Bojan Kovačić

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA SA DEMONSTRATURA I GRUPNIH KONZULTACIJA IZ MATEMATIKE 1

nerecenzirana verzija

Zagreb, siječanj 2020.

Sadržaj

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka u cijelosti obuhvaća gradivo predmeta *Matematika* 1 koje se predaje na 1. godini preddiplomskoga stručnoga studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu. Nastala je na temelju zadataka rješavanih na demonstraturama i grupnim konzultacijama koje su tijekom posljednjih nekoliko godina bili organizirane za sve zainteresirane studente kojima sam držao predavanja i vježbe iz navedenoga predmeta. Zbog toga se može reći da je (doslovno) svaki zadatak u ovoj zbirci „akademski ispitan“ na studentima – slušačima navedenoga predmeta.

Upravo na temelju pitanja, primjedbi i komentara studenata, od kojih se posebno izdvajaju izvanredni studenti, napisano je poglavlje zbirke koje obuhvaća detaljna rješenja zadataka. To poglavlje je namjerno dano kao zasebna cjelina jer se preporučuje da svaki zainteresirani student najprije pokuša samostalno riješiti svaki postavljeni zadatak. U tu svrhu su uz svaki zadatak navedeni samo rezultati.

Zbirka zadataka *nije* zamišljena kao zamjena za bilo koji oblik redovne nastave, nego kao dopuna tim oblicima nastave. Zbog opsega i težine propisanoga gradiva, sadašnja satnica predmeta *Matematika* 1 u kojoj je predviđeno (samo) 45 sati auditornih vježbi pokazala se nedovoljnom za kvalitetnu pripremu polaganja ispita. Zbog toga se nadam da će ova zbirka – zajedno sa svim zadacima riješenima na predavanjima i auditornim vježbama – značajno pomoći svim studentima u pripremi za polaganje ispita.

Preporučuje se koristiti ovu zbirku zajedno s *Repetitorijem matematike za studente elektrotehnike*. Upravo zato u zbirci nije naveden pregled teorijskih pojmova, definicija i formula potrebnih za rješavanje zadataka. Osim što bi takav pregled doveo do (uvjeren sam, nepotrebnoga) povećanja opsega zbirke, drugi osnovni razlog za ovakvu odluku jest dozvoljenost *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike* kao pomagala pri polaganju ispita. Zbog toga smatram primjerenim da se svi zadaci rješavaju uz korištenje navedenoga *Repetitorija* (…) i na taj način svojevrsno „simulira“ polaganje kolokvija, odnosno pismenoga ispita.

Ugodna mi je dužnost zahvaliti svima koji su na bilo koji način doprinijeli stvaranju ove zbirke. To se ponajprije odnosi na studente-demonstratore Petru Čargonju, Marka Špoljarića i Ivana Gretića koji su veći dio zadataka riješili na demonstraturama, te upozorili na pogreške. Posebnu zahvalnost dugujem svojim studentima koji su brojnim pitanjima, primjedbama i komentarima utjecali na povećanje kvalitete teksta.

Svjestan sam da je, unatoč svim naporima, u zbirci „preživio“ određen broj pogrešaka. Svakome tko me upozori na bilo koju od tih pogrešaka unaprijed izražavam svoju zahvalnost.

U Zagrebu, siječnja 2020.

Bojan Kovačić

1. GRUPA ZADATAKA

1. Kompleksan broj $z=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)^{2015}}{\left(\sqrt{2}\cdot \operatorname{cis}\left(\frac{7}{6}\cdot\pi\right)\right)^{4028}}$ zapišite u eksponencijalnom obliku.

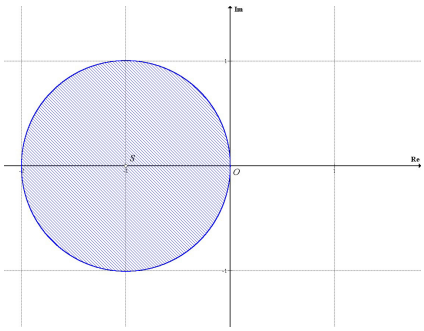
Rezultat: $z=2\cdot e^{i\cdot\pi}$.

2. Zadan je kompleksan broj $z=e^{i\cdot\frac{\pi}{2018}}$. Izračunajte $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z^{1009}+1}{z^{1009}+i}\right)$.

Rezultat: $\varphi=\dfrac{7}{4}\cdot\pi$.

3. Zadan je kompleksan broj $z_0=e^{i\cdot\frac{\pi}{20}}$. U Gaussovoj ravnini skicirajte skup $S=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-z_0^{60}\right|\le 1\right\}$.

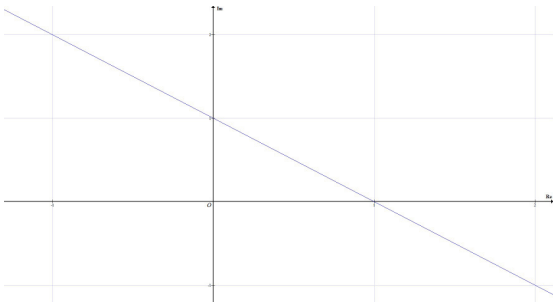
Rezultat: Krug sa središtem u točki (–1, 0) i polumjerom 1. Vidjeti sliku 1.



Slika 1.

4. U Gaussovoj ravnini skicirajte skup točaka $S=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}\left(\overline{z}\right)=1\right\}$.

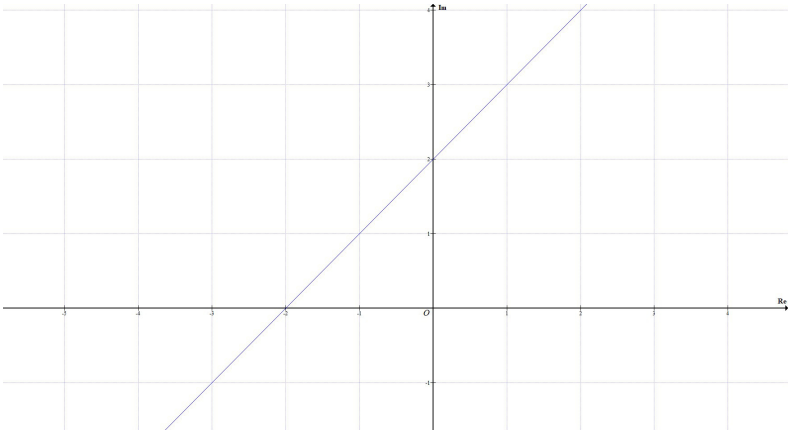
Rezultat: Pravac $y=-x+1$. Vidjeti sliku 2.



Slika 2.

5. U Gaussovoj ravnini skicirajte skup točaka $S=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}\left(\frac{z}{i}\right)+\operatorname{Re}\left(\overline{z}\cdot i\right)=2\right\}$.

Rezultati: Pravac $y=x+2$. Vidjeti sliku 3.



Slika 3.

6. Zadan je kompleksan broj $z=\frac{i^{2016}+i^{2015}}{i^{2014}+i^{2017}}$. Odredite $\operatorname{Arg}\left(\left(\overline{z}\right)^{2018}\right)$.

Rezultat: 0.

7. Odredite sve $z\in\mathbb{C}$ sa svojstvima $\begin{cases}|2\cdot z|=8,\\ \operatorname{Arg}(-z)=0.\end{cases}$ Zapišite ih u algebarskom i eksponencijalnom obliku.

Rezultat: $z=-4=4\cdot e^{i\cdot\pi}$.

8. Odredite sve $z\in\mathbb{C}$ sa svojstvima $\begin{cases}|(-5)\cdot z|=25,\\ \operatorname{Arg}\left(\overline{z}\right)=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ Zapišite ih u algebarskom i trigonometrijskom obliku.

Rezultat: $z=5\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)=-5\cdot i.$

9. Zadani su kompleksni brojevi $z_1=-\sqrt{3}+i$ i $z_2=2\cdot e^{i\cdot\frac{5}{3}\cdot\pi}$. Izračunajte $8\cdot\overline{\left(\frac{z_1^{2016}}{z_2^{2019}}\right)}$ i zapišite dobiveni rezultat u algebarskom obliku.

Rezultat: -1.

10. Zadani su kompleksni brojevi $z_1 = \sqrt{2} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{7}{4} \cdot \pi\right)$ i $z_2 = \frac{1}{2} \cdot e^{i \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi}$. Izračunajte $\overline{z_1^8 \cdot z_2^4}$ i zapišite dobiveni rezultat u algebarskom obliku.

Rezultat: i .

11. Zapišite sva rješenja jednadžbe $z^3 + 8 \cdot i = 0$ u algebarskom obliku.

Rezultat: $z_0 = 2 \cdot i,\ z_1 = -\sqrt{3} - i,\ z_2 = \sqrt{3} - i.$

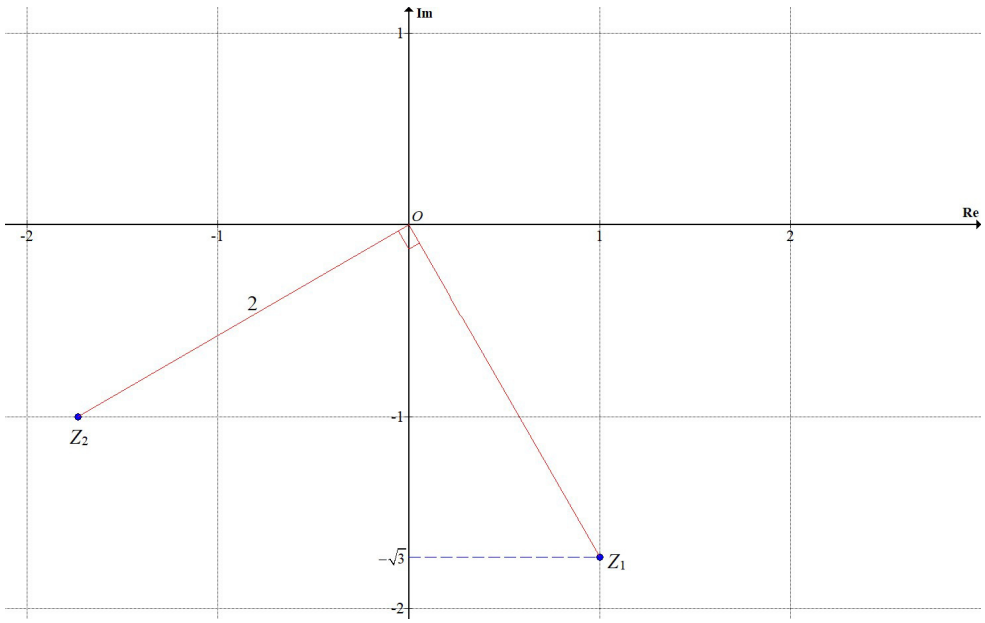
12. Zapišite sva rješenja jednadžbe $z^4 + i = 0$ u eksponencijalnom obliku.

Rezultat: $z_0 = e^{i \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi},\ z_1 = e^{i \cdot \frac{7}{8} \cdot \pi},\ z_2 = e^{i \cdot \frac{11}{8} \cdot \pi},\ z_3 = e^{i \cdot \frac{15}{8} \cdot \pi}.$

13. Nađite ukupan broj svih rješenja jednadžbe $z^{12} - i = 0$ čiji argumenti pripadaju intervalu $\left\langle \frac{3}{4} \cdot \pi,\ \frac{5}{3} \cdot \pi \right]$.

Rezultat: 5.

14. Točkama Z_1 i Z_2 sa slike 4. pridruženi su redom kompleksni brojevi z_1 i z_2.



Slika 4.

Izračunajte $z = \frac{z_1^{2046}}{z_2^{2043}}$ i zapišite rezultat u eksponencijalnom obliku.

Rezultat: $z = 8 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}.$

2. GRUPA ZADATAKA

1. Zadana je matrica $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte matricu $B=\frac{1}{2}\cdot\left(A\cdot A^T+A^T\cdot A\right)$.

Rezultat: $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte matricu $C=\frac{1}{10}\cdot\left(A+B\right)\cdot(A-B)$.

Rezultat: $C=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Zadana je matrica $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Izračunajte matricu $B=\left[\frac{1}{2}\cdot\left(A+A^{-1}\right)\right]^2$.

Rezultat: $B=E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Zadana je matrica $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Riješite jednadžbu: $A\cdot\left(A^T-6\cdot X\right)=E_2$.

Rezultat: $X=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Zadana je matrica $A=\begin{bmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}$, pri čemu je $a\in\mathbb{R}$ parametar. Determinanta matrice A jednaka je 7. Izračunajte matricu $B=(7\cdot A^{-1})^T$.

Rezultat: $B=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

6. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. Odredite vrijednost $a\in\mathbb{R}$ tako da determinanta matrice $C=A^3\cdot B^2$ bude jednaka 1.

Rezultat: $a=1$.

7. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odredite vrijednost $a\in\mathbb{Z}$ tako da determinanta matrice $C=(A+B)\cdot(A-B)$ bude jednaka -8.

Rezultat: $a=-1$.

8. Odredite vrijednost $x\in\mathbb{R}$ za koju je determinanta matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ x & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ jednaka 1. Potom izračunajte inverz tako dobivene matrice.

Rezultati: $x=-1,\ A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. Ako je $6\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, izračunajte matricu $B=\frac{1}{3}\cdot\left(A^T\right)^2$.

Rezultat: $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$.

10. Ako je $\left(A^{-1}\right)^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, izračunajte matricu $B=A-A^T$.

Rezultat: $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. GRUPA ZADATAKA

1. Zadani su vektori $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{i}-\vec{k}$ i $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$. Odredite vrijednost $\alpha\in\mathbb{R}$ tako da površina paralelograma razapetoga zadanim vektorima bude jednaka $3\cdot\sqrt{3}$ kv. jed.

Rezultat: $\alpha\in\{-5,5\}$.

2. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}$ i $\vec{b}=\vec{j}-\vec{i}$. Izračunajte volumen paralelepipeda razapetoga vektorima $\vec{b}+\vec{a}$, $\vec{b}-\vec{a}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$.

Rezultat: $V=2$ kub. jed.

3. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$ i $\vec{b}=\vec{k}-\vec{j}$. S točnošću od 10^{-5} izračunajte oplošje paralelepipeda razapetoga vektorima $\vec{a}+2\cdot\vec{b}$, $2\cdot\vec{a}-\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$.

Rezultat: $O=2\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}+\sqrt{42}+3\cdot\sqrt{2}\right)\approx 38.76727$ kv. jed.

4. Zadani su vektori $\vec{a}=(1,0,-1)$ i $\vec{b}=(x,1,0)$. Odredite $x>0$ tako da volumen paralelepipeda razapetoga vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$ bude jednak 6 kub. jed.

Rezultat: $x=2$.

5. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$ i $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$. Izračunajte volumen prizme razapete vektorima $\vec{a}\times\vec{b}$, $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$ i $\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$.

Rezultat: $V=1.5$ kub. jed.

6. Zadani su vektori $\vec{a}=(-1,2,1)$ i $\vec{b}=(3,2,-1)$. Odredite vektor $\vec{c}$ tako da vrijede jednakosti: $\vec{a}\cdot\vec{c}=4$, $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}$.

Rezultat: $\vec{c}=\vec{j}-2\cdot\vec{k}=(0,1,2)$.

7. Zadani su vektori $\vec{a}=(-1,1,0)$ i $\vec{b}=(0,0,1)$. Odredite sve jedinične vektore $\vec{c}$ koji su okomiti na zadane vektore.

Rezultat: $\vec{c_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1,1,0)$, $\vec{c_2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1,1,0)$.

8. Zadani su vektori $\vec{a}=(1,1,4)$, $\vec{b}=(-1,\alpha,0)$ i $\vec{c}=(-3,3,-4)$. Odredite $\alpha\in\mathbb{R}$ tako da zadani vektori pripadaju istoj ravnini.

Rezultat: $\alpha=2$.

9. Vrhovi trokuta su $A=(0,1,4)$, $B=(-3,4,1)$ i $C=(2,3,6)$. Odredite točku D na osi aplikata tako da volumen tetraedra $ABCD$ bude jednak 2 kub. jed.

Rezultat: $D_1=(0,0,3)$, $D_2=(0,0,5)$.

10. Neka su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut čija je mjera $\frac{\pi}{6}$ radijana. Izračunajte površinu trokuta određenoga vektorima $\vec{a}=\vec{m}+5\cdot\vec{n}$ i $\vec{b}=7\cdot\vec{m}-\vec{n}$.

Rezultat: $P=9$ kv. jed.

11. Duljina vektora $\vec{a}$ jednaka je $\sqrt{3}$ jed. duljina, dok je duljina vektora $\vec{b}$ jednaka 2 jed. duljine. Površina trokuta kojega razapinju vektori $\vec{c}=3\cdot\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{d}=\vec{a}-5\cdot\vec{b}$ iznosi 24 kv. jed. Odredite mjeru (u radijanima) šiljastoga kuta među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rezultat: $\frac{\pi}{3}$ radijana.

12. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ razapinju paralelepiped čiji je volumen jednak 1. Odredite volumen paralelepipeda razapetoga vektorima $\vec{m}=2\cdot\vec{a}+\vec{b}+2\cdot\vec{c}$, $\vec{n}=2\cdot\vec{a}+\vec{b}-2\cdot\vec{c}$ i $\vec{p}=2\cdot\vec{a}-\vec{b}+2\cdot\vec{c}$.

Rezultat: $V=16$ kub. jed.

4. GRUPA ZADATAKA

1. Odredite prirodnu domenu realne funkcije $f(\check{z}) = \dfrac{\ln(\check{z}-1)}{\sqrt{2\cdot\check{z}-\check{z}^2}}$.

Rezultat: $D(f) = \langle 1,2 \rangle$.

2. Odredite prirodnu domenu realne funkcije $g(x) = \sqrt{\log_2\left(\dfrac{x+2}{2\cdot x}\right)}$.

Rezultat: $D(g) = \langle 0,2]$.

3. Odredite inverz realne funkcije $h(\check{s}) = \dfrac{e^{\check{s}}}{2\cdot e^{\check{s}}+1}$ i njegovu prirodnu domenu.

Rezultati: $h^{-1}(\check{s}) = \ln\left(\dfrac{\check{s}}{1-2\cdot\check{s}}\right)$, $D\left(h^{-1}\right) = \left\langle 0,\ \dfrac{1}{2}\right\rangle$.

4. Ako je $f^{-1}(\check{c}) = \dfrac{2^{\check{c}}}{2^{\check{c}+1}-1}$, odredite prirodnu domenu funkcije *f*.

Rezultat: $D(f) = \mathbb{R}\setminus\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$.

5. Rastavite na faktore polinom $p(đ) = đ^3 - 2\cdot đ^2 - đ + 2$. Koristeći dobiveni rezultat nađite skup svih nultočaka polinoma *p*.

Rezultati: $p(đ) = (đ+1)\cdot(đ-1)\cdot(đ-2)$, $N(p) = \{-1,1,2\}$.

6. Rastavite na faktore polinom $p(w) = 2\cdot w^3 - 3\cdot w^2 - 3\cdot w + 2$. Koristeći dobiveni rezultat nađite skup svih nultočaka polinoma *p*.

Rezultati: $p(w) = (w+1)\cdot(2\cdot w-1)\cdot(w-2)$, $N(p) = \left\{-1,\ \dfrac{1}{2},\ 2\right\}$.

7. Pokažite da je polinom $p_1(t) = t^4 - t^3 - 7\cdot t^2 + t + 6$ djeljiv polinomom $p_2(t) = t^2 - 1$. Koristeći dobiveni rezultat odredite skup svih nultočaka polinoma p_1.

Rezultati: Dijeljenjem polinoma p_1 i p_2 dobiva se količnik $q(t) = t^2 - t - 6$ i ostatak $r(t) = 0$. Zbog toga je p_1 djeljiv s p_2. $N(p_1) = \{-2,-1,1,3\}$.

8. Pokažite da je polinom $p_1(u) = -12 \cdot u^5 - u^4 + 13 \cdot u^3 + u^2 - u$ djeljiv polinomom $p_2(u) = u^3 - u$. Koristeći dobiveni rezultat odredite skup svih nultočaka polinoma p_1.

Rezultati: Dijeljenjem polinoma p_1 i p_2 dobiva se količnik $q(u) = -12 \cdot u^2 - u + 1$ i ostatak $r(u) = 0$. Zbog toga je p_1 djeljiv s p_2. $N(p_1) = \left\{-1,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 1\right\}$.

9. Zadana je neprava racionalna funkcija $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^5 + 2}{2 + \alpha - \alpha^2}$.

a) Odredite prirodnu domenu funkcije *f*.

b) Zapišite funkciju *f* u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije.

Rezultati: **a)** $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$; **b)** $f(\alpha) = -\alpha^3 - \alpha^2 - 3 \cdot \alpha - 5 + \dfrac{11 \cdot \alpha + 12}{2 + \alpha - \alpha^2}$.

10. Zadana je neprava racionalna funkcija $g(\beta) = \dfrac{3 - \beta^5}{\beta^3 - 16 \cdot \beta}$.

a) Odredite prirodnu domenu funkcije *g*.

b) Zapišite funkciju *g* u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije.

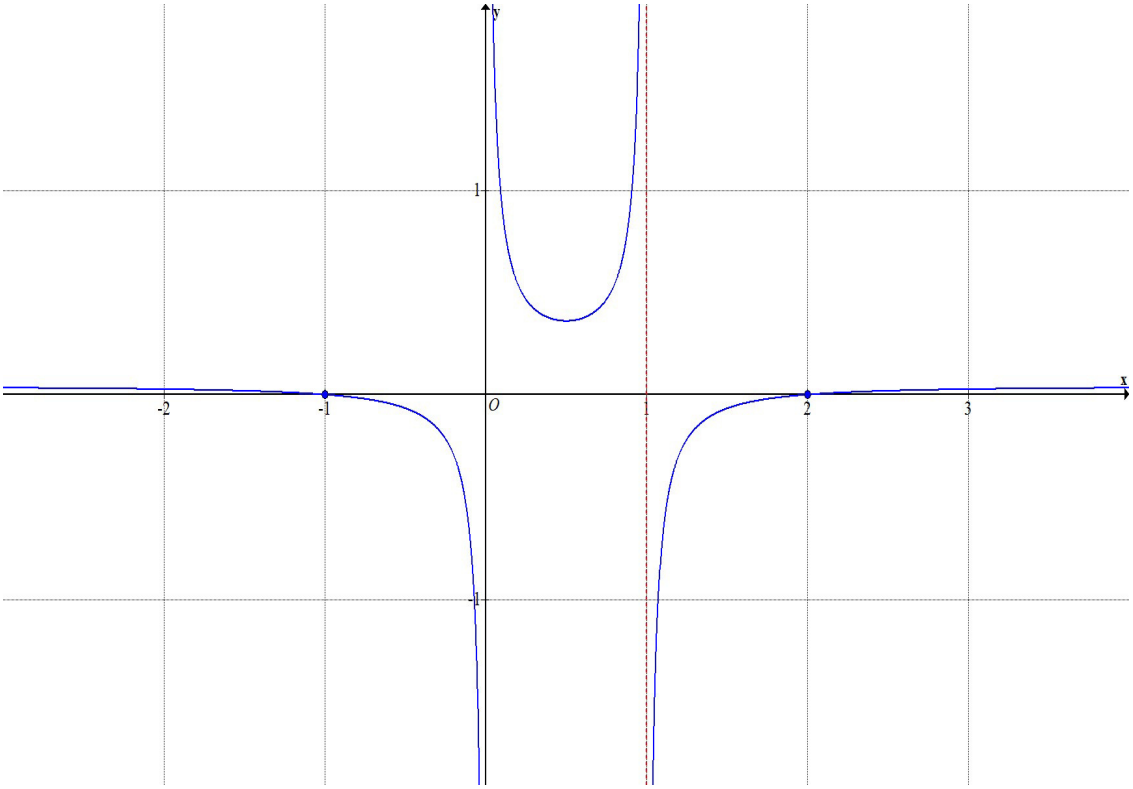
Rezultati: **a)** $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$; **b)** $g(\beta) = -\beta^2 - 16 + \dfrac{-256 \cdot \beta + 3}{\beta^3 - 16 \cdot \beta}$.

11. Dijeljenjem polinoma $p_1(t) = t^5 - t^4 - 3 \cdot t^3 + 3 \cdot t^2 - 2 \cdot t + 5$ polinomom p_2 dobiva se količnik $q(t) = t^2 + 1$ i ostatak $r(t) = 2 \cdot t + 1$. Odredite skup svih nultočaka polinoma p_2. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultat: $N(p_2) = \{-2, 1, 2\}$.

12. Na slici 5. plavom je bojom prikazan dio grafa racionalne funkcije *g*. Ako je $g(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 3]$, odredite skup svih nultočaka i skup svih polova te funkcije. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

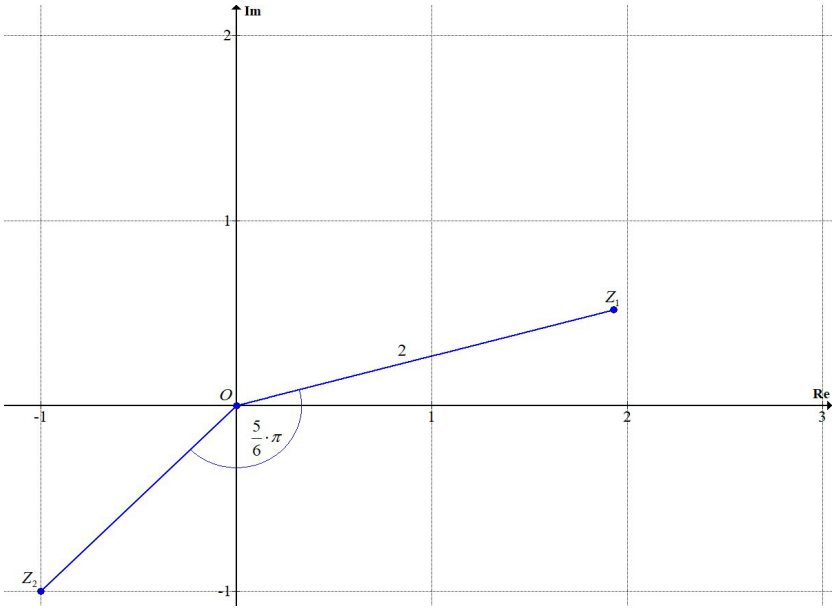
Rezultat: $N(g) = \{-1, 2\}$, $P(g) = \{0, 1\}$



Slika 5.

5. GRUPA ZADATAKA

1. Točkama Z_1 i Z_2 u Gaussovoj ravnini sa slike 6. pridruženi su redom brojevi z_1 i z_2. Izračunajte $\frac{z_2^{2030}}{z_1^{1014}}$ i zapišite dobiveni rezultat u algebarskom obliku.



Slika 6.

Rezultat: –2.

2. Zadan je kompleksan broj $z=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}\cdot i-1}$. Izračunajte $\overline{z^{2019}}$ i zapišite dobiveni rezultat u eksponencijalnom obliku.

