



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

OGLEDNI PRIMJERI 3. KOLOKVIJA IZ MATEMATIKE 2

namijenjeni rješavanju na demonstraturama

PRIMJER 1.

OBAVEZNI ZADATAK: Odredite opće rješenje obične diferencijalne jednačbe $y'' - 3 \cdot y' - 10 \cdot y = 0$.

1. Isključivo deriviranjem provjerite da je funkcija $y = x \cdot \ln x + \frac{1}{x}$ partikularno rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$x^3 \cdot y'' - x^2 \cdot y' + x \cdot y = 4.$$

2. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' - y = 2 \cdot e^x, \\ y(0) = 7, \\ y'(0) = 8. \end{cases}$$

3. Napišite jednačbu krivulje koja prolazi točkom $T = (1, 1)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera normale povučene u bilo kojoj njezinoj točki jednak količniku apscise i ordinate pripadnoga dirališta. Potom nacrtajte dobivenu krivulju.

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme bez primjene Laplaceovih transformacija:

4.
$$\begin{cases} \cos(2 \cdot x) \cdot y' + 2 \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot y = 2, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 7 \cdot (y' + y) = (x - 1) \cdot y^2, \\ y(7) = 1. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} (x^2 + 1) \cdot y' = x \cdot y, \\ y(\sqrt{3}) = 2. \end{cases}$$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

OGLEDNI PRIMJERI 3. KOLOKVIJA IZ MATEMATIKE 2

namijenjeni rješavanju na demonstraturama

PRIMJER 2.

OBAVEZNI ZADATAK: Odredite opće rješenje obične diferencijalne jednačbe $y'' + 6 \cdot y' + 13 \cdot y = 0$.

1. Isključivo deriviranjem provjerite da je funkcija $y = (1 - e^x) \cdot x - 2012$ partikularno rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$(x + 1) \cdot y'' - (x + 2) \cdot y' + x + 2 = 0.$$

2. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' + y' + y = \cos x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

3. Napišite jednačbu krivulje koja prolazi točkom $T = (1, 1)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera bilo koje njezine tangente geometrijska sredina koordinata pripadnoga dirališta. (*Napomena:* Geometrijska sredina strogo pozitivnih realnih brojeva x i y je broj $\sqrt{x \cdot y}$.)

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme bez primjene Laplaceovih transformacija:

4.
$$\begin{cases} \operatorname{ch}(2 \cdot x) \cdot y' - 2 \cdot \operatorname{sh}(2 \cdot x) \cdot y = 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 2 \cdot y' + y + \frac{1}{y} = 0, \\ y(-\ln 2) = 1. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x \cdot y \cdot y' = x^2 + 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

OGLEDNI PRIMJERI 3. KOLOKVIJA IZ MATEMATIKE 2

namijenjeni rješavanju na demonstraturama

PRIMJER 3.

OBAVEZNI ZADATAK: Odredite opće rješenje obične diferencijalne jednačbe $y'' + 12 \cdot y' + 36 \cdot y = 0$.

1. Isključivo deriviranjem provjerite da je funkcija $y = \frac{1}{3} \cdot x^2 + x + \frac{1}{x}$ partikularno rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' - y = x^2.$$

2. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' - y = 4 \cdot \frac{x}{e^x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

3. Napišite jednačbu krivulje koja prolazi točkom $T = (1, 2)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera normale povučene u bilo kojoj njezinoj točki dvostruko veći od umnoška apscise i ordinate pripadnoga dirališta.

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme bez primjene Laplaceovih transformacija:

4.
$$\begin{cases} \operatorname{ch} \frac{x}{2} \cdot y - 2 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2} \cdot y' = 1, \\ y(2 \cdot \ln 2) = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} y' - 1 = 2 \cdot \frac{y}{x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} y' \cdot \operatorname{tg} x = y \cdot \ln y, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e. \end{cases}$$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

