RADIJVEKTORI. ALGEBARSKE OPERACIJE S RADIJVEKTORIMA. LINEARNA (NE)ZAVISNOST SKUPA RADIJVEKTORA.

<u>*Napomena*</u>: U svim zadatcima O označava ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini/prostoru (tj. točke (0,0) ili (0, 0, 0), ovisno o zadatku), $\bullet$ označava skalarni umnožak, a $\times$ vektorski umnožak.

1. U standardnom pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini odredite krajnju točku i nacrtajte radij-vektore $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $-\overrightarrow{OA}$, $2\cdot\overrightarrow{OA}$ i $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\overrightarrow{OB}$ ako je:

a) $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$;
b) $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$;
c) $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$;
d) $A = (-1, 0)$, $B = (0, -1)$;
e) $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$;
f) $A = (0, 1)$, $B = (-1, -1)$;
g) $A = (0, -1)$, $B = (1, -1)$;
h) $A = (2, 0)$, $B = (0, 3)$;
i) $A = (-4, 0)$, $B = (0, -2)$;
j) $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$;
k) $A = (-1, 2)$, $B = (-2, 1)$;
l) $A = (-1, -3)$, $B = (-3, -1)$;
m) $A = (1, -2)$, $B = (3, -4)$;
n) $A = (1, 3)$, $B = (-1, 2)$;
o) $A = (3, 1)$, $B = (-4, -2)$;
p) $A = (1, 4)$, $B = (1, -3)$;
q) $A = (-1, 1)$, $B = (1, 2)$;
r) $A = (-1, 4)$, $B = (-1, -2)$;
s) $A = (-2, 3)$, $B = (3, -2)$;
t) $A = (-2, -5)$, $B = (3, 4)$;
u) $A = (-2, -4)$, $B = (-4, 2)$;
v) $A = (-3, -2)$, $B = (4, -3)$;
w) $A = (4, -3)$, $B = (1, 4)$;
x) $A = (2, -3)$, $B = (-4, 1)$;
y) $A = (5, -2)$, $B = (-5, -3)$;
z) $A = (2, -3)$, $B = (-2, 5)$.

2. Izračunajte $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OA}-2\cdot\overrightarrow{OB}$ ako je:

a) $A = (2, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$;
b) $A = (0, 4, 0)$, $B = (-1, 0, 0)$;
c) $A = (0, 0, 6)$, $B = (0, 1, 0)$;
d) $A = (2, 4, 0)$, $B = (0, -1, 0)$;
e) $A = (0, 2, 4)$, $B = (0, 0, 1)$;
f) $A = (4, 0, 2)$, $B = (0, 0, -1)$;
g) $A = (-2, 0, 0)$, $B = (0, 1, 1)$;

RADIJVEKTORI. ALGEBARSKE OPERACIJE S RADIJVEKTORIMA. LINEARNA (NE)ZAVISNOST SKUPA RADIJVEKTORA.

h) $A = (0, -4, 0)$, $B = (1, 0, 1)$;
i) $A = (0, 0, -6)$, $B = (1, 1, 0)$;
j) $A = (-2, -4, 0)$, $B = (1, 1, 1)$;
k) $A = (0, -2, -4)$, $B = (-1, 0, 1)$;
l) $A = (-4, 0, -2)$, $B = (0, -1, 1)$;
m) $A = (-2, -4, -6)$, $B = (-1, 1, 0)$;
n) $A = (-2, 6, -4)$, $B = (1, 0, -1)$;
o) $A = (6, -4, 2)$, $B = (0, -1, -1)$;
p) $A = (6, 4, -2)$, $B = (-1, 1, 1)$;
q) $A = (2, 4, 6)$, $B = (-1, -1, 1)$;
r) $A = (6, 2, 4)$, $B = (1, -1, -1)$;
s) $A = (2, 6, 4)$, $B = (-1, 1, -1)$;
t) $A = (-4, 2, 6)$, $B = (1, 3, 3)$;
u) $A = (2, -6, -4)$, $B = (1, 2, 3)$;
v) $A = (-2, -6, -4)$, $B = (-1, -2, -3)$;
w) $A = (2008, 2010, -2012)$, $B = (1003, 1004, -1005)$;
x) $A = (-2010, 2012, 2014)$, $B = (-1006, 1005, 1008)$;
y) $A = (2014, -2012, -2010)$, $B = (-1008, -1007, -1006)$;
z) $A = (-2016, -2014, 2012)$, $B = (-1007, -1006, 1008)$.