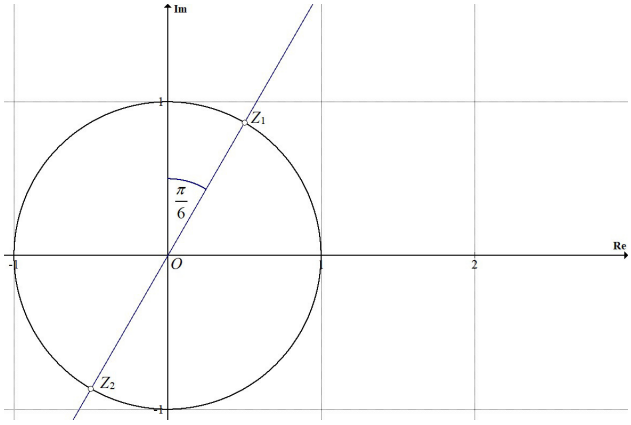
Rezultat: $e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$.

3. Zadan je kompleksan broj $z=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$. Odredite točku Gaussove ravnine pridruženu broju $\overline{z^{2019}}$.

Rezultat: $T=(-1,0)$.

4. Točkama Z_1 i Z_2 u Gaussovoj ravnini sa slike 7. pridruženi su redom brojevi z_1 i z_2. Odredite $\mathrm{Arg}\left(\overline{z_1}+z_2^{2019}\right)$.

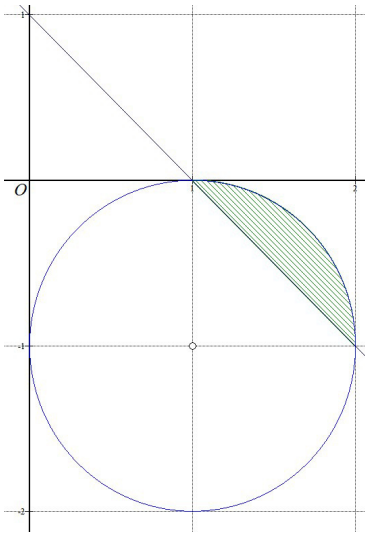
Rezultat: $\frac{11}{6}\cdot\pi$.



Slika 7.

5. Zadani su skupovi $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \le 1\}$ i $S_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(\frac{z}{i}\right) + \mathrm{Im}(z \cdot i) \ge 1\right\}$. U Gaussovoj ravnini skicirajte skup $S = S_1 \cap S_2$.

Rezultat: Vidjeti sliku 8.



Slika 8.

6. Riješite matričnu jednadžbu: $\left(2 \cdot X^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Rezultat: $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

7. Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Riješite matričnu jednadžbu: $A \cdot X = A - X$.

Rezultat: $X = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

8. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}21 & 26\\ 9 & 10\end{bmatrix}$. Riješite jednadžbu: $X\cdot A=B-2\cdot X$.

Rezultat: $X=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

9. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$. Izračunajte matricu $C=A^{-1}\cdot(B-A)$.

Rezultat: $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$.

10. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jedinični. Površina trokuta kojega razapinju vektori $\vec{c}=5\cdot\vec{a}-\vec{b}$ i $\vec{d}=\vec{a}+3\cdot\vec{b}$ iznosi 4 kv. jed. Odredite mjeru šiljastoga kuta među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rezultat: $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ rad.

11. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{b}=-\vec{i}-\vec{k}$. Izračunajte volumen tetraedra razapetoga vektorima $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(2\cdot\vec{a}-\vec{b}\right)$, $\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\cdot\vec{b}\right)$ i $\left(3\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b}$.

Rezultat: $V=20$ kub. jed.

12. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{k}-\vec{i}$ i $\vec{b}=\vec{k}-\vec{j}$. Izračunajte volumen prizme razapete vektorima $\vec{a}\times\vec{b}$, $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$ i $\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$.

Rezultat: $V=1.5$ kub. jed.

13. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ razapinju tetraedar volumena 1 kub. jed. Izračunajte volumen paralelepipeda kojega razapinju vektori $\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$ i $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

Rezultat: $V=24$ kub. jed.

14. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ razapinju paralelepiped volumena 2 kub. jed. Izračunajte volumen prizme koju razapinju vektori $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$ i $\dfrac{1}{2}\cdot\vec{c}$.

Rezultat: $V=1$ kub. jed.

15. Zadana je točka $A=(1,0,1)$. Odredite sve točke B na osi aplikata za koje je površina trokuta razapetoga radijvektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ jednaka 0.5 kv. jed.

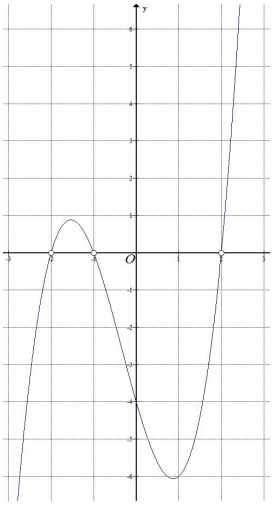
Rezultat: $B_1=(0,0,-1)$, $B_2=(0,0,1)$.

16. Pokažite da je polinom $p_1(w) = w^4 - 7 \cdot w^3 + 13 \cdot w^2 + 3 \cdot w - 18$ djeljiv polinomom $p_2(w) = (w-3)^2$. Koristeći dobiveni rezultat odredite skup svih nultočaka polinoma p_1.

Rezultati: Dijeljenjem polinoma p_1 i p_2 dobiva se količnik $q(w) = w^2 - w - 2$ i ostatak $r(w) = 0$. Zbog toga je p_1 djeljiv s p_2. $N(p_1) = \{-1, 2, 3\}$.

17. Rastavite na faktore polinom $p_2(t) = t^3 + t^2 - 4 \cdot t - 4$, pa odredite skup svih nultočaka toga polinoma i skicirajte njegov graf.

Rezultati: $p_2(t) = (t+2) \cdot (t+1) \cdot (t-2)$. Graf polinoma p_2 prikazan je na slici 9.



Slika 9.

18. Dijeljenjem polinoma $p_1(x) = 64 \cdot x - x^3$ polinomom $q(x) = (x-1)^2$ dobiju se količnik q i ostatak r. Odredite polinom $q + r$.

Rezultat: $(q+r)(x) = 60 \cdot x$.

19. Zadana je neprava racionalna funkcija $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^4 - 3 \cdot \alpha^3 + 2 \cdot \alpha^2}{9 - \alpha^2}$.

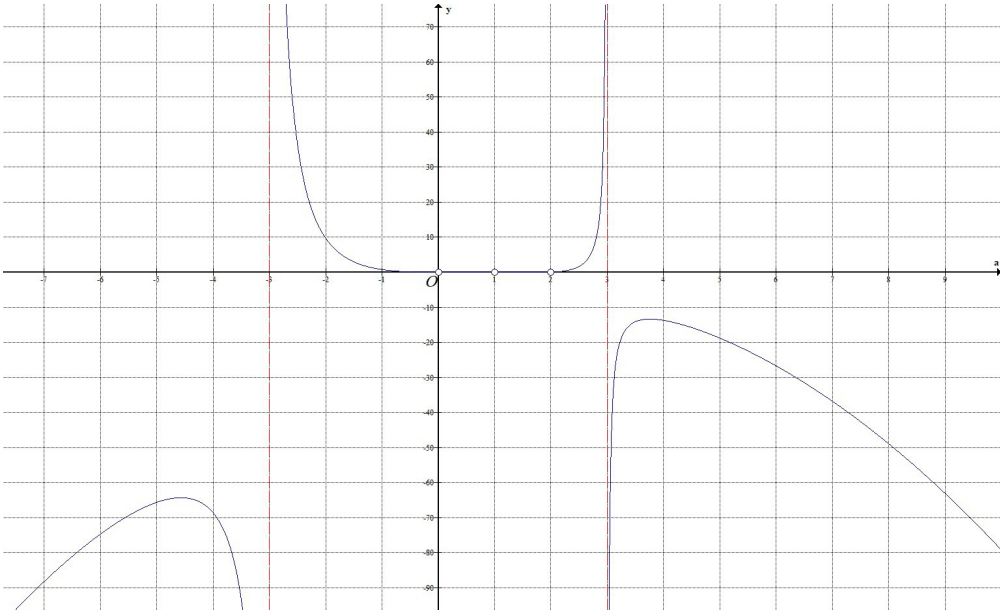
a) Odredite prirodnu domenu funkcije *f*.

b) Odredite skup svih nultočaka funkcije *f*.

c) Zapišite funkciju *f* u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije.

d) Skicirajte graf funkcije *f*.

Rezultat: **a)** $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; **b)** $N(f) = \{0, 1, 2\}$; **c)** $f(\alpha) = -\alpha^2 + 3 \cdot \alpha - 11 + \dfrac{-27 \cdot \alpha + 99}{9 - \alpha^2}$; **d)** Vidjeti sliku 10.



Slika 10.

20. Rastavite na parcijalne razlomke sljedeće racionalne funkcije:

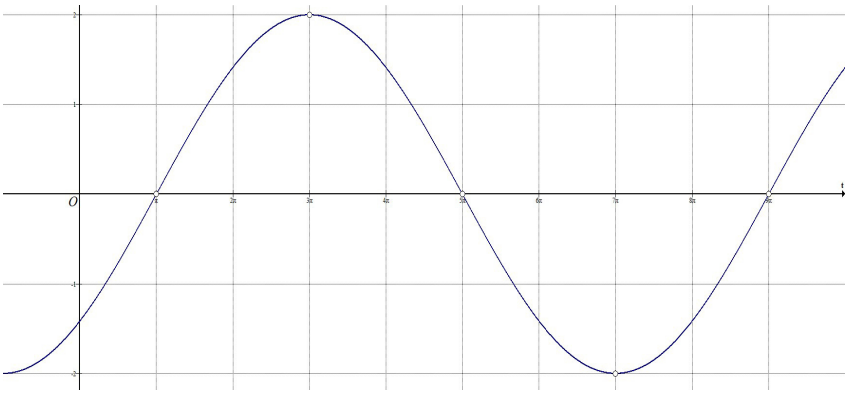
a) $f(x)=\dfrac{3\cdot x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}$;

b) $g(x)=\dfrac{x^2-2\cdot x-1}{x^3-x}$.

Rezultati: **a)** $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2\cdot x+3}{x^2+1}$; **b)** $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$.

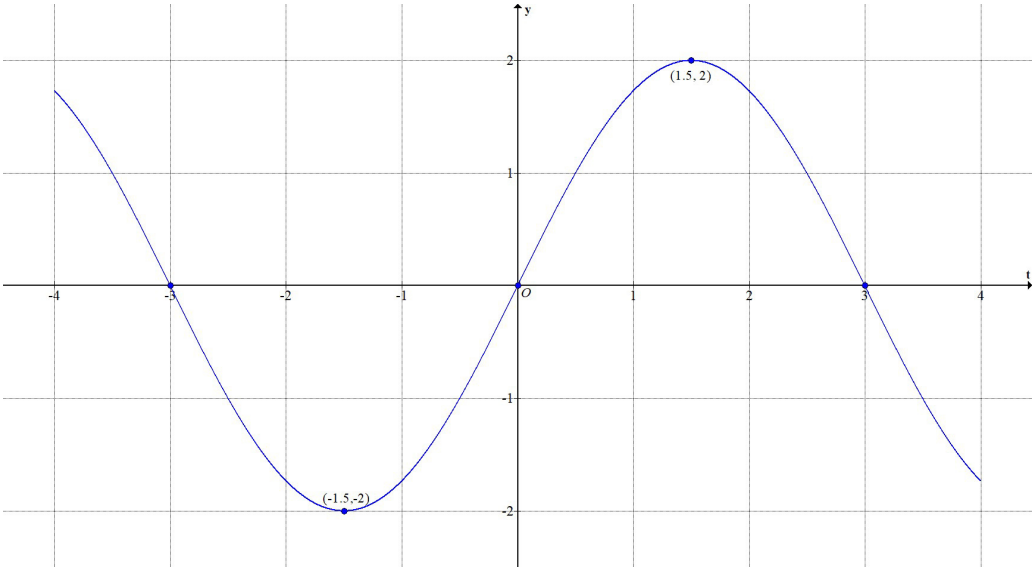
21. Nacrtajte graf harmonijske funkcije $u(t)=2\cdot\sin\left(\dfrac{t-\pi}{4}\right)$ na njezinu osnovnu segmentu.

Rezultat: Vidjeti sliku 11.



Slika 11.

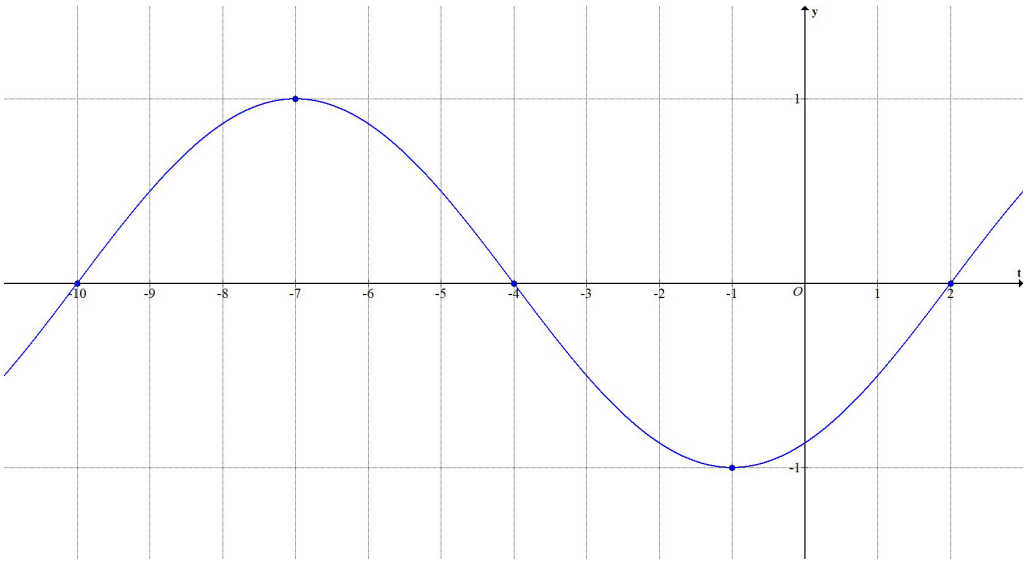
22. Na slici 12. prikazan je graf harmonijske funkcije $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ na segmentu $[-4, 4]$. Odredite pravilo te funkcije. (Pretpostavite da su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.)



