POSEBNI TIPOVI MATRICA.

1. Ispišite nulmatricu tipa (m, n) ako je:

a) $m = 1, n = 1$;
b) $m = 1, n = 2$;
c) $m = 1, n = 3$;
d) $m = 2, n = 1$;
e) $m = n = 2$;
f) $m = 2, n = 3$;
g) $m = 3, n = 1$;
h) $m = 3, n = 2$;
i) $m = n = 3$.

2. Ispišite jediničnu matricu reda n za svaki $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Ispišite dijagonalnu matricu A reda n u svakom od sljedećih slučajeva:

a) $n = 1$, $a_{11} = 1$;
b) $n = 2$, $a_{ii} = i$, za svaki $i = 1, 2$;
c) $n = 2$, $a_{ii} = i^2$, za svaki $i = 1, 2$;
d) $n = 2$, $a_{ii} = 3 \cdot i$, za svaki $i = 1, 2$;
e) $n = 3$, $a_{ii} = -i$, za svaki $i = 1, 2, 3$;
f) $n = 3$, $a_{ii} = 2^i$, za svaki $i = 1, 2, 3$;
g) $n = 3$, $a_{ii} = \cos(\pi \cdot i)$, za svaki $i = 1, 2, 3$;
h) $n = 3$, $a_{ii} = \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot i\right)$, za svaki $i = 1, 2, 3$;
i) $n = 4$, $a_{ii} = \operatorname{tg}\left(\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot i\right)$, za svaki $i = 1, 2, 3, 4$;
j) $n = 4$, $a_{ii} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} \cdot i\right)$, za svaki $i = 1, 2, 3, 4$.

4. Ispišite gornju trokutastu matricu A reda n u svakom od sljedećih slučajeva:

a) $n = 1$, $a_{11} = 2015$;
b) $n = 2$, $a_{ij} = 2 \cdot j - i$, za svaki $j = 1, 2$ i svaki dopustivi $i \geq j$;
c) $n = 2$, $a_{ij} = 2^i - j$, za svaki $j = 1, 2$ i svaki dopustivi $i \geq j$;
d) $n = 2$, $a_{ij} = 3^j - i$, za svaki $j = 1, 2$ i svaki dopustivi $i \geq j$;
e) $n = 3$, $a_{ij} = i + j$, za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \geq j$;
f) $n = 3$, $a_{ij} = i - j + 1$ za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \geq j$;
g) $n = 3$, $a_{ij} = i^j - j^i$, za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \geq j$;
h) $n = 3$, $a_{ij} = \sin\left(\pi \cdot \frac{j}{i}\right)$, za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \geq j$;
i) $n = 3$, $a_{ij} = \cos\left(\pi \cdot \frac{3 \cdot j}{2 \cdot i}\right)$, za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \geq j$;

j) $n = 3$, $a_{ij} = \operatorname{tg}\left(\pi \cdot \frac{2 \cdot j}{i}\right)$, za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \geq j$.

5. Ispišite donju trokutastu matricu A reda n u svakom od sljedećih slučajeva:

a) $n = 1$, $a_{11} = 2015$;
b) $n = 2$, $a_{ij} = 3 \cdot i - j$, za svaki $j = 1, 2$ i svaki dopustivi $i \leq j$;
c) $n = 2$, $a_{ij} = 5^j - i$, za svaki $j = 1, 2$ i svaki dopustivi $i \leq j$;
d) $n = 2$, $a_{ij} = 3^i - j$, za svaki $j = 1, 2$ i svaki dopustivi $i \leq j$;
e) $n = 3$, $a_{ij} = i - j$, za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \leq j$;
f) $n = 3$, $a_{ij} = i + j - 1$ za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \leq j$;
g) $n = 3$, $a_{ij} = i^j - j^i$, za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \leq j$;
h) $n = 3$, $a_{ij} = \sin\left(\pi \cdot \frac{j}{i}\right)$, za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \leq j$;
i) $n = 3$, $a_{ij} = \cos\left(\pi \cdot \frac{3 \cdot j}{2 \cdot i}\right)$, za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \leq j$;
j) $n = 3$, $a_{ij} = \operatorname{tg}\left(\pi \cdot \frac{2 \cdot j}{i}\right)$, za svaki $j = 1, 2, 3$ i svaki dopustivi $i \leq j$.