3. Izračunajte $\overrightarrow{OA}\times\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, $\left(2\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OC}\right)\times\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}\times\left(-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OB}\right)\times\left[(-4)\cdot\overrightarrow{OA}\right]$ ako je:

a) $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$;
b) $A = (-1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, -1)$;
c) $A = (-1, 0, 0)$, $B = (0, -1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$;
d) $A = (-1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, -1)$;
e) $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, -1, 0)$, $C = (0, 0, -1)$;
f) $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (2, 0, 2)$;
g) $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (-2, 0, 2)$;
h) $A = (1, 1, 1)$, $B = (-1, 1, 0)$, $C = (2, -2, 2)$;
i) $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (-2, -4, -6)$;
j) $A = (-1, 2, -3)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (2, 4, -6)$;
k) $A = (-1, -2, 3)$, $B = (3, 2, -1)$, $C = (4, -2, -6)$;
l) $A = (-1, 2, -3)$, $B = (-3, -2, -1)$, $C = (-6, -2, 4)$;
m) $A = (2, -1, -3)$, $B = (2, 3, 1)$, $C = (-4, 2, 6)$;
n) $A = (-3, -2, -1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (6, -4, -2)$;
o) $A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), B = \left(-1, -3, 5\right), C = (2, -4, 6)$;
p) $A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right), B = (-1, -2, 1), C = (2, -4, 6)$;
q) $A = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right), B = (1, 2, -1), C = (-4, 6, 2)$;

RADIJVEKTORI. ALGEBARSKE OPERACIJE S RADIJVEKTORIMA.
LINEARNA (NE)ZAVISNOST SKUPA RADIJVEKTORA.

r) $A=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right), B=(-1,3,-2), C=(6,2,4)$;

s) $A=\left(\frac{7}{2},-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right), B=(-1,-4,7), C=(8,6,4)$

t) $A=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right), B=(1,\sqrt{3},-2), C=\left[2,(-2)\cdot\sqrt{3},2\cdot\sqrt{3}\right]$;

u) $A=\left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right), B=(\sqrt{3},1,-2), C=(-4,2\cdot\sqrt{3},2)$;

v) $A=\left(-\sqrt{3},\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right), B=(\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}), C=(\sqrt{12},-\sqrt{20},-\sqrt{28})$;

w) $A=\left(-\sqrt{5},-\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{\sqrt{11}}{2}\right), B=(-\sqrt{5},-\sqrt{7},\sqrt{11}), C=(-\sqrt{80},\sqrt{112},\sqrt{176})$;

x) $A=\left(-\pi,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), B=(\pi,-1,-\pi), C=\left[2\cdot\pi,4,(-2)\cdot\pi\right]$;

y) $A=\left(\pi,\frac{3}{2}\cdot\pi,-\frac{1}{2}\cdot\pi\right), B=(1,-\pi,\pi), C=\left[(-4)\cdot\pi,(-2)\cdot\pi,2\right]$;

z) $A=\left(-\pi,-\frac{3}{2}\cdot\pi,\frac{1}{2}\cdot\pi\right), B=(-1,\pi,\pi), C=\left[(-2)\cdot\pi,(-4)\cdot\pi,-2\right]$.

4. Izračunajte $\overrightarrow{OA}\bullet\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right),\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right)\bullet\overrightarrow{OB}$ i $\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\bullet\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right)$ ako je:

a) $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$;
b) $A = (-1, 0, 0)$, $B = (0, -1, 0)$, $C = (0, 0, -1)$;
c) $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$;
d) $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, -2, 0)$, $C = (-2, 2, 0)$;
e) $A = (0, 0, 2)$, $B = (-2, 0, 0)$, $C = (2, 0, -2)$;
f) $A = (-2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (-2, 2, 0)$;
g) $A = (1, 3, 5)$, $B = (2, 4, 6)$, $C = (3, 7, 11)$;
h) $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (-1, -2, -3)$;
i) $A = (-1, 2, -3)$, $B = (1, -2, 3)$, $C = (1, 2, -3)$;
j) $A = (3, 2, -1)$, $B = (2, -3, 1)$, $C = (-1, 3, 2)$;
k) $A = (7, 4, 5)$, $B = (-9, -4, 1)$, $C = (2, 2, -1)$;

l) $A=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right), B=\left(-2,2,4\right), C=(-4,4,-2)$;

m) $A=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right), B=\left(6,9,-3\right), C=(-3,6,9)$;

n) $A=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right), B=\left(10,5,-5\right), C=(5,-5,-10)$;