Slika 12.

Rezultat: $h(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right)$.

23. Na slici 13. prikazan je graf harmonijske funkcije $g(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ na segmentu $[-10, 2]$. Odredite pravilo te funkcije. (Pretpostavite da su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.)



Slika 13.

Rezultat: $g(t) = \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$

6. GRUPA ZADATAKA

1. Odredite skup S svih gomilišta sljedećih nizova:

a) $a_n = \dfrac{4039+(-1)^n}{2}$;

b) $b_n = \dfrac{n}{n+1} + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot n\right)$;

c) $c_n = \dfrac{2\cdot n^2-1}{(n+1)^2} - \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot n\right)$.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultati: **a)** $S=\{2019,2020\}$; **b)** $S=\{0,1,2\}$; **c)** $S=\{1,2,3\}$.

2. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan je pravilom $a_n = \dfrac{2\cdot n+3}{n+1}$.

a) Izračunajte graničnu vrijednost L zadanoga niza.

b) Odredite najmanji $k\in\mathbb{N}$ za koji je $|a_k - L| < 10^{-5}$ i objasnite značenje dobivenoga rezultata.

Rezultati: **a)** $L = 2$; **b)** $k_{\min} = 100\ 000$.

3. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan je pravilom $a_n = \dfrac{4\cdot n+5}{n+2}$.

a) Izračunajte graničnu vrijednost L zadanoga niza.

b) Odredite najmanji $k\in\mathbb{N}$ za koji je $|a_k - L| < 10^{-5}$ i objasnite značenje dobivenoga rezultata.

Rezultati: **a)** $L = 4$; **b)** $k_{\min} = 299\ 999$.

4. Niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan je pravilom $b_n = \dfrac{1-4\cdot n}{n+2}$.

a) Izračunajte graničnu vrijednost L zadanoga niza.

b) Odredite najmanji $k\in\mathbb{N}$ za koji je $|b_k - L| < 10^{-5}$ i objasnite značenje dobivenoga rezultata.

Rezultati: **a)** $L = -4$; **b)** $k_{\min} = 899\ 999$.

5. Niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan je pravilom $b_n = \dfrac{7-8\cdot n}{4\cdot n+3}$.

a) Izračunajte graničnu vrijednost L zadanoga niza.

b) Odredite najmanji $k\in\mathbb{N}$ za koji je $|b_k - L| < 10^{-7}$ i objasnite značenje dobivenoga rezultata.

Rezultati: **a)** $L = -2$; **b)** $k_{\min} = 32\ 500\ 000$.

6. Izračunajte graničnu vrijednost niza $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opći član definiran pravilom:

a) $c_n = \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{-n}$

b) $c_n = \left(1-\dfrac{3}{2\cdot n}\right)^{-4\cdot n}$;

c) $c_n = \left(2019^{2019^{2019}} + \dfrac{2}{5\cdot n}\right)^{-n}$;

d) $c_n = \dfrac{1}{e^2}\cdot\left(\dfrac{2\cdot n+3}{2\cdot n+1}\right)^{2\cdot n}$

e) $c_n = \dfrac{1}{e^4}\cdot\left(\dfrac{12\cdot n+13}{12\cdot n-11}\right)^{2\cdot n}$;

f) $c_n = \left(\dfrac{2\cdot n+1}{3\cdot n-2}\right)^{2019\cdot n}$;

g) $c_n = \dfrac{7^{2\cdot n+1}+1}{50-49^n}$;

h) $c_n = \dfrac{2^{2\cdot(3\cdot n+5)}-1}{8^{2\cdot n+3}+1}$;

i) $c_n = \dfrac{13^{n+3}+11^{n+3}}{13^{n+1}+11^{n+1}}$.

Rezultati: **a)** e^2; **b)** e^6; **c)** 0; **d)** 1; **e)** 1; **f)** 0; **g)** -7; **h)** 2; **i)** 169.

7. Izračunajte graničnu vrijednost niza $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opći član definiran pravilom:

a) $d_n = \sqrt{4\cdot n^2+4\cdot n+5} - 2\cdot n$;

b) $d_n = \sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21} - 5\cdot n$;

c) $d_n = 7\cdot n - \sqrt{49\cdot n^2-56\cdot n+57}$;

d) $d_n = 3\cdot n - \sqrt{9\cdot n^2-36\cdot n+37}$.

Rezultati: **a)** 1; **b)** 2; **c)** 4; **d)** 6.

8. Izračunajte sljedeće granične vrijednosti funkcija:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\cdot x-\sqrt{4\cdot x^2-8\cdot x+19}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5\cdot x+\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$;

e) $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}+2\cdot t\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(1-x)\cdot(x+1)}$;

g) $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(2\cdot t-3)^2+(3\cdot t+2)^2}{(5-x)\cdot(x+5)}$;

h) $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(2\cdot t+3)^2+(3\cdot t-2)^2}{(7\cdot t-8)^2-(6\cdot t+5)^2}$

i) $\lim\limits_{x\to0}\left(\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\cdot x}}\right)$;

j) $\lim\limits_{x\to0}\left((1+2\cdot x)^{\frac{1}{3\cdot x}}\right)$

k) $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\dfrac{2\cdot t+1}{t^2}\right)^{t+\frac{2019}{t}}$.

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{(2-x)\cdot(x+2)}$

Rezultati: **a)** 2; **b)** $-\dfrac{1}{2}$; **c)** 2; **d)** 1; **e)** 1; **f)** -2; **g)** -13; **h)** 1; **i)** $\sqrt[4]{e}$; **j)** $\sqrt[3]{e^2}$; **k)** e^2; **l)** $\dfrac{1}{e}$.

7. GRUPA ZADATAKA

1. Odredite $a,\ b\in\mathbb{R}$ tako da realna funkcija $f(x)=\begin{cases} e^x,\ \text{za}\ x<0, \\ a\cdot x+b,\ \text{za}\ x\in[0,1], \\ 2\cdot x-1,\ \text{inače} \end{cases}$ bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

Rezultat: $(a,b)=(0,1)$.

2. Odredite $c\in\mathbb{R}$ tako da realna funkcija $g(y)=\begin{cases} \dfrac{y^2-1}{\sin(y-1)},\ \text{za}\ y>1, \\ c+1,\ \text{inače} \end{cases}$ bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

Rezultat: $c=1$.

3. Odredite $d\in\mathbb{R}$ tako da realna funkcija $h(t)=\begin{cases} d\cdot e^t,\ \text{za}\ t\le 2, \\ (t-1)^{\frac{2}{t-2}},\ \text{inače} \end{cases}$ bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

Rezultat: $d=1$.

4. Odredite $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tako da realna funkcija $k(w)=\begin{cases} \dfrac{w^2-4}{w+2},\ \text{za}\ w<-2, \\ \alpha\cdot w+\beta,\ \text{za}\ w\in[-2,2], \\ \dfrac{4\cdot\left(e^{w-2}-1\right)}{w-2},\ \text{inače} \end{cases}$ bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

Rezultat: $(\alpha,\beta)=(2,0)$.

5. Zadana je funkcija $f(t)=4\cdot\pi^2\cdot\dfrac{\sin t}{t^2}$. Izračunajte $f'(2\cdot\pi)$.

Rezultat: 1.

6. Zadana je funkcija $g(x)=\dfrac{x^2\cdot\cos x}{2\cdot\pi}$. Izračunajte $g'(\pi)$.

Rezultat: -1

7. Zadana je funkcija $h(y)=\dfrac{\ln y}{y^3}$. Izračunajte $h'(1)$.

Rezultat: 1.

8. Zadana je funkcija $u(w)=\left(w^2+w+1\right)\cdot e^w$. Izračunajte $u'(-1)$.

Rezultat: 0.

9. Zadana je funkcija $k(\alpha)=\alpha^2\cdot e^{\alpha}+(\sin\alpha)\cdot(\mathrm{ch}\ \alpha)$. Izračunajte $k'(0)+k(0)$.

Rezultat: 1.

10. Odredite skup svih nultočaka funkcije f' ako je:

a) $f(y)=75\cdot y-y^3$;

b) $f(x)=\left(x^2-3\cdot x+3\right)\cdot e^x$;

c) $f(w)=\mathrm{tg}\ w-w$;

d) $f(v)=2\cdot v\cdot(v-2)\cdot\ln v+4\cdot v-v^2$

Rezultati: **a)** $N\left(f'\right)=\{-5,5\}$; **b)** $N\left(f'\right)=\{0,1\}$; **c)** $N\left(f'\right)=\{k\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\}$; **d)** $N\left(h'\right)=\{1\}$.

8. GRUPA ZADATAKA

1. Zadana je realna funkcija $f(x)=e^{x^2+4\cdot x+3}$. Izračunajte $f'(-1)$.

Rezultat: 2.

2. Zadana je realna funkcija $g(t)=\sin(\ln t)$. Izračunajte $g'(1)$.

Rezultat: 1.

3. Zadana je realna funkcija $h(u)=\sqrt{6\cdot\left(1+\cos^2 u\right)}$. Izračunajte $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Rezultat: –1.

4. Zadana je realna funkcija $k(w)=40\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\right)$. Izračunajte $k'(4)$.

Rezultat: –2.

5. Funkcija $y=y(x)$ definirana je implicitno jednadžbom $x^3+y^3=6\cdot x\cdot y$. Izračunajte y' u točki $T=(3,\ 3)$.

Rezultat: –1.

6. Funkcija $x=x(t)$ definirana je implicitno jednadžbom $\ln\left(\frac{x}{t}\right)+\frac{x}{t}-t=0$. Izračunajte x' u točki $T=(1,\ 1)$.

Rezultat: $\frac{3}{2}$.

7. Funkcija $y=y(w)$ definirana je implicitno jednadžbom $\sin(y\cdot w)+y^2\cdot w+\ln w=0$. Izračunajte y' u točki $T=(1,\ 0)$.

Rezultat: –1.

8. Funkcija $y=y(t)$ definirana je implicitno jednadžbom $2\cdot t^2+\frac{t}{y}-e^{\frac{y}{t}+1}=0$. Izračunajte y' u točki $T=(-1,\ 1)$.

Rezultat: 1.

9. Funkcija $y = y(x)$ zadana je parametarski s $\begin{cases} x = t^3 + t^2 + t + 1, \\ y = t^3 - t^2 + t - 1. \end{cases}$ Izračunajte y' u točki određenoj parametrom $t = 0$.

Rezultat: 1.

10. Funkcija $y = y(x)$ zadana je parametarski s $\begin{cases} x = t \cdot e^t, \\ y = t \cdot \cos t. \end{cases}$ Izračunajte y' u točki određenoj parametrom $t = 0$.

Rezultat: 1.

11. Funkcija $y = y(x)$ zadana je parametarski s $\begin{cases} x = 1 + \sin t, \\ y = (1 + \sin t) \cdot \cos t, \end{cases}$ Izračunajte y' u točki određenoj parametrom $t = \frac{\pi}{4}$.

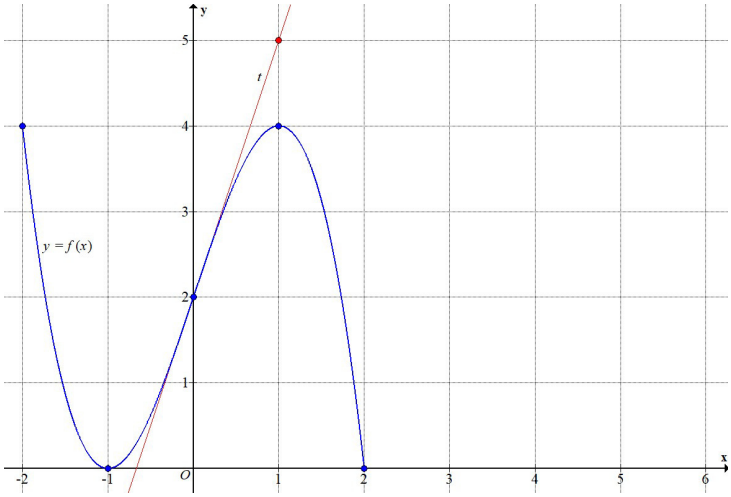
Rezultat: –1.

12. Funkcija $y = y(x)$ zadana je parametarski s $\begin{cases} x = \cos(2 \cdot t) \cdot \cos t, \\ y = \cos(2 \cdot t) \cdot \sin t. \end{cases}$ Izračunajte y' u točki određenoj parametrom $t = \frac{3}{4} \cdot \pi$.

Rezultat: –1.

9. GRUPA ZADATAKA

1. Na slici 14. prikazani su graf funkcije f na segmentu $[-2,2]$ i tangenta povučena na taj graf u točki $(0,2)$.



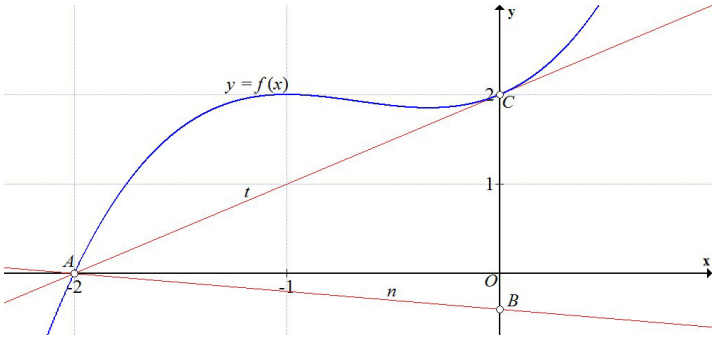
Slika 14.

a) Odredite $f'(0)+f'(1)$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Odredite površinu trokuta kojega s objema koordinatnim osima zatvara **normala** povučena na graf funkcije f u točki $(0,2)$.

