TVZ – TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU – POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE **ZAVOD ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE** **KATEDRA ZA MATEMATIKU**	**Matematika 1** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**4. domaća zadaća**

MNOŽENJE MATRICA.

1. Odredite jesu li matrice A i B ulančane ako su:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = [2]$;
b) $A = [2]$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$;
c) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $B = [-2]$;
d) $A = [-2]$ i $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;
e) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $B = [1\ 2\ 3]$;
f) $A = [3\ 2\ 1]$ i $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;
g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$;
h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$;
i) $A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Za svaki par matrica iz prethodnoga zadatka ispitajte postoje li umnošci $A \bullet B$ i $B \bullet A$ i, ako postoje, izračunajte ih.

3. Izračunajte $\left(\frac{1}{3} \cdot A - 2 \cdot B\right) \bullet \left(2 \cdot A + \frac{1}{3} \cdot B\right)$ ako su:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;
b) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;
c) A i B matrice reda 2 koje su za sve dopustive (i, j) definirane pravilima $a_{ij} = i + 2 \cdot j$ i $b_{ij} = i^j + j^i$.

MNOŽENJE MATRICA.

4. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Provjerite valjanost sljedećih jednakosti:

a) $(A + B) \bullet (A - B) = A^2 - B^2$;
b) $(A + B) \bullet (A^2 - A \bullet B + B^2) = A^3 + B^3$;
c) $(A + B)^2 = A^3 + 3 \cdot A^2 \bullet B + 3 \cdot A \bullet B^2 + B^3$.

5. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Provjerite valjanost sljedećih jednakosti:

a) $(A - B) \bullet (A^2 + A \bullet B + B^2) = A^3 - B^3$;
b) $(A - B)^3 = A^3 - 3 \cdot A^2 \bullet B + 3 \cdot A \bullet B^2 - B^3$;
c) $(A^2 + B^2) \bullet (A^2 - B^2) = A^4 - B^4$.

6. Neka su a, b, $c \in \mathbb{R}$ proizvoljni, ali fiksirani brojevi. Nadalje, neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}).$$

Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}.$$

7. Zadana je matrica

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2015 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}).$$

Matematičkom indukcijom pokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & 2015 \cdot n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

MNOŽENJE MATRICA.

8. Zadana je matrica

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2015 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$C^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2015 \cdot n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni, ali fiksirani brojevi. Nadalje, neka je

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \cdot a \\ 0 & 1 & n \cdot b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.25 \\ -3 & 1.5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}).$$

Pokažite da vrijedi jednakost:

$$A^{2014} = A.$$

11. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}).$$

Pokažite da vrijedi jednakost:

$$A^{2014} = A.$$

MNOŽENJE MATRICA.

12. Neka su a, $b \in \mathbb{R}$ proizvoljni, ali fiksirani. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}).$$

Pokažite da je $A^2 = A$ ako i samo ako točka $T = (a, b)$ pripada kružnici $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

13. Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ izračunajte A^n.

Naputak: Izračunajte A^2 i A^3, pa izvedite zaključak.

14. Neka je $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ izračunajte A^n.

Naputak: Izračunajte A^2 i izvedite zaključak.

15. Neka je $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ izračunajte A^n.

Naputak: Izračunajte A^2, A^3 i A^4 , pa izvedite zaključak.

17. Neka su $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ izračunajte A^n i B^n.

Naputak: Vidjeti naputak za prethodni zadatak.

18. Neka je A matrica reda 2 sa svojstvom da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $A^n = 0$ i $A^{n-1} \neq 0$. Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: Barem jedan element matrice A je jednak nuli.

Naputak: Vidjeti rezultat zadatka 17.

19. Neka je A matrica reda 3 sa svojstvom da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $A^n = 0$ i $A^{n-1} \neq 0$. Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: Barem jedan element matrice A je jednak nuli.

Naputak: Vidjeti rezultat zadatka 17.