RADIJVEKTORI. ALGEBARSKE OPERACIJE S RADIJVEKTORIMA. LINEARNA (NE)ZAVISNOST SKUPA RADIJVEKTORA.

o) $A=\left(\frac{3}{49},-\frac{1}{49},\frac{5}{49}\right), B=\left(7,49,-35\right), C=(-14,21,28)$;

p) $A=\left(\frac{1}{9},-\frac{7}{9},\frac{4}{9}\right), B=\left(-6,9,3\right), C=(12,-15,-18)$;

q) $A=\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right), B=\left(-2,6,4\right), C=(3,-9,-6)$;

r) $A=\left(\frac{1}{4},-\frac{5}{4},-\frac{3}{4}\right), B=\left(2,2,-2\right), C=(-2,2,2)$;

s) $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}}\right), B=\left(-\sqrt{6},-\sqrt{3},\sqrt{3}\right), C=(\sqrt{18},-\sqrt{27},-\sqrt{48})$;

t) $A=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}}\right), B=\left(-\sqrt{10},-\sqrt{125},\sqrt{80}\right), C=(\sqrt{50},-\sqrt{5},\sqrt{5})$;

u) $A=\left(\frac{5}{\sqrt{7}},-\frac{6}{\sqrt{7}},\frac{4}{\sqrt{7}}\right), B=\left(-\sqrt{28},\sqrt{63},\sqrt{7}\right), C=(1,-3,2)$;

v) $A=\left(-\frac{7}{\sqrt{10}},\frac{11}{\sqrt{10}},\frac{9}{\sqrt{10}}\right), B=\left(-2\cdot\sqrt{5},3\cdot\sqrt{2},-\sqrt{10}\right), C=(\sqrt{2},\sqrt{5},-1)$;

w) $A=\left(\frac{1}{\pi},\frac{2}{\pi^2},\frac{3}{\pi^3}\right), B=\left(2,-2\cdot\pi,\pi^2\right), C=\left(\pi,-\frac{\pi}{2},-\pi\right)$;

x) $A=\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}},\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}},-\frac{3}{\sqrt[3]{\pi^2}}\right), B=\left(\pi\cdot\sqrt{\pi},-\sqrt[3]{\pi^2},\sqrt[3]{\pi}\right), C=\left(-\frac{1}{\pi},\sqrt[3]{\pi^2},\frac{1}{\pi\cdot\sqrt[3]{\pi^2}}\right)$;

y) $A = (\pi - 1, \pi, 1 - \pi)$, $B = (\pi + 1, \pi, -1 - \pi)$, $C = (0, -1, 1)$;

z) $A = (\pi^2 - 1, -\pi, 1 - \pi^2)$, $B = (1, 0, -1)$, $C = (-\pi, 1, 1)$;

5. Zadane su tri nekolinearne točke O, A i B u pravokutnom koordinatnom sustavu u prostoru. Neka je C točka u ravnini takva da je $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Pokažite da su točke O, A, B i C vrhovi usporednika. (*Naputak*: Četverokut $OABC$ je usporednik ako obje njegove dijagonale imaju isto polovište.)

6. Zadane su tri nekolinearne točke O, A i B u pravokutnom koordinatnom sustavu u prostoru. Neka je C točka u ravnini takva da je $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$. Pokažite da su točke O, A, B i C vrhovi usporednika.

7. Zadani su radijvektori $\vec{a}=5\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\cdot\vec{j}+4\cdot\vec{k}$, $\vec{c}=(-2)\cdot\vec{i}+6\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$ i $\vec{d}=2\cdot\vec{i}+11\cdot\vec{j}-7\cdot\vec{k}$. Pokažite da su krajnje točke tih radijvektora vrhovi usporednika.

8. Tri vrha usporednika $ABCD$ $A = (3, 2, 0)$, $B = (-3, 3, 1)$ i $C = (-5, 0, -2)$. Odredite koordinate vrha D, pa izračunajte šiljasti kut koji zatvaraju dijagonale toga usporednika.