Rezultati: a) 3; **b)** $P=6$ kv. jed.

2. Na slici 15. prikazani su graf funkcije f, tangenta t povučena na taj graf u točki C i normala n povučena na taj graf u točki A.

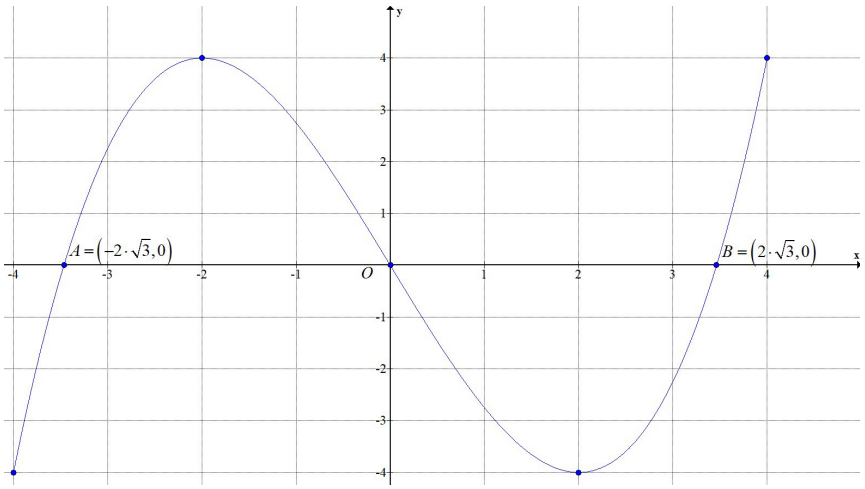


Slika 15.

Ako površina trokuta ABC iznosi 2.4 kv. jed., odredite $f'(-2)+f'(0)$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultat: 6.

3. Na slici 16. prikazan je graf **prve derivacije** polinoma $p:[-4,4]\to\mathbb{R}$.



Slika 16.

Ako su $p\left(-2\cdot\sqrt{3}\right)+p\left(2\cdot\sqrt{3}\right)=-18,\ p(-2)+p(2)=-10$ i $p(0)=0,$ odredite:

a) sve intervale **rasta** polinoma p;
b) sve intervale **pada** polinoma p;
c) sve točke **lokalnih ekstrema** polinoma p;
d) sve intervale **konveksnosti** polinoma p;
e) sve intervale **konkavnosti** polinoma p;
f) sve **točke pregiba (točke infleksije)** polinoma p;
g) točku u kojoj polinom p **najbrže raste**;
h) točku u kojoj polinom p **najsporije pada**.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultati: **a)** $\left\langle -2\cdot\sqrt{3},0\right\rangle$ i $\left\langle 2\cdot\sqrt{3},4\right\rangle$; **b)** $\left\langle -4,-2\cdot\sqrt{3}\right\rangle$ i $\left\langle 0,2\cdot\sqrt{3}\right\rangle$;
c) točke lokalnoga minimuma: $\left(-2\cdot\sqrt{3},-9\right)$ i $\left(2\cdot\sqrt{3},-9\right)$, točka lokalnoga maksimuma: (0,0).
d) $\langle -4,-2\rangle$ i $\langle 2,4\rangle$; **e)** $\langle -2,2\rangle$; **f)** $T_1=(-2,-5)$ i $T_2=(2,-5)$; **g)** $T_1=(-2,-5)$; **h)** $T_2=(2,-5)$.

4. Odredite sve točke ravninske krivulje $K\ldots\ y=x^3+x+1$ u kojima je pripadna normala na krivulju usporedna s pravcem $p\ldots\ x+13\cdot y+1=0$.

Rezultat: $T_1=(-2,-9)$ i $T_2=(2,11)$.

5. Odredite sve točke ravninske krivulje $K\ldots\ y=x^3+4\cdot x+2$ u kojima je pripadna tangenta na krivulju usporedna s pravcem $p\ldots\ 7\cdot x-y+2=0$.

Rezultat: $T_1=(-1,-3)$ i $T_2=(1,7)$.

6. Izračunajte površinu trokuta kojega s koordinatnim osima zatvara normala na krivulju $K\ldots\ y=(x^2+1)\cdot\ln x$ povučena na krivulju u njezinu sjecištu s osi apscisa.

Rezultat: $P=\frac{1}{4}$ kv. jed.

7. U sjecištu krivulje $K\ldots\ y=\frac{1-\sin x}{e^x}$ s osi ordinata povučene su tangenta i normala na krivulju K. Izračunajte površinu trokuta kojega ti pravci zatvaraju s osi apscisa.

Rezultat: $P=\frac{5}{4}$ kv. jed.

8. U svakom sjecištu krivulje $K\ldots y=x^4-4\cdot x^2$ s osi apscisa povučena je tangenta na krivulju. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga tim tangentama.

Rezultat: $P=64$ kv. jed.

9. Nađite sve globalne ekstreme funkcije $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ definirane pravilom $f(x)=x^3-3\cdot x$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultati: Globalni minimum funkcije f jednak je -2 i postiže se za $x_1=-2$ i $x_2=1$. Globalni maksimum funkcije f jednak je 2 i postiže se za $x_3=-1$ i $x_4=2$.

10. Nađite sve globalne ekstreme funkcije $g:[0,3]\to\mathbb{R}$ definirane pravilom $g(y)=y\cdot(y-3)^2$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultati: Globalni minimum funkcije g jednak je 0 i postiže se za $y_1=0$ i $y_2=3$. Globalni maksimum funkcije g jednak je 4 i postiže se za $y_3=1$.

11. Odredite domenu, intervale monotonosti i sve lokalne ekstreme sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x)=x+\frac{1}{x}$;

b) $g(t)=\frac{\ln t}{t^2}$;

c) $h(u)=\frac{2\cdot u}{e^{2\cdot u}}$;

d) $p:[0,\ 2\cdot\pi]\to\mathbb{R},\ \ p(v)=\sin v+\cos v.$

Rezultati:

a) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, intervali rasta: $\langle -\infty,-1\rangle$ i $\langle 1,\ +\infty\rangle$, intervali pada $\langle -1,\ 0\rangle$ i $\langle 0,\ 1\rangle$,
točka lokalnoga minimuma: $T_1=(1,\ 2)$, točka lokalnoga maksimuma: $T_2=(-1,-2)$;

b) $D(g)=\mathbb{R}^+=\langle 0,\ +\infty\rangle$, interval rasta: $\langle 0,\sqrt{e}\rangle$, interval pada: $\langle \sqrt{e},+\infty\rangle$, točka lokalnoga maksimuma: $T=\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2\cdot e}\right)$;

c) $D(h)=\mathbb{R}$, interval rasta: $\left\langle -\infty,\ \frac{1}{2}\right\rangle$, interval pada: $\left\langle \frac{1}{2},+\infty\right\rangle$, točka lokalnoga maksimuma: $T=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{e}\right)$;

d) $D(p)=[0,\ 2\cdot\pi]$, intervali rasta: $\left\langle 0,\ \frac{\pi}{4}\right\rangle$ i $\left\langle \frac{5}{4}\cdot\pi,\ 2\cdot\pi\right\rangle$, interval pada: $\left\langle \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\cdot\pi\right\rangle$,
točka lokalnoga minimuma: $T_1=\left(\frac{5}{4}\cdot\pi,-\sqrt{2}\right)$, točka lokalnoga maksimuma: $T_2=\left(\frac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\right)$.

12. Pravokutno gradilište površine 1 ha treba ograditi tako da se za ograđivanje potroši najmanje materijala. Odredite optimalne dimenzije gradilišta i izrazite ih u metrima. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite. (*Napomena*: 1 ha = 10 000 m^2.)

Rezultat: $(x^*,y^*)=(100,100)$, tj. gradilište treba biti kvadrat stranice 100 metara.

13. Izračunajte sljedeće granične vrijednosti primjenom L'Hôpital-Bernoullijeva pravila:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot(x-\operatorname{arctg} x)}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2\cdot(e^{\cos y}-e)}{\sin^2 y}$;

c) $\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{t^2+t+1}{e^t}$;

d) $\lim\limits_{w\to -\infty}\dfrac{e^{2\cdot w}}{w^3-w^2+w-1}$.

Rezultati: **a**) $L=1$; **b**) $L=-e$; **c**) $L=0$; **d**) $L=0$.

14. Odredite intervale konveksnosti, intervale konkavnosti, točke pregiba (infleksije) i asimptote na graf sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$,

b) $g(t)=\dfrac{6\cdot\ln t}{5\cdot t^2}$;

c) $h(y)=e^{-2\cdot y^2}$.

Rezultati: **a)** Intervali konveksnosti: $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, interval konkavnosti: $\langle 0, 1\rangle$, točka pregiba (infleksije): $(1, 0)$, jedina asimptota: $x = 0$. **b)** Interval konveksnosti: $\left\langle \sqrt[6]{e^5}, +\infty \right\rangle$, interval konkavnosti: $\left\langle 0, \sqrt[6]{e^5} \right\rangle$, točka pregiba: $T = \left(\sqrt[6]{e^5}, e^{-\frac{5}{3}} \right)$, uspravna asimptota: os ordinata, desna vodoravna asimptota: os apscisa. **c)** Intervali konveksnosti: $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2} \right\rangle$ i $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$, interval konkavnosti: $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$, točke pregiba: $T_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$ i $T_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$, jedina asimptota: os apscisa.

15. Količina naboja (iskazana u C) koja prolazi kroz poprečni presjek vodiča u trenutku $t \geq 0$ (sekundi) dana je pravilom $Q(t) = t^3 - 3 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 1$. U kojem trenutku je jakost struje kroz vodič najmanja i kolika je ta najmanja jakost?

Rezultat: Najmanja jakost struje iznosi 3 A i postiže se u trenutku $t = 1$ (sekunda)

16. Ukupan broj bakterija N u nekoj kulturi u trenutku $t \geq 0$ dan je pravilom $N(t) = \dfrac{1000}{1 + 9 \cdot e^{-0.07 \cdot t}}$. Odredite:

a) početni broj bakterija u toj kulturi;
b) u kojem trenutku broj bakterija najbrže raste i ukupan broj bakterija u tom trenutku;
c) $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$ i interpretirajte dobiveni rezultat.

Rezultati: **a)** $N_0 = N(0) = 100$; **b)** $t_{\max} = \frac{100}{7} \cdot \ln 9 \approx 31.38892$, $N(t_{\max}) \approx 500$; **c)** $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 1000$. Što vrijeme više bude odmicalo, broj bakterija u kulturi bit će sve bliži 1000.

17. Zadana je funkcija $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ parametar. Ako je $N(f) = \{-1\}$, odredite sve točke pregiba (infleksije) i asimptote na graf te funkcije.

Rezultat: Jedina točka pregiba: $T = (-1, 0)$, jedina asimptota: $x = 0$.

18. Zadana je funkcija $g(x) = e^{a - x^2}$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ parametar. Graf te funkcije siječe os ordinata u točki $T = (0, e)$. Odredite sve lokalne ekstreme, točke pregiba i asimptote na graf funkcije g.

Rezultat: točka lokalnoga i globalnoga maksimuma: T, točke pregiba: $T_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e} \right)$ i $T_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e} \right)$, obostrana vodoravna asimptota: $y = 0$.

10. GRUPA ZADATAKA

1. Izračunajte granične vrijednosti (limese) nizova:

a) $a_n = \dfrac{11\cdot\left((2\cdot n-1)^2-(n+1)\cdot(3\cdot n-2)\right)}{(3\cdot n-2)^2+(n+1)\cdot(2\cdot n-1)}$;

b) $b_n = 14\cdot n\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{7\cdot n}\right)$;

c) $c_n = e^2\cdot\left(\dfrac{2\cdot n+3}{2\cdot n+5}\right)^{2\cdot n}$.

Rezultati: **a)** i **c)** 1; **b)** 2.

2. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran je pravilom: $a_n = \dfrac{6\cdot n-1}{3\cdot n+1}$. Odredite:

a) graničnu vrijednost (limes) L zadanoga niza.
b) najmanji $k\in\mathbb{N}$ za kojega vrijedi nejednakost: $|a_k - L| < 10^{-5}$.

Rezultati: **a)** $L=2$; **b)** $k_{\min} = 100\ 000$.

3. Odredite $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tako da realna funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana pravilom

$$g(w)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg} w - w}{2\cdot(w-\sin w)}, & \text{za } w<0,\\ \alpha\cdot w+\beta, & \text{za } w\in[0,2],\\ \dfrac{\ln(w-1)}{2-w}, & \text{za } w>2\end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

Rezultat: $(\alpha,\beta)=(-1,1)$.

4. Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije $q:[-6,2]\to\mathbb{R}$ definirane pravilom $q(\varepsilon)=\varepsilon^3-75\cdot\varepsilon$.

Rezultati: Najmanja vrijednost funkcije q jednaka je -142, a najveća 250.

5. Odredite sve **globalne** ekstreme funkcije $h(w)=\sqrt{2\cdot w-w^2}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultati: Najmanja vrijednost funkcije h jednaka je 0, a najveća 1.

6. U točki krivulje $K\ldots \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2\cdot(t - \cos t) \end{cases}$ određenoj parametrom $t = 0$ povučene su tangenta i normala na krivulju K. Izračunajte površinu lika kojega ti pravci zatvaraju s osi apscisa.

Rezultat: $P = 4$ kv. jed.

7. Izračunajte površinu lika kojega s objema koordinatnim osima zatvaraju tangenta i normala povučene na krivulju $K\ldots\, y = -x^3 - x^2 + x$ u točki $T = (-1,\ y_T)$.

Rezultat: $P = 1$ kv. jed.

8. Odredite sve točke krivulje $K\ldots\, y^2 = x$ u kojima tangenta povučena na krivulju K s objema koordinatnim osima zatvara trokut površine 2 kv. jed.

