FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

1. Neka je S skup svih živućih državljana Republike Hrvatske 1.11.2015., a f preslikavanje koje svakom elementu skupa S pridružuje njegov horoskopski znak (bez podznaka).

a) Pokažite da je f funkcija, pa odredite njezinu domenu i kodomenu.
b) Je li f injekcija? Je li f surjekcija? Je li f bijekcija? Obrazložite svoje odgovore.

2. Neka je S skup svih živućih državljana Republike Hrvatske 1.11.2015., a g preslikavanje koje svakom elementu skupa S pridružuje ukupan broj njegove biološke djece.

a) Pokažite da je g funkcija, pa odredite njezinu domenu i kodomenu.
b) Je li g injekcija? Je li g surjekcija? Je li g bijekcija? Obrazložite svoje odgovore.

3. Ispitajte injektivnost, surjektivnost i bijektivnost sljedećih funkcija:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2015 \cdot x;$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2016 - 2017 \cdot x;$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1;$

d) $f : \mathbb{R} \to [2, +\infty\rangle, f(x) = x^2 + 2;$

e) $f : [0, +\infty\rangle \to [3, +\infty\rangle, f(x) = x^2 + 3;$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - x^2;$

g) $f : \mathbb{R} \to \langle -\infty, 2], f(x) = 2 - x^2;$

h) $f : \langle -\infty, 0] \to \langle -\infty, 3], f(x) = 3 - x^2;$

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3;$

j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 10^x;$

k) $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle, f(x) = 2015^x;$

l) $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle, f(x) = \left(\frac{2014}{2015}\right)^x;$

m) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2015^x;$

n) $f : \mathbb{R} \to \langle -\infty, 0\rangle, f(x) = -2013^x;$

o) $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \log x;$

p) $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \log x + 1;$

q) $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - \log x;$

r) $f : \langle -1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = -\log(x + 1);$

s) $f : \langle 2, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \log(x - 2);$

t) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x;$

u) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x;$ (*Naputak*: Nacrtajte graf funkcije f.)

FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

v) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], f(x) = \sin x$; (*Naputak*: Nacrtajte graf funkcije f.)

w) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$;

x) $f : [0, \pi] \to [-1, 1], f(x) = \cos x$; (*Naputak*: Nacrtajte graf funkcije f.)

y) $f : \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3 \cdot \pi}{2} \right\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$; (*Naputak*: Nacrtajte graf funkcije f.)

z) $f : \langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$; (*Naputak*: Nacrtajte graf funkcije f.)

4. **a)** Neka je $f : A \to B$ bijekcija, pri čemu su $A, B \subset \mathbb{R}$ konačni skupovi. Dokažite da su skupovi A i B jednakobrojni, tj. da oba skupa imaju jednak broj međusobno različitih elemenata.

b) Vrijedi li obrat tvrdnje iz **a)** podzadatka, tj. ako su A i B konačni skupovi koji se sastoje od jednako mnogo međusobno različitih elemenata, postoji li barem jedna bijekcija kojoj je domena skup A, a kodomena skup B? Obrazložite svoj odgovor

5. Odredite inverz sljedećih bijekcija:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2015$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2016 - x$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2017 \cdot x + 2018$;

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2020 - 2019 \cdot x$;

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 1$;

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - x^3$;

h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 8 \cdot x^3$;

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 8 \cdot x^3 + 27$;

j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (-27) \cdot x^3$;

k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - 64 \cdot x^3$;

l) $f : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle, f(x) = \sqrt{x}$;

m) $f : [0, +\infty\rangle \to \langle -\infty, 2], f(x) = 2 - \sqrt{x}$;

n) $f : [1, +\infty\rangle \to [1, +\infty\rangle, f(x) = \sqrt{x-1} + 1$;

o) $f : [2, +\infty\rangle \to \langle -\infty, 4], f(x) = 4 - \sqrt{x+2}$;

p) $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle, f(x) = 2015^{x-1}$;

q) $f : \mathbb{R} \to \langle -1, +\infty\rangle, f(x) = e^x - 1$;

r) $f : \mathbb{R} \to \langle -\infty, 2\rangle, f(x) = 2 - e^x$;

s) $f : \mathbb{R} \to \langle -\infty, 5\rangle, f(x) = 5 - 2 \cdot e^x$;

FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

t) $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R},\ f(x) = \log x$;

u) $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x + 1$;

v) $f : \langle -2, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + 2)$;

w) $f : \langle 3, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = 2016 - \ln(x - 3)$;

x) $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle,\ f(x) = \ln(x^2 + 1)$;

y) $f : \langle 2, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^3 - 8)$;

z) $f : \langle -2, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - \ln(x^4 + 16)$.

6. Pokažite da je za svaku realnu funkciju f moguće odrediti *jedinstvene* skupove A, $B \subseteq \mathbb{R}$ koji imaju sljedeća svojstva:

1) f je bijekcija sa skupa A u skup B;
2.) Ne postoje skupovi A_1, $B_1 \subseteq \mathbb{R}$ takvi da je $A \subset A_1$, $B \subset B_1$ i f bijekcija sa skupa A_1 u skup B_1.

7. Odredite prirodno područje definicije (domenu) sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x) = x + 2016$;
b) $f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3$;
c) $f(x) = x^3 + 8$;

d) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

e) $f(x) = \frac{1}{x+1}$;

f) $f(x) = \frac{x}{x+2}$;

g) $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$;

h) $f(x) = \frac{2015}{4-x^2}$;

i) $f(x) = \frac{2013}{x^2+10\cdot x+25}$;

j) $f(x) = \frac{x+7}{x^2-12\cdot x+36}$;

k) $f(x) = \frac{x-2}{4\cdot x^2+20\cdot x+25}$;

l) $f(x) = \frac{10-x}{49\cdot x^2-84\cdot x+36}$;

m) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$;

FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

n) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{2}{x^3 + 27} + \frac{3}{x^4 - 16}$;

o) $f(x) = \frac{1}{9 - x^2} - \frac{2}{x^3 - 8} + \frac{3}{256 - x^4}$;

p) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$;

q) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{2 - x}} + \sqrt{x + 2}$;

r) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot x - 2}}$;

s) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} + \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$;

t) $f(x) = \sqrt{6 - x - x^2} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$;

u) $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}}$;

v) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{x + 2}}$;

w) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - x}}$;

x) $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$;

y) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{x + 2}}$;

z) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{3 - x}}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{2 - x}}$.

8. Odredite jesu li realne funkcije f i g jednake i obrazložite svoj odgovor ako su:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ i $g(x) = x + 1$;

b) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - x + 1}$ i $g(x) = x + 1$;

c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2 \cdot x + 1}$ i $g(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$;

d) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2 \cdot x - 3}$ i $g(x) = 1 + \frac{1}{x - 3}$;

e) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ i $g(x) = 1$;

f) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ i $g(x) = 1$;

FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

g) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ i $g(x)=x^2+1$;

h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}$ i $g(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}$;

i) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2014-x}{x^2+2014}}$ i $g(x)=\dfrac{\sqrt{2014-x}}{\sqrt{x^2+2014}}$;

j) $f(x)=\sqrt{\dfrac{9-x}{x^3+8}}$ i $g(x)=\dfrac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x^3+8}}$;

k) $f(x)=\sqrt{e^{2\cdot x}}$ i $g(x)=e^x$;

l) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^{3\cdot x}}}$ i $g(x)=e^{-x}$;

m) $f(x)=e^{x+1}$ i $g(x)=e\cdot e^x$;

n) $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{e^x}$ i $g(x)=e$;

o) $f(x)=\dfrac{e^{2\cdot x+1}}{e^{x+1}}$ i $g(x)=e^x$;

p) $f(x)=e^{x+\ln x}$ i $g(x)=x\cdot e^x$;

q) $f(x)=e^{x-\ln x}$ i $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$;

r) $f(x)=\ln(x^2)$ i $g(x)=2\cdot\ln x$;