9. Zadani su radijvektori $\vec{a}=(3,0,2)$, $\vec{b}=(1,-3,-4)$, $\vec{c}=(-1,2,-5)$ i $\vec{d}=(0,3,4)$. Izračunajte:

RADIJVEKTORI. ALGEBARSKE OPERACIJE S RADIJVEKTORIMA. LINEARNA (NE)ZAVISNOST SKUPA RADIJVEKTORA.

a) $(3\cdot\vec{a})\bullet\vec{c}+5\cdot\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right)$;

b) $\left[(3\cdot\vec{a})\times\vec{c}\right]\bullet\left[5\cdot\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\right]$

c) $(\vec{b}-\vec{a})\bullet\left(\vec{c}+\vec{d}\right)$;

d) $(\vec{b}-\vec{a})\times\left(\vec{d}-\vec{c}\right)$;

e) $\left\{\vec{a}\times\left[\left(5\cdot\vec{b}\right)\times\left(-\frac{1}{5}\cdot\vec{c}\right)\right]\right\}\bullet\left\{\left[\left(-\frac{1}{3}\cdot\vec{a}\right)\times\left(6\cdot\vec{b}\right)\right]\times\vec{c}\right\}$.

10. Zadani su radijvektori $\vec{a}=(2,-4,3)$, $\vec{b}=(3,-1,5)$ i $\vec{c}=(1,-2,4)$ Odredite vektor $\vec{x}$ tako da vrijede jednakosti $\vec{x}\bullet\vec{a}=1$, $\vec{x}\bullet\vec{b}=2$ i $\vec{x}\bullet\vec{c}=3$.

11. Zadani su radijvektori $\vec{a}=(0,2\cdot\alpha,\alpha)$, $\vec{b}=(2,2,1)$, $\vec{c}=(-1,-2,-1)$ i $\vec{d}=(\alpha,0,1)$. Odredite vrijednost realnoga broja α tako da vrijedi jednakost $\vec{a}\bullet\vec{b}-\vec{c}\bullet\vec{d}=7$.

12. Zadani su radijvektori $\vec{a}=(6,\ 8,\ 10)$ i $\vec{b}=(10,\ 24,\ 26)$. Izračunajte duljine tih radijvektora, te kut kojega oni zatvaraju.

13. Izračunajte skalarni umnožak radijvektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, te kut koji zatvaraju ti radijvektori ako je:

a) $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 2, 3)$;
b) $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 4, 6)$;
c) $A = (-1, -2, -3)$, $B = (4, 8, 12)$;
d) $A = (1, 0, 1)$, $B=\left(3,\sqrt{6},3\right)$;
e) $A = (-1, 1, 0)$, $B = (0, 0, 1)$;
f) $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 1, -1)$;
g) $A = (-5, 3, 4)$, $B = (7, 9, 2)$;
h) $A = (-1, -1, 0)$, $B = (1, 0, -1)$;
i) $A = (-1, 0, -1)$, $B = (0, 0, 1)$;
j) $A=\left(-\sqrt{3},1,0\right)$, $B = (1, 0, 0)$.

14. Odredite vrijednost $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da radijvektor $\vec{a}=(2\cdot\alpha,\ 1,\ 1-\alpha)$ zatvara jednake kutove s radijvektorima $\vec{b}=(-1,3,0)$ i $\vec{c}=(5,-1,8)$.

15. Odredite vrijednost parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da duljine radijvektora $\vec{a}=(2\cdot e^{\alpha},\alpha,1-\alpha)$ i radijvektora $\vec{b}=(\alpha+1,\alpha-2)$ budu jednake, pa izračunajte kut između tih dvaju radijvektora.

16. Odredite vrijednosti parametara $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tako da trokut OAB bude pravokutan s pravim kutom kod vrha O ako je zadano:

RADIJVEKTORI. ALGEBARSKE OPERACIJE S RADIJVEKTORIMA. LINEARNA (NE)ZAVISNOST SKUPA RADIJVEKTORA.

a) $A = (50, -100, \alpha)$, $B = (2, 1, 0)$;

b) $A = (1, -2, \alpha + 1)$, $B = (-3, 0, 1 - \alpha)$;

c) $A = (\alpha + 1, -1, -3)$, $B = (1 - \alpha + \alpha^2, 2, -3)$

d) $A = (\alpha, -1, 2013)$, $B = (\alpha, \beta^2, 0)$;

e) $A = (\alpha - \beta, \beta, \alpha)$, $B = (\alpha + \beta, -\beta, \alpha)$;

f) $A = (2 \cdot \alpha, 3 \cdot \alpha - \beta, \beta)$, $B = (3 \cdot \alpha, \alpha + 3 \cdot \beta, 11 \cdot \beta)$.