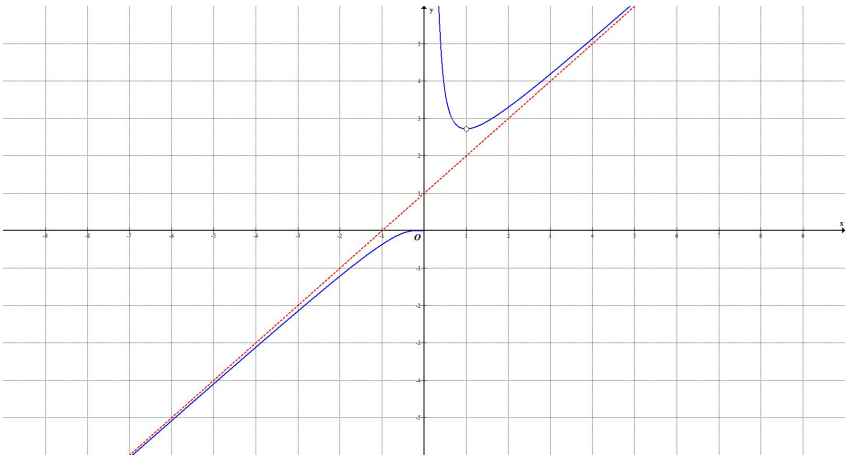
Rezultat: $T_1 = (4,2)$ i $T_2 = (4,-2)$.

9. Odredite sve točke lokalnih ekstrema, točke pregiba (infleksije) i asimptote na graf funkcije $f(x) = 864\cdot\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultati: Točka lokalnoga maksimuma: $M = (3,32)$, točka pregiba: $T = (4,27)$, uspravna asimptota $x = 0$ (os ordinata), (obostrana) vodoravna asimptota $y = 0$ (os apscisa).

10. Ispitajte tijek i nacrtajte graf funkcije f definirane pravilom $f(x) = x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Rezultati: $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ne siječe nijednu koordinatnu os, neprekidna na $D(f)$, nije ni parna, ni neparna, ni periodična, intervali rasta: $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, interval pada: $\langle 0, 1\rangle$, točka lokalnoga minimuma: $T = (1, e)$, interval konveksnosti: $\langle 0, +\infty\rangle$, interval konkavnosti: $\langle -\infty, 0\rangle$, asimptote: $x = 0$ i $y = x + 1$. Graf funkcije f prikazan je na slici 17. (Crveni crtkani pravac je kosa asimptota.)



Slika 17.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. GRUPA ZADATAKA

1. Najprije u eksponencijalnom obliku zapišemo kompleksan broj $z_1 = 1-\sqrt{3}\cdot i$. Tom je broju pridružena točka $Z_1 = \left(1,-\sqrt{3}\right)$. Ta točka se nalazi u IV. kvadrantu Gaussove ravnine. (Nacrtajte sliku!) Lako izračunamo modul i argument broja z_1:

$$r_1 = \sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\varphi_1 = 2\cdot\pi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = 2\cdot\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\cdot\pi.$$

Zbog toga je

$$z_1 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{5}{3}\cdot\pi}.$$

Tako dobijemo:

$$z = \frac{\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)^{2015}}{\left[\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{7}{6}\cdot\pi\right)\right]^{4028}} = \frac{\left(2\cdot e^{i\cdot\frac{5}{3}\cdot\pi}\right)^{2015}}{\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{7}{6}\cdot\pi}\right)^{4028}} = \frac{2^{2015}}{\left(\sqrt{2}\right)^{4028}}\cdot e^{i\cdot\pi\cdot\left(\frac{5}{3}\cdot 2015-\frac{7}{6}\cdot 4028\right)} =$$

$$= \frac{2^{2015}}{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{4028}}\cdot e^{i\cdot\pi\cdot(-1341)} = \frac{2^{2015}}{2^{2014}}\cdot e^{i\cdot\pi\cdot 1} = 2\cdot e^{i\cdot\pi}.$$

2. Imamo redom:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z^{1009}+1}{z^{1009}+i}\right) = \operatorname{Arg}\left[\frac{\left(e^{i\cdot\frac{\pi}{2018}}\right)^{1009}+1}{\left(e^{i\cdot\frac{\pi}{2018}}\right)^{1009}+i}\right] = \operatorname{Arg}\left(\frac{e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}+1}{e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}+i}\right) = \operatorname{Arg}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+i}\right] =$$

$$= \operatorname{Arg}\left(\frac{0+i\cdot 1+1}{0+i\cdot 1+i}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1+i}{2\cdot i}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2\cdot i}+\frac{i}{2\cdot i}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2}\cdot i^{-1}+\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Arg}\left[\frac{1}{2}\cdot(-i)+\frac{1}{2}\right] =$$

$$= \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot i\right) = 2\cdot\pi - \operatorname{arctg}(1) = 2\cdot\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\cdot\pi.$$

Ovdje smo primijenili sljedeće tvrdnje:

- $i^{4\cdot k+3}=-i,\ \forall k\in\mathbb{Z}$, pa posebno za $k=-1$ slijedi $i^{4\cdot(-1)+3}=i^{-1}=-i.$
- Broju $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot i$ odgovara točka $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ u IV. kvadrantu Gaussove ravnine (nacrtajte sliku!). Zbog toga se argument toga broja dobije kao gore.

3. Izračunajmo najprije broj z_0^{60}. Imamo redom:

$$z_0^{60}=\left(e^{i\cdot\frac{\pi}{20}}\right)^{60}=e^{i\cdot 3\cdot\pi}=\cos(3\cdot\pi)+i\cdot\sin(3\cdot\pi)=-1+i\cdot 0=-1.$$

Odatle slijedi:

$$S=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-z_0^{60}\right|\le 1\right\}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-(-1)\right|\le 1\right\}.$$

Promotrimo najprije skup

$$S_1=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-(-1)\right|=1\right\}.$$

S_1 je kružnica sa središtem u točki pridruženoj broju $z_1=-1$ i polumjerom $r=1$. Broju z_1 je pridružena točka $Z_1=(-1,0)$. Zbog toga u Gaussovoj ravnini nacrtamo kružnicu sa središtem u točki Z_1 i polumjerom r. Budući da se u definicijskoj relaciji skupa S pojavljuje znak $\le$, traženi grafički prikaz je krug omeđen nacrtanom kružnicom (vidjeti sliku 1.).

4. Neka je $z=x+y\cdot i,\ x,y\in\mathbb{R}$. Tada su $\mathrm{Re}(z)=x$ i $\mathrm{Im}\left(\overline{z}\right)=\mathrm{Im}(x-y\cdot i)=-y.$ Zbog toga je skup S jednak skupu svih točaka Gaussove ravnine za koje vrijedi jednakost $x-(-y)=1$, odnosno jednakost $y=-x+1$. Grafički prikaz toga skupa je pravac $y=-x+1$ (vidjeti sliku 2.).

5. Neka je $z=x+y\cdot i,\ x,y\in\mathbb{R}$. Tada su:

$$\frac{z}{i}=\frac{x+y\cdot i}{i}=\frac{(x+y\cdot i)\cdot i}{i\cdot i}=\frac{x\cdot i+y\cdot i^2}{i^2}=\frac{x\cdot i+y\cdot(-1)}{(-1)}=y-x\cdot i\Rightarrow\mathrm{Im}\left(\frac{z}{i}\right)=-x,$$
$$\overline{z}\cdot i=(x-y\cdot i)\cdot i=x\cdot i-y\cdot i^2=x\cdot i-y\cdot(-1)=y+x\cdot i\Rightarrow\mathrm{Re}\left(\overline{z}\cdot i\right)=y.$$

Zbog toga je skup S jednak skupu svih točaka Gaussove ravnine za koje vrijedi jednakost $-x+y=2$, odnosno jednakost $y=x+2$. Grafički prikaz toga skupa je pravac $y=x+2$ (vidjeti sliku 3.).

6. Zapišimo broj z u algebarskom obliku. Ostatci pri cjelobrojnom dijeljenju brojeva 2014, 2015, 2016 i 2017 s 4 su redom 2, 3, 0 i 1. Zbog toga je:

$$z=\frac{i^{2016}+i^{2015}}{i^{2014}+i^{2017}}=\frac{i^4+i^3}{i^2+i}=\frac{1+(-i)}{(-1)+i}=\frac{(-1)\cdot(-1+i)}{-1+i}=-1.$$

Tako je $\overline{z}=z=-1$, pa je $\left(\overline{z}\right)^{2018}=(-1)^{2018}=1$. Konačno je: $\operatorname{Arg}\left[\left(\overline{z}\right)^{2018}\right]=\operatorname{Arg}(1)=0$.

7. Iz $|2\cdot z|=8$ slijedi $|2|\cdot|z|=8$, odnosno $2\cdot|z|=8$,odnosno $|z|=4$.

Iz $\operatorname{Arg}(-z)=0$ slijedi:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Arg}(-1\cdot z)=0,\\&\operatorname{Arg}(-1)+\operatorname{Arg}(z)=0,\\&\pi+\operatorname{Arg}(z)=0,\\&\operatorname{Arg}(z)=0-\pi=-\pi=-\pi+2\cdot\pi=\pi.\end{aligned}$$

Zbog toga je traženi broj $z=4\cdot e^{i\cdot\pi}=4\cdot\left(\cos\pi+i\cdot\sin\pi\right)=4\cdot(-1+i\cdot 0)=-4.$

8. Iz $|(-5)\cdot z|=25$ slijedi $|-5|\cdot|z|=25$, odnosno $5\cdot|z|=25$, odnosno $|z|=5$.

Iz $\operatorname{Arg}\left(\overline{z}\right)=\frac{\pi}{2}$ slijedi:

$$\begin{aligned}&2\cdot\pi-\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{2}\\&\operatorname{Arg}(z)=2\cdot\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\pi.\end{aligned}$$

Zbog toga je traženi broj jednak:

$$z=5\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)=5\cdot\left(\cos\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)\right)=5\cdot(0+i\cdot(-1))=-5\cdot i.$$

9. Broju $z_1=-\sqrt{3}+i$ pridružena je točka $\left(-\sqrt{3},1\right)$. Izračunamo: $r_1=|z_1|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^3+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2,\quad \varphi_1=\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\cdot\pi$. Zbog toga je $z_1=2\cdot e^{i\cdot\frac{5}{6}\cdot\pi}$. Tako sada imamo:

$$8\cdot\overline{\left(\frac{z_1^{2016}}{z_2^{2017}}\right)}=8\cdot\overline{\left(\frac{2^{2016}\cdot e^{i\cdot\frac{5}{6}\cdot\pi\cdot 2016}}{2^{2019}\cdot e^{i\cdot\frac{5}{3}\cdot\pi\cdot 2019}}\right)}=8\cdot\overline{\left(2^{-3}\cdot e^{i\cdot\pi\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot 2016-\frac{5}{3}\cdot 2019\right)}\right)}=8\cdot\overline{\left(2^{-3}\cdot e^{i\cdot\pi\cdot(-1685)}\right)}=$$

$$=8\cdot\overline{\left(2^{-3}\cdot\left(\cos(-1685\cdot\pi)+i\cdot\sin(-1685\cdot\pi)\right)\right)}=8\cdot\overline{\left(2^{-3}\cdot(-1+i\cdot 0)\right)}=-8\cdot 2^{-3}=-1.$$

10. Postupite kao u prethodnom zadatku, pri čemu je najbolje oba broja zapisati u trigonometrijskom obliku. Dobiva se:

$$\overline{z_1^8\cdot z_2^4}=\overline{2^4\cdot\operatorname{cis}(14\cdot\pi)\cdot 2^{-4}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)}=\overline{\operatorname{cis}\left(14\cdot\pi+\frac{3}{2}\cdot\pi\right)}=\overline{\operatorname{cis}\left(\frac{31}{2}\cdot\pi\right)}=\overline{-i}=i.$$

11. Očito je $-8\cdot i=8\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)$. Zbog toga su sva rješenja zadane jednadžbe dana izrazom:

$$z_k=\sqrt[3]{8}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3}{2}\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{4\cdot k+3}{6}\cdot\pi\right),\ k=0,1,2.$$

Dakle, tražena rješenja su:

$$z_0=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{4\cdot 0+3}{6}\cdot\pi\right)=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot i,$$
$$z_1=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{4\cdot 1+3}{6}\cdot\pi\right)=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{7}{6}\cdot\pi\right)=-\sqrt{3}-i,$$
$$z_2=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{4\cdot 2+3}{6}\cdot\pi\right)=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{11}{6}\cdot\pi\right)=\sqrt{3}-i,$$

12. Postupite kao u prethodnom zadatku. Budući da je $-i=\operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)=e^{i\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi}$, dobiva se:

$$z_0=e^{i\cdot\left(\frac{4\cdot 0+3}{8}\cdot\pi\right)}=e^{i\cdot\frac{3}{8}\cdot\pi},$$
$$z_1=e^{i\cdot\left(\frac{4\cdot 1+3}{8}\cdot\pi\right)}=e^{i\cdot\frac{7}{8}\cdot\pi},$$
$$z_2=e^{i\cdot\left(\frac{4\cdot 2+3}{8}\cdot\pi\right)}=e^{i\cdot\frac{11}{8}\cdot\pi},$$
$$z_3=e^{i\cdot\left(\frac{4\cdot 3+3}{8}\cdot\pi\right)}=e^{i\cdot\frac{15}{8}\cdot\pi}.$$

13. Budući da je $i = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, sva rješenja zadane jednadžbe su dana izrazom:

$$z_k = \operatorname{cis}\left(\frac{4\cdot k+1}{24}\cdot\pi\right),\ k = 0,1,\ldots,11.$$

Zbog toga mora vrijediti nejednakost

$$\frac{3}{4}\cdot\pi < \frac{4\cdot k+1}{24}\cdot\pi \le \frac{5}{3}\cdot\pi \Leftrightarrow 18 < 4\cdot k+1 \le 40 \Leftrightarrow \frac{17}{4} < k \le \frac{39}{4}.,$$

Tu nejednakost zadovoljavaju prirodni brojevi 5, 6, 7, 8 i 9. Njih ima ukupno 5. Dakle, traženi broj je jednak 5.