6. **a)** Ako su A i B dijagonalne matrice reda 2, jesu li tada i njihov zbroj, razlika i umnožak dijagonale matrice reda 2? Obrazložite svoje odgovore.
b) Ako su A i B gornje trokutaste matrice reda 2, jesu li tada i njihov zbroj, razlika i umnožak gornje trokutaste matrice reda 2? Obrazložite svoje odgovore.
c) Ako su A i B donje trokutaste matrice reda 2, jesu li tada i njihov zbroj, razlika i umnožak donje trokutaste matrice reda 2? Obrazložite svoje odgovore.
d) Odgovorite na pitanja iz podzadataka **a)** – **c)** ako su A i B matrice reda 3.

7. Neka je D skup svih dijagonalnih matrica reda 3, GT skup svih gornjih trokutastih matrica reda 3, a DT skup svih donjih trokutastih matrica reda 3. Odredite presjek svakih dvaju od navedenih triju skupova, te presjek svih triju skupova. Objasnite dobivene rezultate.

8. Neka je S skup svih simetričnih matrica reda 3, a AS skup svih antisimetričnih matrica reda 3. Odredite presjek navedenih skupova. Objasnite dobiveni rezultat.

9. Neka su a, $b \in \mathbb{R}$ proizvoljni, ali fiksirani brojevi. Neka su A, $B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ matrice definirane s

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Pokažite da vrijedi jednakost $A^2 + B^2 = 0$.

b) Što biste zaključili iz jednakosti $A^2 + B^2 = 0$ ako bi A i B bili realni brojevi?

POSEBNI TIPOVI MATRICA.

10. Pokažite da vrijede sljedeće jednakosti:

a) $E_2^3 = E_2$;

b) $E_3^3 = E_3$.

Koji realni brojevi imaju analogno svojstvo, tj. za koje $x \in \mathbb{R}$ vrijedi jednakost $x^3 = x$?

11. Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Za koje vrijednosti brojeva a i b vrijedi jednakost $A^2 = 0$?
b) Za koje vrijednosti brojeva a i b vrijedi jednakost $A^2 = E$?
c) Za koje vrijednosti brojeva a i b vrijedi jednakost $A^2 = A$?

12. Odredite vrijednosti $x \in \mathbb{R}$ tako da matrica:

$$A = \begin{bmatrix} x-1 & 2 \cdot x \\ x+2 & x+1 \end{bmatrix}$$

bude:

a) donja trokutasta;
b) gornja trokutasta;
c) dijagonalna;
d) simetrična.

13. Odredite vrijednosti $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da matrica

$$B = \begin{bmatrix} x & 1-x^2 & z^2-9 \\ 1-x & y & y^2-4 \\ 2+y & z-3 & z \end{bmatrix}$$

bude:

a) donja trokutasta;
b) gornja trokutasta;
c) dijagonalna.

14. Provjerite valjanost jednakosti $(A + B)^T = A^T + B^T$ ako je:

a) $A = [-1\ 1]$, $B = [0\ -1]$;

b) $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$;

POSEBNI TIPOVI MATRICA.

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

e) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

f) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = 2 \cdot A$;

g) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = E_3 - A$;

h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = A + 2 \cdot E_3$.

15. Provjerite valjanost jednakosti $(A \bullet B)^T = B^T \bullet A^T$ ako je:

a) $A = [1 \;\; 2]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = [-1 \;\; -4]$;

c) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$;

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

f) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = [1 \;\; -1 \;\; 0]$;

g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

POSEBNI TIPOVI MATRICA.

h) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$;

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

16. Odredite istinitost svake od sljedećih izjava i obrazložite svoje odgovore:

a) Transponiranjem dijagonalne matrice dobije se dijagonalna matrica.
b) Transponiranjem donje trokutaste matrice dobije se donja trokutasta matrica.
c) Transponiranjem gornje trokutaste matrice dobije se gornja trokutasta matrica.
d) Transponiranjem simetrične matrice dobije se simetrična matrica.
e) Transponiranjem antisimetrične matrice dobije se antisimetrična matrica.