.$

Očito su

$$y''(-2) = -6 < 0,$$
$$y''(0) = 6 > 0,$$

pa primjenom f''-testa zaključujemo da je $M = (-2, y(-2)) = (-2, 6)$ točka lokalnoga maksimuma, a $m = (0, y(0)) = (0, 2)$ točka lokalnoga minimuma.

Iz jednadžbe $y'' = 0$ slijedi $x = -1.$ Pokazali smo da su

$$y''(-2) = -6 < 0,$$
$$y''(0) = 6 > 0,$$

pa zaključujemo da je $T = (-1, y(1)) = (-1, 4)$ točka pregiba zadane krivulje.

Odredimo jednadžbu pravca *Mm* u eksplicitnom obliku. Imamo redom:

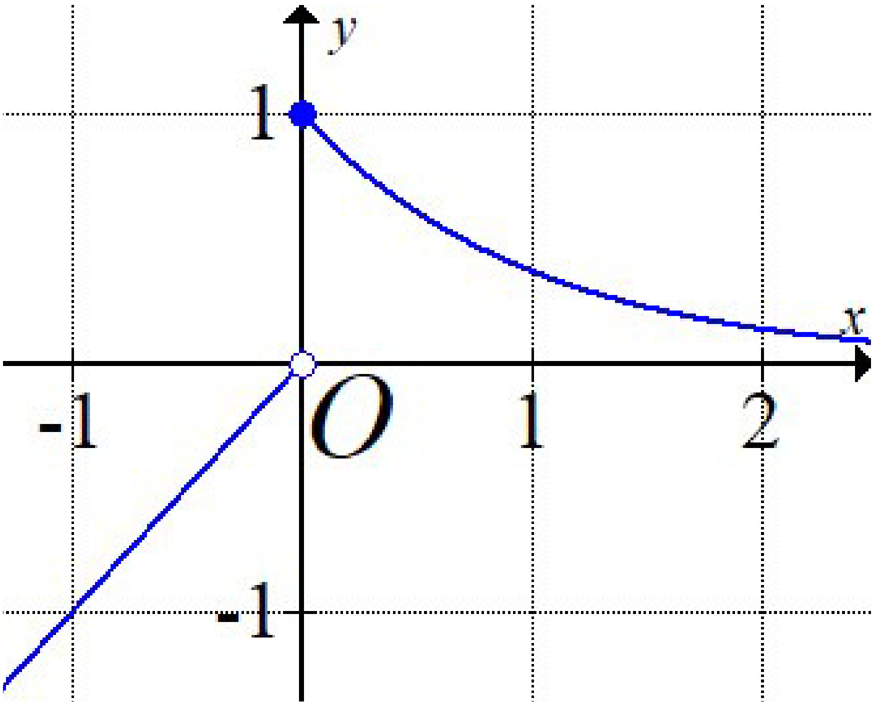
$$y - 6 = \frac{2-6}{0-(-2)} \cdot (x - (-2)),$$
$$y = (-2) \cdot (x + 2) + 6,$$
$$y = (-2) \cdot x + 2.$$

U dobivenu jednadžbu uvrstimo koordinate točke *T*, pa dobivamo:

$$4 = (-2) \cdot (-1) + 2,$$
$$4 \equiv 4,$$

što znači da i točka *T* pripada pravcu *Mm*. Dakle, točke *M*, *m* i *T* su kolinearne, što smo i trebali dokazati.

5. Na slici 1. je prikazan dio grafa funkcije *f*.



Slika 1.

Odredite:

a) $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$;

c) $f(0)$.

Rješenje: a) 0; b) i c) 1.