14. Najprije odredimo eksponencijalni zapis broja z_1. Iz slike 4. vidi se da je tom broju pridružena točka $Z_1 = \left(1, -\sqrt{3}\right)$. Lako izračunamo modul i argument broja z_1:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\varphi_1 = 2\cdot\pi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = 2\cdot\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\cdot\pi.$$

Zbog toga je $z_1 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{5}{3}\cdot\pi}$.

Odredimo eksponencijalni zapis broja z_2. Iz slike 4. vidi se da je $r_2 = 2$, pa izračunajmo pripadni argument:

$$\varphi_2 = \frac{5}{3}\cdot\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{7}{6}\cdot\pi.$$

Zbog toga je $z_2 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{7}{6}\cdot\pi}$.

Tako dobijemo:

$$z = \frac{\left(2\cdot e^{i\cdot\frac{5}{3}\cdot\pi}\right)^{2046}}{\left(2\cdot e^{i\cdot\frac{7}{6}\cdot\pi}\right)^{2043}} = \frac{2^{2046}}{2^{2043}}\cdot e^{i\cdot\pi\cdot\left(\frac{5}{3}\cdot 2046 - \frac{7}{6}\cdot 2043\right)} = 2^3\cdot e^{i\cdot\frac{2053}{2}\cdot\pi} = 8\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}.$$

2. GRUPA ZADATAKA

1. Lako dobijemo $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, pa su $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Zbog toga je $B = \frac{1}{2} \cdot \left(A \cdot A^T + A^T \cdot A \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot A \cdot A^T \right) = A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Lako dobijemo $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $A - B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Zbog toga je $C = \frac{1}{10} \cdot 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Imamo redom:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = A \Rightarrow$$

$$B = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(A + A^{-1} \right) \right]^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(A + A \right) \right]^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot A \right)^2 = A^2 = A \cdot A =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2.$$

4. Prema definiciji inverza matrice vrijedi jednakost $A \cdot A^{-1} = E_2$. Prema zadanoj jednadžbi vrijedi jednakost $A \cdot \left(A^T - 6 \cdot X \right) = E_2$. Zbog jedinstvenosti inverza matrice, iz tih dviju jednakosti slijedi $A^{-1} = A^T - 6 \cdot X$. Izrazimo X iz ove jednakosti:

$$A^{-1} = A^T - 6 \cdot X \Leftrightarrow$$
$$6 \cdot X = A^T - A^{-1} \Leftrightarrow$$
$$X = \frac{1}{6} \cdot \left(A^T - A^{-1} \right).$$

Za zadanu matricu A izračunajmo A^T i A^{-1}. Odmah dobijemo:

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$$

pa je konačno:

$$X=\frac{1}{6}\cdot\left(A^T-A^{-1}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}3-3&4-(-2)\\2-(-4)&3-3\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}0&6\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

5. Determinanta matrice A jednaka je:

$$\det(A)=a\cdot(a+2)-(a+1)\cdot(a-1)=a^2+2\cdot a-(a^2-1)=a^2+2\cdot a-a^2+1=2\cdot a+1.$$

Prema uvjetu zadatka, ta determinanta mora biti jednaka 7. Tako dobivamo linearnu jednadžbu 1. stupnja s jednom nepoznanicom

$$2\cdot a+1=7.$$

Jedino rješenje te jednadžbe je $a=3$. Zbog toga je:

$$A=\begin{bmatrix}3&3-1\\3+1&3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\4&5\end{bmatrix}.$$

Tako konačno dobivamo:

$$B=\left(7\cdot A^{-1}\right)^T=\left(7\cdot\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}5&-2\\-4&3\end{bmatrix}\right)^T=\left(\begin{bmatrix}5&-2\\-4&3\end{bmatrix}\right)^T=\begin{bmatrix}5&-4\\-2&3\end{bmatrix}.$$

6. Prema Binet-Cauchyjevu teoremu vrijedi:

$$\det(C)=\det(A^3\cdot B^2)=\det(A^3)\cdot\det(B^2)=\left[\det(A)\right]^3\cdot\left[\det(B)\right]^2.$$

Lako izračunamo:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a&0\\2&1\end{vmatrix}=a\cdot 1-2\cdot 0=a-0=a,$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix}3&5\\4&7\end{vmatrix}=3\cdot 7-4\cdot 5=21-20=1,$$

pa uvrštavanjem u izraz za $\det(C)$ dobivamo:

$$\det(C)=a^3\cdot 1^2=a^3.$$

Prema zahtjevu zadatka, ta vrijednost mora biti jednaka 1. Zbog toga dobivamo kubnu jednadžbu

$$a^3=1.$$

Zbog pretpostavke $a\in\mathbb{R}$, odatle slijedi $a=1$.

7. Prema Binet-Cauchyjevu teoremu vrijedi:

$$\det(C)=\det\big((A-B)\cdot(A+B)\big)=\det(A-B)\cdot\det(A+B).$$

Lako izračunamo:

$$A-B=\begin{bmatrix} a-1 & 2-0 \\ 0-1 & 1-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A-B)=\begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=(a-1)\cdot(-1)-(-1)\cdot 2=-a+1+2=3-a,$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a+1 & 2+0 \\ 0+1 & 1+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\det(A+B)=\begin{vmatrix} a+1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=(a+1)\cdot 3-2\cdot 1=3\cdot a+3-2=3\cdot a+1,$$

$$\det(C)=\det(A-B)\cdot\det(A+B)=(3-a)\cdot(3\cdot a+1)=9\cdot a-3\cdot a^2+3-a=-3\cdot a^2+8\cdot a+3.$$

Prema zahtjevu zadatka, ta vrijednost mora biti jednaka -8. Zbog toga dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$-3\cdot a^2+8\cdot a+3=-8 \Leftrightarrow -3\cdot a^2+8\cdot a+11=0 \Rightarrow a_1=-1,\ a_2=\frac{11}{3}.$$

Zbog pretpostavke $a\in\mathbb{Z}$, odatle slijedi $a=-1$.

8. Determinantu matrice A najbrže je izračunati Laplaceovim razvojem po njezinom prvom stupcu. Tako odmah dobivamo:

$$\det(A)=(-1)\cdot x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-x\cdot(1\cdot 5-2\cdot 2)=-x\cdot 1=-x.$$

Tako iz jednadžbe $\det(A)=1$ slijedi $-x=1$, odnosno $x=-1$.

Preostaje izračunati inverz matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Redom računamo elemente adjunkte ove matrice:

$$b_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)=-1 \quad b_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-5)=5 \quad b_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(-2)=-2$$

$$b_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=(-1)\cdot 1=-1 \qquad b_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 5\end{vmatrix}=1\cdot 0=0 \qquad b_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot 0=0$$

$$b_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 1=1 \qquad b_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=(-1)\cdot 2=-2 \qquad b_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1=1$$

Zbog toga je

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 5 & -2\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 5 & 0 & -2\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

9. Neka je $C=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$. Iz jednakosti $6\cdot A^{-1}=C$ invertiranjem slijedi

$$6^{-1}\cdot\left(A^{-1}\right)^{-1}=C^{-1}\ ,$$

odnosno

$$\frac{1}{6}\cdot A=-\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -4\\ -2 & -2\end{bmatrix},$$

a odavde je

$$A=(-1\cdot)\begin{bmatrix}-1 & -4\\ -2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Sada se lako izračuna

$$B=\frac{1}{3}\cdot\left(A^T\right)^2=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}9 & 6\\ 12 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix}.$$

10. Neka je $C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$. Iz zadane jednakosti $\left(A^{-1}\right)^T=C$ transponiranjem slijedi $\left(\left(A^{-1}\right)^T\right)^T=C^T$, odnosno

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Odavde invertiranjem analogno kao u zadatku 8. slijedi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada se lako izračuna

$$B = A - A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. GRUPA ZADATAKA

1. Površina paralelograma kojega razapinju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka je duljini njihova vektorskoga umnoška. Primijetimo da vrijede jednakosti:

$$\vec{a} = (\alpha, 0, -1),\ \vec{b} = (1,1,0).$$

Zbog toga imamo redom:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\text{razvoj po 2. retku}) = (-\alpha) \cdot \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\alpha) \cdot \left(\vec{j} \cdot 0 - 1 \cdot \vec{k}\right) + \left(\vec{i} \cdot 1 - 1 \cdot \vec{j}\right) = \alpha \cdot \vec{k} + \vec{i} - \vec{j} = (1, -1, \alpha) \Rightarrow$$

$$P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + \alpha^2} = \sqrt{1 + 1 + \alpha^2} = \sqrt{2 + \alpha^2}.$$

Prema zahtjevu zadatka, vrijednost te površine mora biti jednaka $3 \cdot \sqrt{3}$. Tako dobivamo jednadžbu:

$$\sqrt{2 + \alpha^2} = 3 \cdot \sqrt{3}.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2 + \alpha^2} = 3 \cdot \sqrt{3} \quad /^2 \\ &2 + \alpha^2 = 9 \cdot 3, \\ &\alpha^2 = 25. \end{aligned}$$

Odatle je $\alpha \in \{-5, 5\}$.

2. Volumen paralelepipeda jednak je apsolutnoj vrijednosti mješovitoga umnoška vektora koji razapinju taj paralelepiped. Zapišimo zadane vektore kao uređene trojke:

$$\vec{a} = \vec{i} = (1,0,0),\ \vec{b} = \vec{j} - \vec{i} = (-1,1,0).$$

Tako redom računamo:

$$\begin{aligned} &\vec{b} + \vec{a} = (-1,1,0) + (1,0,0) = (-1+1, 1+0, 0+0) = (0,1,0), \\ &\vec{b} - \vec{a} = (-1,1,0) - (1,0,0) = (-1-1, 1-0, 0-0) = (-2,1,0), \end{aligned}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(\text{razvoj po 2. retku})=(-1)\cdot\begin{vmatrix}\vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0\end{vmatrix}=(-1)\cdot\left(\vec{j}\cdot 0-1\cdot\vec{k}\right)=\vec{k}=(0,0,1),$$

$$V=\left|M\left(\vec{b}+\vec{a},\ \vec{b}-\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|=(\text{razvoj po 3. retku})=\left|1\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\left|1\cdot\left[0\cdot 1-(-2)\cdot 1\right]\right|=\left|1\cdot 2\right|=2\text{ kub. jed.}$$

3. Izračunajmo najprije vektore koji razapinju paralelepiped. Primijetimo da vrijede jednakosti

$$\vec{a}=(1,-1,0)\text{ i }\vec{b}=(0,-1,1).$$

Zbog toga je:

$$\vec{c}:=\vec{a}+2\cdot\vec{b}=(1,-1,0)+2\cdot(0,-1,1)=(1,-1,0)+(0,-2,2)=(1,-3,2),$$
$$\vec{d}:=2\cdot\vec{a}-\vec{b}=2\cdot(1,-1,0)-(0,-1,1)=(2,-2,0)-(0,-1,1)=(2,-1,-1),$$
$$\vec{e}:=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}=(-1,-1,-1).$$

Traženo oplošje jednako je zbroju površina točno šest paralelograma. Oni tvore tri para međusobno sukladnih paralelograma. Paralelograme koji tvore prvi par razapinju vektori $\vec{c}$ i $\vec{d}$. Paralelograme koji tvore drugi par razapinju vektori $\vec{c}$ i $\vec{e}$, a paralelograme koji tvore treći par razapinju vektori $\vec{d}$ i $\vec{e}$.

Površina svakoga od dvaju paralelograma koji tvore prvi par jednaka je $\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|$. Površina svakoga od dvaju paralelograma koji tvore drugi par jednaka je $\left|\vec{c}\times\vec{e}\right|$, a površina svakoga od dvaju paralelograma koji tvore treći par jednaka je $\left|\vec{d}\times\vec{e}\right|$. Tako redom imamo:

$$\vec{c}\times\vec{d}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=5\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}+5\cdot\vec{k}=(5,5,5),$$
$$\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|=\sqrt{5^2+5^2+5^2}=\sqrt{3\cdot 5^2}=5\cdot\sqrt{3},$$

$$\vec{c}\times\vec{e}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=5\cdot\vec{i}-\vec{j}-4\cdot\vec{k}=(5,-1,-4),$$

$$\left|\vec{c}\times\vec{e}\right|=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{25+1+16}=\sqrt{42},$$

$$\vec{d}\times\vec{e}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}=(0,3,-3),$$

$$\left|\vec{d}\times\vec{e}\right|=\sqrt{0^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{2\cdot 3^2}=3\cdot\sqrt{2}.$$

Konačno je:

$$O=2\cdot\left(\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|+\left|\vec{c}\times\vec{e}\right|+\left|\vec{d}\times\vec{e}\right|\right)=2\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}+\sqrt{42}+3\cdot\sqrt{2}\right)\approx 38.76727 \text{ kub. jed.}$$

4. Odredimo najprije vektor $\vec{a}\times\vec{b}$. Imamo:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ x & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-x\cdot\vec{j}+\vec{k}=(1,-x,1).$$

Mješoviti umnožak vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$ jednak je:

$$M=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ x & 1 & 0\\ 1 & -x & 1\end{vmatrix}=-x\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ -x & 1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=x^2+2.$$

Primijetimo da je $x^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, što znači da je volumen paralelepipeda razapetoga vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$ jednak mješovitom umnošku tih vektora, tj. x^2+2 kub. jed. Zbog toga preostaje odrediti strogo pozitivno rješenje jednadžbe $x^2+2=6$. Lako se dobije $x=2$.