17. Zadani su radijvektori $\vec{a} = (6,1,1)$, $\vec{b} = (0,3,-1)$ i $\vec{c} = (-2,3,5)$. Odredite vrijednost parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da radijvektori $\vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ i $\vec{c}$ budu okomiti.

18. Odredite linearnu kombinaciju radijvektora:

a) $\vec{a} = (1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,0)$ i $\vec{c} = (0,0,1)$ s koeficijentima -1, 1, -1;

b) $\vec{a} = (-1,0,0)$, $\vec{b} = (0,-1,0)$ i $\vec{c} = (0,0,1)$ s koeficijentima (-1), (-3) i (-2);

c) $\vec{a} = (1,0,0)$, $\vec{b} = (0,-1,0)$ i $\vec{c} = (0,0,-1)$ s koeficijentima 1, (-2) i (-3);

d) $\vec{a} = (-1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,0)$ i $\vec{c} = (0,0,-1)$ s koeficijentima 1, 2 i (-3);

e) $\vec{a} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ i $\vec{c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ s koeficijentima (-2), 4 i (-6);

f) $\vec{a} = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\vec{b} = \left(\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ i $\vec{c} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right)$ s koeficijentima 6, (-9) i (-3);

g) $\vec{a} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ i $\vec{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ s koeficijentima $\sqrt{8}, -\sqrt{27}$ i $\sqrt{20}$;

h) $\vec{a} = \left(\frac{11}{3\sqrt{8}}, \frac{19}{5\sqrt{18}}, \frac{17}{4\sqrt{32}}\right)$, $\vec{b} = \left(-\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{2}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{48}}\right)$ i $\vec{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, -\frac{3}{\sqrt{80}}\right)$ s koeficijentima $-\sqrt{115200}, \sqrt{1728}$ i $-\sqrt{2880}$;

i) $(-1, 0, 2)$, $(3, -2, 1)$ i $(0, -1, -3)$ s koeficijentima $\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ i $1+\sqrt{2}$;

j) $(-1-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $(\sqrt{27}, -\sqrt{12}, \sqrt{48})$ s koeficijentima $\sqrt{3}$, $3\sqrt{12}$ i -1.

19. Prikažite radijvektor $\overrightarrow{OD}$ kao linearnu kombinaciju radijvektora $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ ako je:

a) $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $D = (3, 2, 1)$;
b) $A = (-1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $D = (1, 2, 3)$;
c) $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, -1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $D = (2, 1, 3)$;
d) $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, -1)$, $D = (3, 1, 2)$;
e) $A = (-1, 0, 0)$, $B = (0, -1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $D = (-1, 2, -3)$;

RADIJVEKTORI. ALGEBARSKE OPERACIJE S RADIJVEKTORIMA. LINEARNA (NE)ZAVISNOST SKUPA RADIJVEKTORA.

f) $A = (-1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, -1)$, $D = (1, -3, 2)$;
g) $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, -1, 0)$, $C = (0, 0, -1)$, $D = (1, -2, -3)$;
h) $A = (1, -2, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (-1, -1, -1)$, $D = (-3, -1, -2)$;
i) $A = (1, 2, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 4, 3)$, $D = (0, 0, 0)$;
j) $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (0, 1, 4)$, $D = (1, 2, 4)$;
k) $A = (2, 3, 4)$, $B = (-1, -2, 2)$, $C = (1, 0, 2)$, $D = (-2, -4, -8)$;
l) $A = (1, -3, 0)$, $B = (2, -1, 4)$, $C = (-2, 1, -4)$, $D = (2, 4, 8)$;
m) $A = (-8, -4, -2)$, $B = (3, 2, -1)$, $C = (4, 5, 0)$, $D = (-1, 3, -1)$;
n) $A = (-1, 2, 3)$, $B = (1, -2, 3)$, $C = (1, 2, -3)$, $D = (-9, 2, 57)$;
o) $A = (-1, -2, 3)$, $B = (1, -2, -3)$, $C = (-1, 2, -3)$, $D = (-19, 18, 33)$;
p) $A = (3, 4, 5)$, $B = (6, 7, 8)$, $C = (9, 10, 11)$, $D = (0, 0, 0)$;
q) $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 4, 9)$, $C = (1, 8, 27)$, $D = (2,2,3)$;
r) $A = (-4, -3, 6)$, $B = (-6, 3, -4)$, $C = (2, 2, 1)$, $D = (11, -2, 11)$.

