MATRICE. ALGEBARSKE OPERACIJE S MATRICAMA.

1. Odredite tip svake od sljedećih matrica, te ispišite sve njezine elemente:

a) $A = \begin{bmatrix} -2015 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$;

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

f) $F = \begin{bmatrix} -2015 \\ 2014 \\ -2013 \end{bmatrix}$;

g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$;

h) $H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$;

i) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

j) $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$;

k) $K = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

l) $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

m) $M = \begin{bmatrix} -2013 & 0 & -2015 & 0 \\ 0 & 2014 & 0 & 2016 \end{bmatrix}$;

n) $N = \begin{bmatrix} \pi & e & \pi \cdot e \\ -e & -\pi & -e \cdot \pi \\ \pi^e & e^\pi & \pi^{e+\pi} \\ \ln \pi & \log_\pi e & \ln(\pi + e) \end{bmatrix}$;

MATRICE. ALGEBARSKE OPERACIJE S MATRICAMA.

o) $O = \begin{bmatrix} \ln 2 & \ln 3 & 2 \cdot \ln 2 & \ln 5 \\ \log 2 & \log 3 & 2 \cdot \log 2 & 1 - \log 2 \\ \log_3 2 & 1 & 2 \cdot \log_3 2 & \log_3 5 \end{bmatrix}$;

p) $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Napišite matricu A čiji su elementi realni brojevi a_{ij} ako je:

a) A tipa (1,1), te $a_{11} = 2015$;
b) A tipa (1, 2), te $a_{11} = 1$, $a_{12} = -2$;
c) A tipa (1, 2), te $a_{11} = a_{12} = -1$;
d) A tipa (2, 1), te $a_{11} = -1$, $a_{21} = 2$;
e) A tipa (2,1), te $a_{11} = a_{21} = -2$;
f) A reda 2, te $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = -1$;
g) A reda 2, te $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 0$;
h) A reda 2, te $a_{11} = a_{21} = 2014$, $a_{12} = -2015$, $a_{22} = 2016$;
i) A reda 2, te $a_{11} = -2014$, $a_{12} = a_{22} = 2013$, $a_{21} = 2015$;
j) A reda 2, te $a_{12} = 1$ i broj 0 na svim preostalim mjestima;
k) A reda 2, te $a_{21} = -1$ i broj 1 na svim preostalim mjestima;
l) A reda 2, te $a_{11} = a_{22} = \pi$ i broj e na svim preostalim mjestima;
m) A reda 2, te $a_{12} = a_{21} = -\pi$ i broj $(-e)$ na svim preostalim mjestima;
n) A tipa (3, 2), te $a_{11} = -1$, $a_{21} = 5$, $a_{31} = 2$ i broj 0 na svim preostalim mjestima.
o) A tipa (2, 3), te $a_{12} = a_{23} = 1$, $a_{22} = -1$ i broj 2015 na svim preostalim mjestima;
p) A reda 3 s brojem 2014 na svakom mjestu na glavnoj dijagonali i brojem π na svim preostalim mjestima;
q) A reda 3 s brojem e na svakom mjestu na sporednoj dijagonali i brojem –2014 na svim preostalim mjestima;
r) A reda 3 s brojem 1 na svakom mjestu u prvom stupcu, brojem 3 na svakom mjestu u drugom stupcu i brojem π na svakom mjestu u trećem stupcu;
s) A reda 3 s brojem ln 2 na svakom mjestu u prvom retku, brojem log 2 na svakom mjestu u drugom retku i brojem $\log_3 2$ na svakom mjestu u trećem retku;
t) A tipa (1, 4), te $a_{11} = a_{13} = -1$ i broj 0 na svim preostalim mjestima;
u) A tipa (4, 1), te $a_{21} = a_{31} = 2015$ i broj 1 na svim preostalim mjestima;
v) A tipa (2, 4), te $a_{11} = a_{23} = \pi$ i broj log 2 na svim preostalim mjestima;
w) A tipa (4, 2), te $a_{21} = a_{42} = e$ i broj ln 3 na svim preostalim mjestima;
x) A tipa (3, 4), te $a_{14} = a_{23} = a_{31} = 2014$ i broj –2015 na svim preostalim mjestima;
y) A tipa (4, 3), te $a_{12} = a_{24} = a_{33} = a_{43} = -1$ i broj e na svim preostalim mjestima;

MATRICE. ALGEBARSKE OPERACIJE S MATRICAMA.

z) A reda 4 s brojem 1 na glavnoj i sporednoj dijagonali, te brojem $(-\pi)$ na svim preostalim mjestima.