6. Odredite graničnu vrijednost

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(6\cdot x) - \operatorname{tg}(4\cdot x)}{2\cdot x}\right).$$

Rješenje: Zadana granična vrijednost je očito oblika $\frac{0}{0}$, pa smijemo primijeniti L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo. Tako odmah dobivamo:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sin(6\cdot x)\right)' - \left(\operatorname{tg}(4\cdot x)\right)'}{(2\cdot x)'}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{6\cdot\cos(6\cdot x) - \dfrac{4}{\cos^2(4\cdot x)}}{2}\right) = \\
&= \frac{6\cdot 1 - \dfrac{4}{1}}{2} = \\
&= \frac{2}{2} = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

7. Od kartona treba napraviti otvorenu kutiju volumena 32 cm^3 s kvadratnim dnom tako da se za izradu kutije potroši najmanje kartona. Otvor kutije nalazi se nasuprot njezinu dnu. Odredite optimalno oplošje kutije (iskazano u cm^2).

Rješenje: Neka su a duljina stranice dna kutije i v duljina visine kutije. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći optimizacijski problem:

$$\begin{aligned}&\text{minimizirati } O(a,v)=a^2+4\cdot a\cdot v\\&\text{pod uvjetima}\\&a^2\cdot v=32,\\&a,v>0.\end{aligned}$$

Iz uvjeta $a^2\cdot v=32$ slijedi $v=\dfrac{32}{a^2}$, pa se gornji problem svodi na:

$$\begin{aligned}&\text{minimizirati } O(a)=a^2+4\cdot a\cdot\frac{32}{a^2}=a^2+\frac{128}{a}\\&\text{pod uvjetom}\\&a>0.\end{aligned}$$

Prva derivacija funkcije O je

$$\begin{aligned}O'(a)&=2\cdot a-\frac{128}{a^2}=\\&=\frac{2}{a^2}\cdot\left(a^3-64\right).\end{aligned}$$

Iz jednadžbe $O'(a)=0$ slijedi $a^3=64$, odnosno $a=4$.

Lako se vidi da su npr.

$$O'(1)<0 \text{ i } O'(5)>0,$$

pa zaključujemo da funkcija O strogo pada na intervalu $\langle 0,4\rangle$, a strogo raste na intervalu $\langle 4,+\infty\rangle$.

Dakle, O postiže globalni minimum za $a=4$ i taj minimum je jednak $O(4)=48$. Prema tome, traženo optimalno oplošje kutije iznosi 48 cm^2.

8. Odredite graničnu vrijednost (limes) niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opći član definiran pravilom $b_n = \mathrm{e}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$.

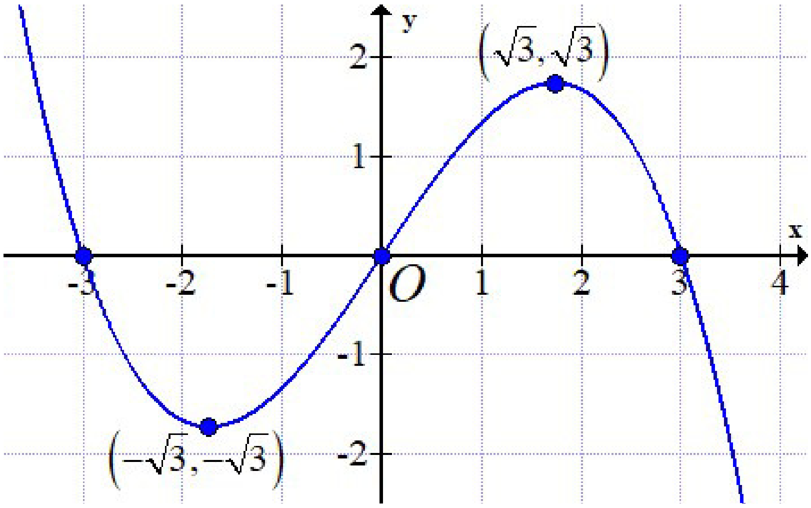
Rješenje: Zamijenimo $t := n+2$. Tada je

$$n+1 = t-1.$$

Kad $n \to +\infty$, onda i $t \to +\infty$. Zbog toga je tražena granična vrijednost jednaka

$$\begin{aligned} L &= \mathrm{e}\cdot\lim_t\left(\left(\frac{t-1}{t}\right)^t\right) = \\ &= \mathrm{e}\cdot\lim_t\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)^t\right) = \\ &= \mathrm{e}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}} = 1. \end{aligned}$$

9. Na slici 2. prikazan je dio grafa **prve derivacije** polinoma p koji sadrži **sva** sjecišta s osi apscisa i **sve** točke lokalnih ekstrema te derivacije.