s) $f(x)=\ln(x^3)$ i $g(x)=3\cdot\ln x$;

t) $f(x)=\ln(x^2-1)$ i $g(x)=\ln(x-1)+\ln(x+1)$;

u) $f(x)=\ln(x^3-1)$ i $g(x)=\ln(x-1)+\ln(x^2+x+1)$;

v) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right)$ i $g(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\ln x$;

w) $f(x)=\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)$ i $g(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\ln x$;

x) $f(x)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)$ i $g(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\left[\ln(x-2)+\ln(x+2)\right]$

y) $f(x)=\ln\left(\sqrt[4]{x^4-16}\right)$ i $g(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\left[\ln(x-2)+\ln(x+2)+\ln(x^2+4)\right]$;

z) $f(x)=\ln\left(\sqrt[5]{x^8+27}\right)$ i $g(x)=\dfrac{1}{5}\cdot\left[\ln(x^2+3)+\ln(x^4-3\cdot x^2+9)\right]$.

9. Klasificirajte sljedeće funkcije s obzirom na omeđenost, monotonost i (ne)parnost:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2\cdot x$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(-2014)\cdot x$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4\cdot x+1$;

FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{2}\cdot x+1;$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5-7\cdot x;$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-\frac{1}{3}\cdot x+2;$

g) $f:[-1, 1]\to\mathbb{R}, f(x)=8\cdot x+9;$

h) $f:[-4, 4]\to\mathbb{R}, f(x)=7-11\cdot x;$

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1;$

j) $f:[0, 2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2;$

k) $f:[-1, 1]\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2;$

l) $f:[-5, 5]\to\mathbb{R}, f(x)=1-x^2;$

m) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, \text{ za } x<0;\\ -1, \text{ za } x\geq 0;\end{cases}$

n) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x+2};$

o) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-1, \text{ za } x<0;\\ 0, \text{ za } x=0;\\ 1, \text{ za } x\geq 0;\end{cases}$

p) $f:\langle -2013, -2012]\cup[2014, 2015\rangle\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, \text{ za } 2014\leq x<2015;\\ -1, \text{ za } -2013<x\leq -2012;\end{cases}$

q) $f:[-2013, -2012\rangle\cup\langle 2014, 2015]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2013, \text{ za } 2014<x\leq 2015;\\ -2011, \text{ za } -2013\leq x<-2012;\end{cases}$

r) $f:[0, 1]\to\mathbb{R}, f(x)=2\cdot e^x;$

s) $f:[-1, 1]\to\mathbb{R}, f(x)=-e^x;$

t) $f:[-2012, 2012]\to\mathbb{R}, f(x)=(-2)\cdot e^{x-1};$

u) $f:\langle 0, +\infty\rangle\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+1;$

v) $f:\langle 0, 1\rangle\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+2;$

w) $f:\langle 0, 2\rangle\to\mathbb{R}, f(x)=1-\log_2 x;$

x) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x;$

y) $f:[0, \pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x;$

z) $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{tg} x.$

10. a) Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neparna funkcija. Pokažite da je tada nužno $f(0)=0$.

b) Vrijedi li obrat tvrdnje iz **a)** podzadatka, tj. ako za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vrijedi jednakost $f(0)=0$, je li tada f neparna funkcija? Obrazložite svoj odgovor.

FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

11. **a)** Pokažite da niti jedna parna realna funkcija ne može biti injekcija (pa niti bijekcija).
b) Postoji li parna surjektivna realna funkcija? Ako postoji, navedite primjer takve funkcije. Ako ne postoji, obrazložite svoj odgovor.

12. Neka je P skup kojega tvore sve parne realne funkcije jedne realne varijable, a N skup kojega tvore sve neparne realne funkcije jedne realne varijable. Odredite $P \cap N$.