3. Napišite matricu A reda 2 čiji su elementi realni brojevi a_{ij} koji su za sve dopustive uređene parove (i, j) definirani pravilom:

a) $a_{ij} = i + j$;
b) $a_{ij} = i - j$;
c) $a_{ij} = j - i$;
d) $a_{ij} = 2 \cdot i - 3 \cdot j$;
e) $a_{ij} = 2 \cdot j + 3 \cdot i$;
f) $a_{ij} = -|j - 2 \cdot i|$;
g) $a_{ij} = |i - 2 \cdot j|$;
h) $a_{ij} = i^2 + j$;
i) $a_{ij} = j^2 - i$;
j) $a_{ij} = (i + 2 \cdot j)^2$;
k) $a_{ij} = (4 \cdot i - j)^2$;
l) $a_{ij} = (2 \cdot i - j)^3$;
m) $a_{ij} = 2^i + 3^j$;
n) $a_{ij} = 3^i - 2^j$;
o) $a_{ij} = 2^i - 3^j$;
p) $a_{ij} = 2^i \cdot 3^j$;
q) $a_{ij} = i^j + j^i$;
r) $a_{ij} = j^j - i^i$;
s) $a_{ij} = \dfrac{j^i}{i^j}$;
t) $a_{ij} = \log_2(3 \cdot i - j)$;
u) $a_{ij} = j \cdot \log(10 \cdot i) + i \cdot \log(10 \cdot j)$;
v) $a_{ij} = \sin\left[\dfrac{\pi}{2} \cdot (i - j)\right]$;
w) $a_{ij} = \sin\left[\dfrac{3}{2} \cdot \pi \cdot (i + j)\right]$;
x) $a_{ij} = \cos[\pi \cdot (i + j)]$;
y) $a_{ij} = \cos\left[\dfrac{\pi}{3} \cdot |j - i|\right]$;
z) $a_{ij} = \mathrm{tg}[2 \cdot \pi \cdot (j - 2 \cdot i)]$;
aa) $a_{ij} = \mathrm{ctg}\left[\dfrac{\pi}{4} \cdot (3 \cdot i - 4 \cdot j)\right]$;

MATRICE. ALGEBARSKE OPERACIJE S MATRICAMA.

bb) $a_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot i\right) + \cos(\pi \cdot j)$;

cc) $a_{ij} = \mathrm{tg}(\pi \cdot i) - \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} \cdot j\right)$.

4. **a)** Matrica $A \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ ima svojstvo da se za sve dopustive uređene parove (i, j) na presjeku i – toga retka i j – toga stupca nalazi najveći zajednički djelitelj brojeva i i j. Izračunajte umnožak svih elemenata te matrice.

b) Matrica $A \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ ima svojstvo da se za sve dopustive uređene parove (i, j) na presjeku i – toga retka i j – toga stupca nalazi najmanji zajednički višekratnik brojeva i i j. Izračunajte zbroj svih elemenata te matrice.

5. Odredite $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da matrice A i B budu jednake ako je:

a) $A = [x \quad 3 - y]$ i $B = [-1 \quad 2]$;
b) $A = [2 \cdot x \quad y + 1 \quad -z]$ i $B = [4 \ \ 5 \ \ 6]$;
c) $A = [x + y \quad x - y]$ i $B = [-2 \ \ 4]$;
d) $A = [2 \cdot x + 3 \cdot y \quad 3 \cdot x + 2 \cdot y]$ i $B = [-1 \ \ 1]$;
e) $A = [x^2 \quad 5 + y^2]$ i $B = [36 \quad 3 - x]$;
f) $A = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{y}\right) & \cos(\pi \cdot y) \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$;
g) $A = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{y}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;
h) $A = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{x}{y}\right) & \mathrm{ctg}\left(\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot x\right) \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$;
i) $A = \begin{bmatrix} x^2 + 2 \cdot x & 7 - y^3 & 2 \cdot x + z \end{bmatrix}$ i $B = [8 \ -1 \ 0]$;
j) $A = \begin{bmatrix} x^2 & y^2 \\ z - x & x + y \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