20. Neka su $a, b, c \in V^3(O)$. Pretpostavimo da je vektor c linearna kombinacija vektora a i b s koeficijentima 2014 i 2015. Može li se tada i vektor $2016 \cdot c$ prikazati kao linearna kombinacija vektora a i b? Ako može, odredite koeficijente u tom prikazu. Ako ne može, obrazložite svoj odgovor.

21. Neka su $a, b, c, d \in V^3(O)$. Pretpostavimo da je vektor d linearna kombinacija vektora a, b i c s koeficijentima α_1, α_2 i α_3, te neka je k bilo koji realan broj različit od nule. Može li se tada i vektor $k \cdot d$ prikazati kao linearna kombinacija vektora a, b i c? Ako može, odredite koeficijente u tom prikazu. Ako ne može, obrazložite svoj odgovor.

22. Ispitajte jesu li sljedeći uređeni skupovi radijvektora linearno nezavisni i precizno obrazložite svoje odgovore:

a) $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$;
b) $S = \{(-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)\}$;
c) $S = \{(-1, 0, 1), (0, -1, -1), (-1, -1, 0)\}$;
d) $S = \{(-1, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, 0)\}$;
e) $S = \{(0, 0, 0), (2010, 2011, 2012), (2013, 2014, 2015)\}$;
f) $S = \{(1, 2, 3), (3, 6, 9), (2014, 2016, 2018)\}$;
g) $S = \{(1, 9, 7), (2, 1, 1), (-1, 8, 6)\}$;
h) $S = \{(1, -3, 4), (-2, 1, 7), (8, -9, -13)\}$;
i) $S = \{(2009, -2010, 2011), (2012, -2013, -2014), (-2015, -2016, 2017), (2018, 2019, 2020)\}$;
j) $S = \{(2014, 0, 1), (0, 2015, 1), (1, 0, 2016)\}$;
k) $S = \{(\pi, \pi^2, \pi^3), (0, 0, 0), (1 - \pi, \pi - \pi^2, \pi^2 - \pi^3)\}$;
l) $S = \{(-2015, 2016, -2017), (2015, -2016, 2017), (0, 1, 1)\}$.

23. Odredite realne brojeve $a, b \in \mathbb{R}$ tako da skup $S = \{(a - 1, 0, 0), (1, b^2 - 1, 0)\}$ bude linearno zavisan.

24. Dokažite da je dvočlani skup $S = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ linearno zavisan ako i samo ako su radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ kolinearni.

RADIJVEKTORI. ALGEBARSKE OPERACIJE S RADIJVEKTORIMA. LINEARNA (NE)ZAVISNOST SKUPA RADIJVEKTORA.

25. Neka je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan, ali fiksiran realan broj. Pokažite da je skup $S = \{(a - 1, 2), (-1, a + 1)\}$ linearno nezavisan.

26. Neka je $S = \{a, b, c\} \subset V^3(O)$ linearno nezavisan skup vektora. Dokažite da je tada i skup $\{2014 \cdot a, (-2015) \cdot b, 2016 \cdot c\}$ linearno nezavisan. Vrijedi li analogna tvrdnja ako koeficijente 2014, (–2015) i 2016 zamijenimo bilo kojim realnim brojevima α, β i γ takvima da je njihov umnožak različit od nule? Obrazložite svoj odgovor.

27. Neka je $S = \{a, b, c\} \subset V^3(O)$ linearno nezavisan skup vektora. Ispitajte jesu li i skupovi $A = \{a, a + b, a + b + c\}$, $B = \{a + b, b + c, c + a\}$ i $C = \{a - b, b - c, c - a\}$ također linearno nezavisni.