13. Nacrtajte graf sljedećih realnih funkcija i klasificirajte ih s obzirom na omeđenost i monotonost ako je:

a) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je parna;} \\ f(x) = 1, \text{ za svaki } x \in [0,1]; \end{cases}$

b) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je neparna;} \\ f(x) = -2, \text{ za svaki } x \in [-1,0\rangle; \end{cases}$

c) $\begin{cases} D_f = [-\pi,\pi]; \\ f \text{ je parna;} \\ f(x) = 2 \cdot x, \text{ za svaki } x \in [0,\pi]; \end{cases}$

d) $\begin{cases} D_f = [-\pi,\pi]; \\ f \text{ je neparna;} \\ f(x) = (-2) \cdot x, \text{ za svaki } x \in [-\pi,0\rangle; \end{cases}$

e) $\begin{cases} D_f = [-4,4]; \\ f \text{ je parna;} \\ f(x) = 2 \cdot x + 1, \text{ za svaki } x \in [0,4]; \end{cases}$

f) $\begin{cases} D_f = [-4,4]; \\ f \text{ je neparna;} \\ f(x) = 3 - 2 \cdot x, \text{ za svaki } x \in [-4,0\rangle; \end{cases}$

g) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je parna;} \\ f(x) = 2 \cdot x^2, \text{ za svaki } x \in [0,1]; \end{cases}$

h) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je neparna;} \\ f(x) = (-2) \cdot x^2, \text{ za svaki } x \in [-1,0\rangle; \end{cases}$

FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

i) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je parna}; \\ f(x) = x^3, \text{ za svaki } x \in [0,1]; \end{cases}$

j) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je neparna}; \\ f(x) = -x^3, \text{ za svaki } x \in [-1,0\rangle; \end{cases}$

k) $\begin{cases} D_f = [-2,2]; \\ f \text{ je parna}; \\ f(x) = e^x + 1, \text{ za svaki } x \in [0,2]; \end{cases}$

l) $\begin{cases} D_f = [-3,3]; \\ f \text{ je neparna}; \\ f(x) = 1 - e^x, \text{ za svaki } x \in [-3,0\rangle; \end{cases}$

m) $\begin{cases} D_f = [-3,3]; \\ f \text{ je parna}; \\ f(x) = -e^{-x}, \text{ za svaki } x \in [0,3]; \end{cases}$

n) $\begin{cases} D_f = [-2,2]; \\ f \text{ je neparna}; \\ f(x) = e^{-x}, \text{ za svaki } x \in [-2,0\rangle; \end{cases}$

o) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je parna}; \\ f(x) = \ln x, \text{ za svaki } x \in \langle 0,1]; \end{cases}$

p) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je neparna}; \\ f(x) = \ln(-x), \text{ za svaki } x \in [-1,0\rangle; \end{cases}$

q) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je parna}; \\ f(x) = \ln(x+1), \text{ za svaki } x \in \langle -1,0]; \end{cases}$

r) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je neparna}; \\ f(x) = \ln(2-x), \text{ za svaki } x \in [-1,0\rangle; \end{cases}$

s) $\begin{cases} D_f = [-2,2]; \\ f \text{ je parna}; \\ f(x) = 1 - x - e^{-x}, \text{ za svaki } x \in [-2,0]; \end{cases}$

t) $\begin{cases} D_f = [-2,2]; \\ f \text{ je neparna}; \\ f(x) = 1 + x + e^{-x}, \text{ za svaki } x \in [-2,0\rangle; \end{cases}$

u) $\begin{cases} D_f = [-2,2]; \\ f \text{ je parna}; \\ f(x) = x + \ln(-x), \text{ za svaki } x \in [-2,0\rangle; \end{cases}$

v) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je neparna}; \\ f(x) = x + \ln x, \text{ za svaki } x \in \langle 0,1]; \end{cases}$

w) $\begin{cases} D_f = [-2,2]; \\ f \text{ je parna}; \\ f(x) = \ln(x^2), \text{ za svaki } x \in [-2,0\rangle; \end{cases}$

x) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je neparna}; \\ f(x) = \ln(x^3), \text{ za svaki } x \in \langle 0,1]; \end{cases}$

y) $\begin{cases} D_f = [-2,2]; \\ f \text{ je parna}; \\ f(x) = x + \ln(x^4), \text{ za svaki } x \in [-2,0\rangle; \end{cases}$

z) $\begin{cases} D_f = [-1,1]; \\ f \text{ je neparna}; \\ f(x) = x - \ln(x^5), \text{ za svaki } x \in \langle 0,1]. \end{cases}$