OGLEDNI PRIMJERI 3. KOLOKVIJA IZ MATEMATIKE 2

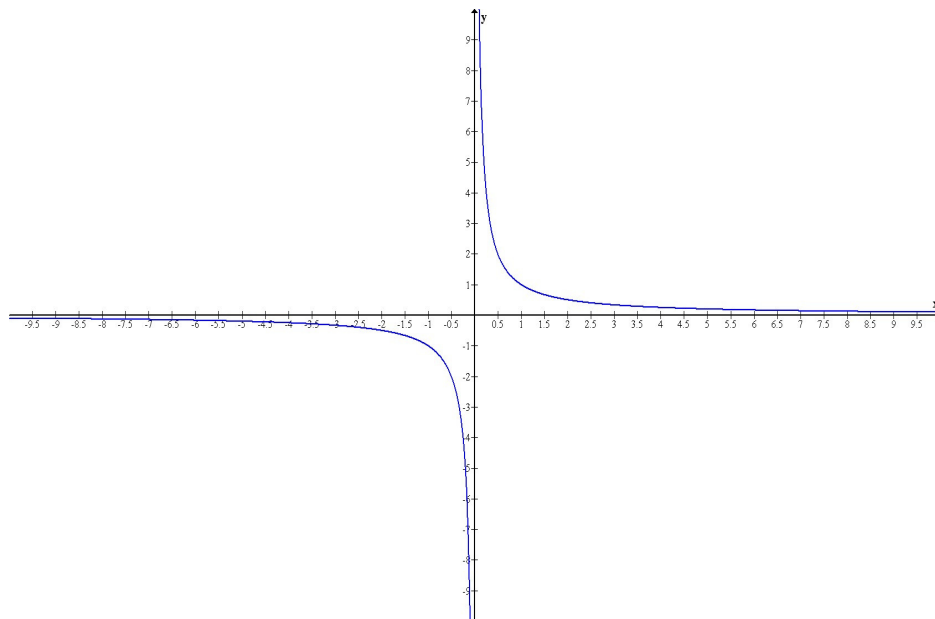
namijenjeni rješavanju na demonstraturama

REZULTATI ZADATAKA

PRIMJER 1.

OBAVEZNI ZADATAK: $y = C_1 \cdot e^{-2 \cdot x} + C_2 \cdot e^{5 \cdot x}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

1. $y' = \ln x + 1 - \frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \Rightarrow x^3 \cdot y'' - x^2 \cdot y' + x \cdot y = 4$.
2. $y = (x + 7) \cdot e^x$.
3. $y = \frac{1}{x}$. Dobivena krivulja prikazana je na Slici 1.



Slika 1.

4. $y = \sin(2 \cdot x)$.
5. $y = \frac{7}{x}$.
6. $y = \sqrt{x^2 + 1}$.



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

OGLEDNI PRIMJERI 3. KOLOKVIJA IZ MATEMATIKE 2

namijenjeni rješavanju na demonstraturama

PRIMJER 2.

OBAVEZNI ZADATAK: $y = e^{-3 \cdot x} \cdot [C_1 \cdot \cos(2 \cdot x) + C_2 \cdot \sin(2 \cdot x)], C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$

1. $y' = 1 - (x+1) \cdot e^x, y'' = -(x+2) \cdot e^x \Rightarrow (x+1) \cdot y'' - (x+2) \cdot y' + x + 2 = 0.$
2. $y = \sin x.$
3. $y = \frac{1}{9} \cdot (x \cdot \sqrt{x} - 4)^2$ i $y = \frac{1}{9} \cdot (x \cdot \sqrt{x} + 2)^2.$
4. $y = \operatorname{sh}(2 \cdot x).$
5. $y = \sqrt{e^{-x} - 1}.$
6. $y = \sqrt{x^2 + 2 \cdot \ln x}.$

PRIMJER 3.

OBAVEZNI ZADATAK: $y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-6 \cdot x}, C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$

1. $y' = \frac{2}{3} \cdot x + 1 - \frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{3} + \frac{2}{x^3} \Rightarrow x^2 \cdot y'' + x \cdot y' - y = x^2.$
2. $y = -\frac{x^2 + x}{e^x}$
3. $y = \sqrt{4 - \ln x}.$
4. $y = \operatorname{ch} \frac{x}{2}.$
5. $y = x^2 - x.$
6. $y = e^{\sin x}.$