6. Izračunajte vrijednosti sljedećih matričnih izraza <u>bez uporabe računala ili kalkulatora</u>:

a) $[1 \ \ -1] + [-2 \ \ 3]$;
b) $[2 \ \ 0 \ \ -1] + [0 \ \ 1 \ \ -2]$;
c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$;
d) $(-1) \cdot [0 \ 1]$;
e) $4 \cdot [-0.5 \ \ 1.75 \ \ -2.25]$;

MATRICE. ALGEBARSKE OPERACIJE S MATRICAMA.

f) $\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\begin{bmatrix}0 & -6\\ 3 & -9\end{bmatrix}+0.2\cdot\begin{bmatrix}25 & 5\\ -5 & -10\end{bmatrix}$

g) $\sqrt{2}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{18}-1 & 2\sqrt{32}-1\\ 1-\sqrt{2} & 1+2\sqrt{50}\end{bmatrix}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{8}-2 & 4+\sqrt{2}\\ \sqrt{2}-4 & -\sqrt{72}-8\end{bmatrix}$;

h) $\frac{1}{\log 4}\cdot\begin{bmatrix}\log 16 & -\log 2\\ -\log 0.5 & \log 0.25\end{bmatrix}-\left(-\frac{1}{\log 3}\right)\cdot\begin{bmatrix}-\log\frac{1}{3} & \log 9\\ \log\frac{1}{27} & -\log 27\end{bmatrix}$.

7. Izračunajte matricu $D = -A + 2\cdot B - C$ ako su matrice A, B i C za sve dopustive uređene parove (i, j) zadane pravilima:

a) $A, B, C \in \mathbf{M}_{1,2}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = i + 2\cdot j$, $b_{ij} = 2\cdot i - 3\cdot j$, $c_{ij} = -i - j$;

b) $A, B, C \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = -i - 3\cdot j$, $b_{ij} = 2\cdot(i-j)^2$, $c_{ij} = (i+j)^3$;

c) $A, B, C \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, $a_{ij} = i^{j-1}$, $b_{ij} = 2\cdot a_{ij}$, $c_{ij} = 3\cdot a_{ij} - 2\cdot b_{ij}$;

d) $A, B, C \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, $a_{ij} = j^{j+1}$, $b_{ij} = \log_2(a_{ij})$, $c_{ij} = (-1)^{b_{ij}}$.

8. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{bmatrix}$. Postoji li matrica X takva da je $A - X = B - C$? Ako postoji, odredite je. Ako ne postoji, obrazložite svoj odgovor.

9. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 4 & -5 & 6\\ -7 & 8 & -9\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}9 & -8 & 7\\ -6 & 5 & -4\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$. Postoji li matrica X takva da je $A + X = B + C$? Ako postoji, odredite je. Ako ne postoji, obrazložite svoj odgovor.

10. Zadan je skup $S=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}\subset\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Postoje li brojevi $a, b, c \in \mathbf{R}$ takvi da vrijedi jednakost $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = a\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + b\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} + c\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$? Ako postoje, odredite ih. Ako ne postoje, obrazložite svoj odgovor.

b) Riješite **a)** podzadatak ako matricu $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ zamijenimo nekim drugim elementom

MATRICE. ALGEBARSKE OPERACIJE S MATRICAMA.

skupa S, a taj element (na desnoj strani jednakosti) zamijenimo matricom $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) Neka je $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ bilo koja matrica. Pokažite da tada postoje jedinstveni brojevi a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi jednakost $A = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. Neka je $S = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. Može li se skup S odabrati tako da za svaku matricu $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ postoje brojevi a, b, $c \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi jednakost $A = a \cdot A_1 + b \cdot A_2 + c \cdot A_3$? Ako mogu, nađite jedan takav izbor matrica A_1, A_2 i A_3. Ako ne mogu, obrazložite svoj odgovor.

Naputak: Primijenite rezultat zadatka 10. c).