14. Nacrtajte grafove sljedećih realnih funkcija, pa ih klasificirajte s obzirom na omeđenost, monotonost i (ne)parnost:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{za } x \geq 1; \\ x - 1, & \text{za } x < 1; \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 - 2 \cdot x, & \text{za } x \geq \dfrac{1}{2}; \\ 2 \cdot x - 1, & \text{za } x < \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

c) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2\cdot x, & \text{za } -1\le x<0;\\ (-2)\cdot x, & \text{za } 0\le x\le 1;\end{cases}$

d) $f:[-1,1\rangle\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}3\cdot x, & \text{za } -1\le x<0;\\ (-3)\cdot x, & \text{za } 0\le x<1;\end{cases}$

e) $f:\langle -1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}4\cdot x, & \text{za } -1<x\le 0;\\ (-4)\cdot x, & \text{za } 0<x\le 1;\end{cases}$

f) $f:\langle -1,1\rangle\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}5\cdot x, & \text{za } -1<x\le 0;\\ (-5)\cdot x, & \text{za } 0<x<1;\end{cases}$

g) $f:[-2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}3\cdot x, & \text{za } -2\le x\le 0;\\ \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x, & \text{za } 0<x\le 2;\end{cases}$

h) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2\cdot|x+1|, & \text{za } |x|\le\frac{1}{2};\\ -2\cdot|x+1|, & \text{za } \frac{1}{2}<|x|\le 1;\end{cases}$

i) $f:[-1,1\rangle\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2\cdot|x+1|, & \text{za } |x|\le\frac{1}{2} \text{ ili } x=-1;\\ -2\cdot|x+1|, & \text{za } \frac{1}{2}<|x|<1;\end{cases}$

j) $f:\langle -2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}4\cdot|x+1|, & \text{za } |x|\le 1;\\ -4\cdot|x+1|, & \text{za } 1<|x|<2 \text{ ili } x=2;\end{cases}$

k) $f:\langle -3,3\rangle\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}|x-2|, & \text{za } |x|\le 2;\\ |x-3|, & \text{za } 2<|x|<3;\end{cases}$

l) $f:[-3,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}|x-1|+|x-2|, & \text{za } 1<|x|\le 3;\\ |2\cdot x-1|-|1-2\cdot x|, & \text{za } |x|\le 1;\end{cases}$

m) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\ln x, & \text{za } x>0;\\ 1-x, & \text{za } -2\le x\le 0,\\ \ln\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x\right], & \text{za } x<-2;\end{cases}$

n) $f:[-2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\ln(x-1), & \text{za } 1<|x|\le 2;\\ 1-x, & \text{za } |x|\le 1,\end{cases}$

o) $f:[-1,1\rangle\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\ln(2\cdot x-1), & \text{za } \frac{1}{2}\le|x|<1;\\ 1-x, & \text{za } |x|<\frac{1}{2} \text{ ili } x=-1;\end{cases}$

FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

p) $f : \langle -2, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln(x-1), \text{ za } 1 < |x| < 2 \text{ ili } x = 2; \\ 1 - 2 \cdot x, \text{ za } |x| \le 1; \end{cases}$

q) $f : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln|2 \cdot x - 1|, \text{ za } \frac{1}{2} < |x| < 1; \\ |1 - x|, \text{ za } |x| \le \frac{1}{2}; \end{cases}$

r) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-x}, \text{ za } x > 0 \\ 0, \text{ za } x = 0; \\ -e^{-x}, \text{ za } x < 0; \end{cases}$

s) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -e^{-2 \cdot x}, \text{ za } x > 0 \\ 0, \text{ za } x = 0; \\ e^{-2 \cdot x}, \text{ za } x < 0; \end{cases}$

t) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{x} - 1, \text{ za } 1 < |x| \le 2; \\ 1 - e^{x}, \text{ za } |x| \le 1; \end{cases}$

u) $f : [-1, 1\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 - e^{x+1}, \text{ za } \frac{1}{2} \le |x| < 1 \text{ ili } x = -1; \\ -e^{2 \cdot x}, \text{ za } |x| < \frac{1}{2}; \end{cases}$

v) $f : \langle -1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{1-x}, \text{ za } \frac{1}{2} < |x| < 1 \text{ ili } x = 1; \\ e^{(-2) \cdot x}, \text{ za } |x| \le \frac{1}{2}; \end{cases}$

w) $f : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{x}, \text{ za } \frac{1}{2} < |x| < 1; \\ -2 \cdot e^{-x}, \text{ za } |x| \le \frac{1}{2}; \end{cases}$

x) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln x, \text{ za } |x| \le 1; \\ e^{x} - e, \text{ za } |x| > 1 \end{cases}$

y) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln(-x), \text{ za } x < 0; \\ 1 - e^{-x}, \text{ za } x > 0; \end{cases}$

z) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{x}, \text{ za } x > 0; \\ 1, \text{ za } -1 \le x \le 0; \\ \ln(-e \cdot x), \text{ za } x < -1. \end{cases}$

15. Neka su $a \in \mathbb{R}$ parametar i $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ funkcija. Definiramo funkcije $f_1, f_2 : [-a, a] \to \mathbb{R}$ s

FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[f(x) + f(-x) \right]$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[f(x) - f(-x) \right]$$

Pokažite da je f_1 parna, a f_2 neparna funkcija, te da za svaki $x \in D_f$ vrijedi jednakost $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. (Otuda slijedi da svaku funkciju f definiranu na nekom segmentu možemo prikazati kao zbroj parne i neparne funkcije.)

16. Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijekcije. Definiramo realne funkcije $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$h_1(x) = f(x) + g(x),$$
$$h_2(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Jesu li funkcije h_1 i h_2 nužno bijekcije? Obrazložite svoj odgovor.

17. a) Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ parne funkcije. Definiramo realnu funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Pokažite da je h parna funkcija.

b) Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neparne funkcije. Definiramo realnu funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Pokažite da je h parna funkcija.

c) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ parna, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neparna funkcija. Definiramo realnu funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Pokažite da je h neparna funkcija.

18. Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realne funkcije. Definiramo funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

Klasificirajte funkciju h s obzirom na (ne)parnost ako su:

a) f i g parne funkcije;
b) f i g neparne funkcije;
c) f parna, a g neparna funkcija.

19. a) Ako su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odozdo omeđene funkcije, jesu li takve i funkcije $h_1 = f + g$ i $h_2 = f \cdot g$? Obrazložite svoj odgovor.

b) Ako su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odozgo omeđene funkcije, jesu li takve i funkcije $h_1 = f + g$ i $h_2 = f \cdot g$? Obrazložite svoj odgovor.

c) Ako su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ omeđene funkcije, jesu li takve i funkcije $h_1 = f + g$ i $h_2 = f \cdot g$? Obrazložite svoj odgovor.

20. a) Ako su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuće funkcije, jesu li takve i funkcije $h_1 = f + g$ i $h_2 = f \cdot g$? Obrazložite svoj odgovor.

FUNKCIJE. REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

b) Ako su f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuće funkcije, jesu li takve i funkcije $h_1 = f + g$ i $h_2 = f \cdot g$? Obrazložite svoj odgovor.

c) Ako su f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ padajuće funkcije, jesu li takve i funkcije $h_1 = f + g$ i $h_2 = f \cdot g$? Obrazložite svoj odgovor.

d) Ako su f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo padajuće funkcije, jesu li takve i funkcije $h_2 = f + g$ i $h_2 = f \cdot g$? Obrazložite svoj odgovor.