28. Ispitajte je li uređen skup B baza prostora $V^3(O)$ i precizno obrazložite sve svoje tvrdnje ako je:

a) $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0))$;
b) $B = ((0, 1, 0), (0, 0, 1))$;
c) $B = ((1, 0, 0), (0, 0, 1))$;
d) $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$;
e) $B = ((-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$;
f) $B = ((1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1))$;
g) $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1))$;
h) $B = ((1, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 0, 1))$;
i) $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -2, 0))$;
j) $B = ((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -2))$;
k) $B = ((1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3))$;
l) $B = ((1, 2, -3), (1, -3, 2), (-5, 2, 3))$;
m) $B = ((1, 2, 3), (-1, 2, 3), (-3, 2, 1))$;
n) $B = ((2, 1, -3), (3, 2, -5), (1, -1, 1))$;
o) $B = ((0, -1, 1), (1, 0, 2), (1, -2, 0))$;
p) $B = ((1, 0, -1), (0, -1, 1), (2015, 2014, -1))$;
q) $B = ((1, 0, 1), (2, 0, 2), (2014, 2016, 2018))$;
r) $B = ((\pi, 0, 0), (0, \pi, 2 \cdot \pi), (0, 0, 0))$;
s) $B = ((\pi, 0, 0), (0, 2 \cdot \pi, \pi), (1, 0, 1))$;
t) $B = ((6, 2, -7), (-2, -1, 3), (-1, 1, -1))$;
u) $B = ((6, 9, 14), (1, 1, 1), (-1, -2, -3))$;
v) $B = ((0, -7, 1), (-12, 8, -1), (-1, 2, 0))$;
w) $B = ((1003, 1005, 1007), (2014, 2016, 2018), (3013, 3016, 3020))$;
x) $B = ((\pi, \pi^2, \pi^3), (1 - \pi, 1 - \pi^2, 1 - \pi^3), (1, 1, 1))$;
y) $B = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{3}, \frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)\right)$;
z) $B = ((\log 2, \log 3, \log 4), (\ln 2, \ln 3, \ln 4), (\sin 2°, \sin 3°, \sin 4°))$.

RADIJVEKTORI. ALGEBARSKE OPERACIJE S RADIJVEKTORIMA. LINEARNA (NE)ZAVISNOST SKUPA RADIJVEKTORA.

29. Neka su a_1, a_2 i a_3 proizvoljni realni brojevi različiti od nule. Dokažite da je uređeni skup $S = ((a_1, 0, 0), (0, a_2, 0), (0, 0, a_3))$ baza prostora $V^3(O)$.

30. Neka je $B = (b_1, b_2, b_3)$ bilo koja baza prostora $V^3(O)$. Jesu li tada i skupovi $B_1 = (b_1, b_1 + b_1, b_1 + b_2 + b_3)$ i $B_2 = (b_1 - 2 \cdot b_2, b_2 - 2 \cdot b_3, b_3 - 2 \cdot b_1)$ baze istoga prostora? Obrazložite svoj odgovor.

31. Neka je $B = (b_1, b_2, b_3)$ bilo koja baza prostora $V^3(O)$. Uz koji uvjet na vektor b_4 će i skup $B_1 = (b_1, b_2, b_4)$ biti baza toga prostora? Obrazložite svoj odgovor.

32. Zadane su točke $A = (1, 0, 2)$ i $B = (a^2, 0, 3 - a)$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ parametar. Odredite vrijednost a tako da vrijedi jednakost $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

33. Zadane su točke $A = (a + 1, 1 - a, a)$ i $B = (2,1,0)$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ parametar. Odredite vrijednost a tako da vrijedi jednakost $\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = 3 \cdot \sqrt{5}$.

34. Zadane su točke $A = (1, 3, 2)$, $B = (0, 3, 1)$ i $C = (0, 0, 1)$.

a) Dokažite da je uređeni skup $S = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ baza prostora $V^3(O)$.
b) Prikažite radijvektor kojemu je krajnja točka $D = (4,3,6)$ kao linearnu kombinaciju radijvektora koji tvore bazu S.
c) Pokažite da su točke O, A, B i C vrhovi tetraedra.
d) Izračunajte oplošje i obujam tetraedra $OABC$.
e) Izračunajte duljine svih četiriju visina tetraedra $OABC$.

