

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE	ZAVOD ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE KATEDRA ZA MATEMATIKU	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	Zadaci za demonstrature grupe A i B 11.1.2016.
---	---	---	--

1. Nađite globalne ekstreme realne funkcije $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ definirane pravilom $f(x) = x^3 - 3 \cdot x$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.
2. Nađite globalne ekstreme realne funkcije $g : [0, 3] \rightarrow \mathbf{R}$ definirane pravilom $g(y) = y \cdot (y - 3)^2$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.
3. Odredite domenu, intervale monotonosti i sve lokalne ekstreme sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

b) $g(t) = \frac{\ln t}{t^2}$;

c) $h(u) = \frac{2 \cdot u}{e^{2 \cdot u}}$;

d) $p : [0, 2 \cdot \pi] \rightarrow \mathbb{R}, p(v) = \sin v + \cos v$.

4. Koji od lokalnih ekstrema dobivenih u 3. zadatku su ujedno i globalni ekstremi? Obrazložite svoj odgovor.
5. Pravokutno gradilište površine 1 ha treba ograditi tako da se za ograđivanje potroši najmanje materijala. Odredite optimalne dimenzije gradilišta i izrazite ih u metrima. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite. (*Napomena:* 1 ha = 10 000 m².)
6. Izračunajte sljedeće granične vrijednosti primjenom L'Hôpital-Bernoullijeva pravila:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (x - \arctg x)}{x^3}$;

b) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (e^{\cos y} - e)}{\sin^2 y}$;

c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + t + 1}{e^t}$;

d) $\lim_{w \rightarrow -\infty} \frac{e^{2 \cdot w}}{w^3 - w^2 + w - 1}$.

REZULTATI ZADATAKA

1. Globalni minimum funkcije f jednak je -2 i postiže se za $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$.
Globalni maksimum funkcije f jednak je 2 i postiže se za $x_3 = -1$ i $x_4 = 2$.
2. Globalni minimum funkcije g jednak je 0 i postiže se za $y_1 = 0$ i $y_2 = 3$.
Globalni maksimum funkcije g jednak je 4 i postiže se za $y_3 = 1$.
3.
 - a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, intervali rasta: $\langle -\infty, -1 \rangle$ i $\langle 1, +\infty \rangle$, intervali pada $\langle -1, 0 \rangle$ i $\langle 0, 1 \rangle$,
točka lokalnoga minimuma: $T_1 = (1, 2)$, točka lokalnoga maksimuma: $T_2 = (-1, -2)$;
 - b) $D_g = \mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty \rangle$, interval rasta: $\langle 0, \sqrt{e} \rangle$, interval pada: $\langle \sqrt{e}, +\infty \rangle$,
točka lokalnoga maksimuma: $T = \left(\sqrt{e}, \frac{1}{2 \cdot e} \right)$;
 - c) $D_h = \mathbb{R}$, interval rasta: $\langle -\infty, \frac{1}{2} \rangle$, interval pada: $\langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$,
točka lokalnoga maksimuma: $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e} \right)$;
 - d) $D_p = [0, 2 \cdot \pi]$, intervali rasta: $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ i $\langle \frac{5}{4} \cdot \pi, 2 \cdot \pi \rangle$, interval pada: $\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4} \cdot \pi \rangle$,
točka lokalnoga minimuma: $T_1 = \left(\frac{5}{4} \cdot \pi, -\sqrt{2} \right)$, točka lokalnoga maksimuma: $T_2 = \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right)$.
4. Globalni ekstremi su lokalni ekstremi dobiveni u podzadacima **b)**, **c)** i **d)**, dok lokalni ekstremi dobiveni u **a)** podzadatku nisu globalni ekstremi.
Tvrdnja se provjeri koristeći dobivene intervale monotonosti i definiciju strogo rastuće, odnosno strogo padajuće funkcije.
5. $(x^*, y^*) = (100, 100)$, tj. gradilište treba biti kvadrat stranice 100 metara.
6.
 - a) $L = 1$;
 - b) $L = -e$;
 - c) $L = 0$;
 - d) $L = 0$.