Slika 2.

Za polinom p odredite (i **obavezno obrazložite** svoje odgovore) **sve intervale**:

a) **rasta;**
b) **pada;**
c) **konveksnosti;**
d) **konkavnosti.**

Rješenje: a) Intervali rasta polinoma p su intervali na kojima je $p'(x)>0$. Tako nalazimo da su traženi intervali $\langle -\infty,-3\rangle$ i $\langle 0,3\rangle$.

b) Intervali pada polinoma p su intervali na kojima je $p'(x)<0$. Tako nalazimo da su traženi intervali $\langle -3,0\rangle$ i $\langle 3,+\infty\rangle$.

c) Intervali konveksnosti polinoma p su intervali na kojima je p' strogo rastuća. Tako nalazimo da je traženi interval $\langle -\sqrt{3},\sqrt{3}\rangle$.

d) Intervali konkavnosti polinoma p su intervali na kojima je p' strogo padajuća. Tako nalazimo da su traženi intervali $\langle -\infty,-\sqrt{3}\rangle$ i $\langle \sqrt{3},+\infty\rangle$.

10. Odredite sve točke krivulje $K \ldots y^2 = x$ u kojima tangenta povučena na krivulju K s objema koordinatnim osima zatvara trokut površine 2 kv. jed.

Rješenje: Neka je $T = (x_T, y_T) \in K$ točka sa svojstvom iz zadatka. Koeficijent smjera tangente t povučene na K u T dobijemo deriviranjem izraza kojim je zadana K kao implicitno zadane funkcije:

$$2 \cdot y \cdot y' = 1,$$
$$y' = \frac{1}{2 \cdot y}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je jednadžba tangente t zadana u segmentnom obliku:

$$t \ldots \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Zbog uvjeta da površina trokuta kojega tangenta t zatvara s objema koordinatnim osima jednaka 4 moraju vrijediti nejednakosti $m, n \neq 0$. Iz gornje jednakosti lako slijedi da je koeficijent smjera tangente t jednak:

$$k_t = -\frac{n}{m}.$$

Tako dobivamo sljedeći sustav četiriju jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\begin{cases} y_T^2 = x_T, \\ -\dfrac{n}{m} = \dfrac{1}{2 \cdot y_T}, \\ \dfrac{1}{2} \cdot |m \cdot n| = 2, \\ \dfrac{x_T}{m} + \dfrac{y_T}{n} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_T^2 = x_T, \\ n = \dfrac{-m}{2 \cdot y_T}, \\ |m \cdot n| = 4, \\ \dfrac{x_T}{m} + \dfrac{y_T}{n} = 1. \end{cases}$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe u četvrtu jednadžbu dobijemo:

$$\frac{x_T}{m} - \frac{2 \cdot y_T^2}{m} = 1,$$
$$\frac{x_T}{m} - \frac{2 \cdot x_T}{m} = 1,$$
$$m = -x_T,$$
$$n = \frac{x_T}{2 \cdot y_T}.$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza za m i n u treću jednadžbu dobijemo:

$$\left| -\frac{x_T^2}{2 \cdot y_T} \right| = 4,$$
$$\left| -\frac{\left(y_T^2\right)^2}{2 \cdot y_T} \right| = 4,$$
$$\left| \frac{-y_T^4}{2 \cdot y_T} \right| = 4,$$
$$\left| -y_T^3 \right| = 8,$$
$$\underbrace{|-1|}_{=1} \cdot \left| y_T^3 \right| = 8,$$
$$\left| y_T^3 \right| = 8,$$
$$\left(|y_T| \right)^3 = 2^3,$$
$$|y_T| = 2,$$
$$(y_T)_1 = -2,\ (y_T)_2 = 2.$$

Uvrštavanjem tih vrijednosti u prvu jednadžbu sustava u oba slučaja slijedi $x_T = 4$. Dakle, tražene točke su $T_1 = (4, 2)$ i $T_2 = (4, -2)$.