35. Zadane su točke $A = (-1, -2, 1)$, $B = (2, 0, -1)$ i $C = (1, 0, -2)$.

a) Dokažite da je uređeni skup $S = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ baza prostora $V^3(O)$.
b) Prikažite radijvektor kojemu je krajnja točka $D = (1, 4, 3)$ kao linearnu kombinaciju radijvektora koji tvore bazu S.
c) Pokažite da su točke O, A, B i C vrhovi tetraedra.
d) Izračunajte oplošje i obujam tetraedra $OABC$.
e) Izračunajte duljine svih četiriju visina tetraedra $OABC$.

36. Zadane su točke $A = (1, 0, a)$, $B = (-1, 1, 1)$ i $C = (1, 0, 1)$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ parametar.

a) Odredite vrijednost a tako da točke O, A, B i C tvore četverokut.
b) Izračunajte opseg i površinu četverokuta $OABC$.
c) Izračunajte mjeru kuta uz svaki pojedini vrh četverokuta $OABC$.
d) Izračunajte mjeru kuta kojega zatvaraju dijagonale četverokuta $OABC$.

37. Zadane su točke $A = (a, 0, 1)$, $B = (2, 0, -1)$ i $C = (1, 2, 1)$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ parametar.

a) Odredite vrijednost a tako da točke O, A, B i C budu komplanarne.

RADIJVEKTORI. ALGEBARSKE OPERACIJE S RADIJVEKTORIMA. LINEARNA (NE)ZAVISNOST SKUPA RADIJVEKTORA.

b) Dokažite da su za vrijednost parametra a iz **a)** zadatka točke O, A i B kolinearne, pa odredite omjer u kojemu točka O dijeli dužinu $\overline{AB}$.
c) Izračunajte opseg i površinu trokuta ABC.
d) Izračunajte sva tri unutrašnja kuta trokuta ABC.
e) Izračunajte duljine svih triju visina trokuta ABC.

38. Zadane su točke $A = (0, a, 1)$ i $B = (-2, 2, a)$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ parametar.

a) Odredite vrijednost a tako da točke O, A i B budu vrhovi pravokutnika, pa izračunajte koordinate četvrtoga vrha toga pravokutnika.
b) Izračunajte oplošje i obujam paralelepipeda kojemu je osnovka pravokutnik iz **a)** podzadatka, a jedna stranica $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$.

39. Zadane su točke $A = (a, 1, -a)$ i $B = (2, 3, 1)$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ parametar.

a) Odredite vrijednost a tako da točke O, A i B budu vrhovi pravokutnoga trokuta s pravim kutom kod vrha O.
b) Izračunajte mjere svih unutrašnjih kutova trokuta OAB.
c) Izračunajte oplošje i obujam tetraedra kojemu je osnovka pravokutan trokut iz **a)** podzadatka, a jedna stranica $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$.

40. Zadane su točke $A = (1, -1, 2)$ i $B = (0, 1, 1)$. Odredite sve točke na osi aplikata tako da obujam prizme razapete radijvektorima $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ bude 1 kub. jed.

41. Zadani su radijvektori $\vec{a} = (ć, 0, -1)$ i $\vec{b} = (1, 1, 0)$. Odredite vrijednost $ć \in \mathbb{R}$ tako da površina usporednika razapetoga zadanim radijvektorima bude jednaka $3 \cdot \sqrt{2}$ kv. jed.

42. Odredite sve vrijednosti $a \in \mathbb{R}$ za koje je skup $S = \{(0, a, 1), (a, 0, -1), (1, 0, -a)\}$ linearno zavisan.

43. Zadani su radijvektori $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + 6 \cdot \vec{k}$. Izračunajte kut između radijvektora $\vec{c}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ i iskažite ga u radijanima.

44. Izračunajte obujam tetraedra čiji su vrhovi u točkama $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (-3, -2, -1)$ i $D = (0, 0, -6)$.

45. Zadani su vrhovi trokuta $A = (0, 3, -1)$, $B = (1, 5, 2)$ i $C = (2, 0, -2)$. Isključivo vektorskim računom odredite:

a) veličinu unutrašnjega kuta pri vrhu A toga trokuta;
b) ploštinu trokuta ABC.

46. Točke $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ i $C = (0, -4, 0)$ su tri uzastopna vrha usporednika $ABCD$. Isključivo vektorskim računom izračunajte koordinate četvrtoga vrha D, ploštinu četverokuta, sve unutrašnje kutove četverokuta i šiljasti kut kojega zatvaraju njegove dijagonale.