5. Zapišimo zadane vektore u koordinatnom obliku: $\vec{a}=(1,0,-1)$, $\vec{b}=(0,1,1)$. Računamo:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=(1,-1,1),$$

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\left[(1,0,-1)\cdot(0,1,1)\right]\cdot(1,0,-1)=\left[1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot 1\right]\cdot(1,0,1)=(-1)\cdot(1,0,-1)=(-1,0,1),$$

$$\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=(-1)\cdot(0,1,1)=(0,-1,-1).$$

Volumen prizme razapete izračunanim vektorima jednak je

$$V=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|-(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|2-(-1)\right|=\frac{3}{2}=1.5\text{ kub. jed.}$$

6. Neka je $c=(c_1,c_2,c_3)$. Tada je:

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=(-1,2,1)\cdot(c_1,c_2,c_3)=-c_1+2\cdot c_2+c_3,$$

pa iz prvoga uvjeta dobivamo jednadžbu:

$$-c_1+2\cdot c_2+c_3=4.$$

Nadalje,

$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 1\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}=(2\cdot c_3-c_2,\ c_3+c_1,-c_2-2\cdot c_1),$$

pa iz drugoga uvjeta dobivamo sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$(2\cdot c_3-c_2,\ c_3+c_1,-c_2-2\cdot c_1)=(3,2,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}2\cdot c_3-c_2=3,\\ c_3+c_1=2,\\ -c_2-2\cdot c_1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-c_2+2\cdot c_3=3,\\ c_1+c_3=2,\\ 2\cdot c_1+c_2=1.\end{cases}$$

Dobivene jednadžbe nisu međusobno nezavisne jer se lako vidi da je druga jednadžba jednaka poluzbroju prve i treće jednadžbe. Zbog toga odbacujemo npr. prvu jednadžbu gornjega sustava i umjesto nje uvrštavamo jednakost $-c_1+2\cdot c_2+c_3=4$. Tako dobivamo sustav:

$$\begin{cases}-c_1+2\cdot c_2+c_3=4,\\ c_1+c_3=2,\\ 2\cdot c_1+c_2=1.\end{cases}$$

Taj se sustav najbrže riješi tako da se zbroje prva i treća jednadžba, pa se od toga zbroja oduzme druga jednadžba. Tako se dobiva $3\cdot c_2=3$, a odatle je $c_2=1$. Iz treće jednadžbe odmah slijedi $c_1=0$, a potom iz druge $c_3=2$. Dakle, $\vec{c}=(0,1,2)$.

7. Svi vektori okomiti na zadane vektore su nužno kolinearni s vektorom $\vec{a}\times\vec{b}$ jer je taj vektor (uvijek) okomit na zadane vektore. Izračunamo:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j}\\ -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}=(1,1,0).$$

Duljina toga vektora jednaka je:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\,.$$

Budući da množenje vektora skalarom mijenja samo duljinu vektora, prvi traženi vektor je $\vec{c_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1,1,0)$. No, i vektor $\vec{c_2}=-\vec{c_1}$ ima tražena svojstva (razlika je jedino u orijentaciji vektora koja ne utječe ni na duljinu vektora, ni na okomitost), pa zadatak ima ukupno dva rješenja: $\vec{c_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1,1,0)$, $\vec{c_2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1,1,0)$.

Napomena: Zadatak je moguće riješiti i tako da se vektor $\vec{c}$ odredi iz jednakosti $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\left|\vec{c}\right|=1$. Taj način je nešto sporiji jer zahtijeva rješavanje sustava kojega tvore dvije linearne jednadžbe i jedna kvadratna jednadžba.

8. Zadani vektori će pripadati istoj ravnini ako i samo ako vrijednost njihova mješovitoga umnoška bude jednaka nuli. Zbog toga najprije odredimo mješoviti umnožak zadanih vektora (u bilo kojem poretku). Imamo:

$$M=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ -1 & x & 0\\ -3 & 3 & -4\end{vmatrix}=-(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & -4\end{vmatrix}+x\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ -3 & -4\end{vmatrix}=8\cdot x-16.$$

Tako iz jednadžbe $8\cdot x-16=0$ slijedi $x=2$.

9. Pretpostavimo da je $D=(0,0,d)$. Tada su:

$$\overrightarrow{AB}=(-3,3,-3),$$
$$\overrightarrow{AC}=(2,2,2),$$
$$\overrightarrow{AD}=(0,-1,d-4).$$

Volumen tetraedra $ABCD$ je šest puta manji od apsolutne vrijednosti mješovita umnoška gornjih vektora:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}-3 & 3 & -3\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & -1 & d-4\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left|-(-1)\cdot\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}+(d-4)\cdot\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|(-12)\cdot(d-4)\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left|(-12)\right|\cdot\left|d-4\right|=\frac{1}{6}\cdot 12\cdot\left|d-4\right|=2\cdot\left|d-4\right|.$$

Tako iz jednadžbe $2\cdot\left|d-4\right|=2$ slijedi $\left|d-4\right|=1$, odnosno ili $d-4=-1$ ili $d-4=1$. Odatle su $d_1=3,\ d_2=5$, pa su tražene točke $D_1=(0,0,3)$, $D_2=(0,0,5)$.

10. Tražena površina jednaka je polovici duljine vektorskoga umnoška vektora koji određuju trokut. Zbog toga odredimo tu duljinu, pri čemu koristimo jednakosti $\vec{m}\times\vec{m}=\vec{n}\times\vec{n}=\vec{0}$ i svojstvo antikomutativnosti vektorskoga umnoška $\vec{n}\times\vec{m}=-\left(\vec{m}\times\vec{n}\right)$. Dobivamo:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\left(\vec{m}+5\cdot\vec{n}\right)\times\left(7\cdot\vec{m}-\vec{n}\right)\right|=\left|\vec{m}\times\left(7\cdot\vec{m}\right)+\left(5\cdot\vec{n}\right)\times\left(7\cdot\vec{m}\right)+\underbrace{\vec{m}\times\left(-\vec{n}\right)}_{=\vec{n}\times\vec{m}}+\left(5\cdot\vec{n}\right)\times\left(-\vec{n}\right)\right|=$$

$$=\left|7\cdot\left(\underbrace{\vec{m}\times\vec{m}}_{=\vec{0}}\right)+5\cdot 7\cdot\left(\vec{n}\times\vec{m}\right)+\vec{n}\times\vec{m}-5\cdot\left(\underbrace{\vec{n}\times\vec{n}}_{=\vec{0}}\right)\right|=\left|36\cdot\left(\vec{n}\times\vec{m}\right)\right|=36\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|\cdot\sin\left(\angle\left(\vec{n},\vec{m}\right)\right)=$$

$$=36\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=36\cdot\frac{1}{2}=18.$$

Dakle, tražena površina iznosi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\cdot 18=9\ \text{ kv. jed.}$$

11. Označimo s φ traženi kut. Površina trokuta kojega zatvaraju vektori $\vec{c}$ i $\vec{d}$ jednaka je polovici duljine njihova vektorskoga umnoška. Zbog toga odredimo:

$$\vec{c}\times\vec{d}=\left(3\cdot\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-5\cdot\vec{b}\right)=3\cdot\left(\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=\vec{0}}\right)\underbrace{+\vec{b}\times\vec{a}}_{=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}-15\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-5\cdot\left(\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=\vec{0}}\right)=(-16)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),$$

$$P=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|(-16)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\underbrace{\left|\vec{a}\right|}_{=\sqrt{3}}\cdot\underbrace{\left|\vec{b}\right|}_{=2}\cdot\sin\varphi=16\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\varphi.$$

Prema zahtjevu zadatka, ta površina mora biti jednaka 16 kv. jed. Tako dobivamo trigonometrijsku jednadžbu:

$$16\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\varphi=24\Leftrightarrow\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Jedino rješenje te jednadžbe u intervalu $\left\langle 0,\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$ je $\varphi=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$. Dakle, $\varphi=\frac{\pi}{3}$ radijana.

12. Traženi volumen jednak je apsolutnoj vrijednosti mješovitoga umnoška $\left(\vec{m}\times\vec{n}\right)\cdot\vec{p}$. Pritom koristimo sljedeća svojstva:

- $\left(\alpha\cdot\vec{a}\right)\times\left(\beta\cdot\vec{b}\right)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, $\left(\alpha\cdot\vec{a}\right)\cdot\left(\beta\cdot\vec{b}\right)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\vec{a},\vec{b}\in V^3(O)$.
- distributivnost vektorskoga umnoška: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;
- antikomutativnost vektorskoga umnoška: $\vec{b}\times\vec{a}=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$;
- distributivnost skalarnoga umnoška: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
- $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, $\forall\vec{a}\in V^3(O)$;
- $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$, $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$ jer je vektorski umnožak okomit na svaki vektor koji tvori taj umnožak, pa je pripadni skalarni umnožak jednak nuli;
- $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}\right)$ jer zamjenom dvaju redaka determinante (koja predstavlja ekvivalentan zapis mješovitoga umnoška) ta determinanta mijenja svoj predznak;
- $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=1$ jer je volumen paralelepipeda kojega razapinju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, prema pretpostavci zadatka, jednak 1.

Tako redom imamo:

$$\begin{aligned}
V&=\left|\left(\vec{m}\times\vec{n}\right)\cdot\vec{p}\right|=\left|\left(\left(2\cdot\vec{a}+\vec{b}+2\cdot\vec{c}\right)\times\left(2\cdot\vec{a}+\vec{b}-2\cdot\vec{c}\right)\right)\cdot\left(2\cdot\vec{a}-\vec{b}+2\cdot\vec{c}\right)\right|=\\
&=\left|\left(2\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+4\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+2\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+2\cdot\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)-4\cdot\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)-2\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right)\cdot\left(2\cdot\vec{a}-\vec{b}+2\cdot\vec{c}\right)\right|=\\
&=\left|\left(2\cdot\underbrace{\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)}_{=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}+4\cdot\underbrace{\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)}_{=-\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)}+2\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+2\cdot\underbrace{\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)}_{=-\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}-4\cdot\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)-2\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right)\cdot\left(2\cdot\vec{a}-\vec{b}+2\cdot\vec{c}\right)\right|=\\
&=\left|\left(-8\cdot\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)-4\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right)\cdot\left(2\cdot\vec{a}-\vec{b}+2\cdot\vec{c}\right)\right|=\left|8\cdot\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}-8\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}\right|=\left|-8\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+8\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}\right|=\\
&=\left|-8\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}-8\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\left|-16\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=16\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=16\cdot1=16\text{ kub. jed.}
\end{aligned}$$

4. GRUPA ZADATAKA

1. Logaritamska funkcija je definirana na području na kojemu je logaritmand (izraz pod logaritmom) strogo pozitivan. Zbog toga mora vrijediti nejednakost:

$$\check{z}-1>0$$

Nadalje, vrijednost izraza pod drugim korijenom u nazivniku razlomka mora biti strogo pozitivna. Naime, vrijednost bilo kojega izraza pod drugim korijenom mora biti jednaka nekom pozitivnom broju ili nuli. No, u ovom slučaju vrijednost izraza ne smije biti jednaka nuli jer bi tada vrijednost nazivnika razlomka bila jednak nuli, pa razlomak ne bi bio definiran. Dakle, mora vrijediti nejednakost:

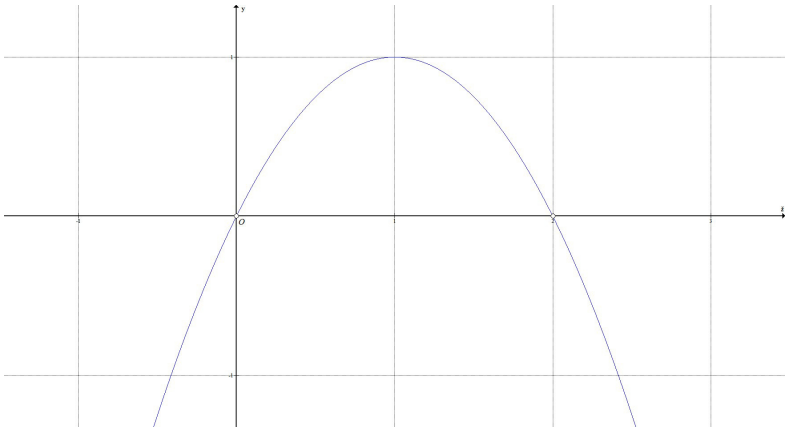
$$2\cdot\check{z}-\check{z}^2>0.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav nejednadžbi:

$$\begin{cases}\check{z}-1>0,\\ 2\cdot\check{z}-\check{z}^2>0.\end{cases}$$

Riješimo taj sustav. Iz prve nejednadžbe odmah slijedi $\check{z}>1,$ pa je skup svih rješenja te nejednadžbe interval $\langle 1,+\infty\rangle$.

Druga nejednadžba je kvadratna nejednadžba. Nju je najlakše riješiti grafički. Skicirajmo graf funkcije $g(\check{z})=2\cdot\check{z}-\check{z}^2$. Riješimo jednadžbu $g(\check{z})=0,$ odnosno jednadžbu $2\cdot\check{z}-\check{z}^2=0$. Dobivamo: $\check{z}_1=0,\ \check{z}_2=2.$ Koeficijent uz $\check{z}^2$ jednak je –1, pa je graf funkcije g parabola oblika ∩ (vidjeti sliku 17.)



Slika 17.

Iz gornje slike očitamo da je rješenje nejednadžbe $2\cdot\check{z}-\check{z}^2>0$ interval $\langle 0,2\rangle$.

Dakle, rješenje zadatka je presjek intervala $\langle 1,+\infty\rangle$ i intervala $\langle 0,2\rangle$. Taj skup je interval $\langle 1,2\rangle$. Prema tome, $D(f)=\langle 1,2\rangle$.

2. Vrijednost izraza pod drugim korijenom mora biti jednaka nekom pozitivnom realnom broju ili nuli. Tako dobivamo nejednadžbu:

$$\log_2\left(\frac{x+2}{2\cdot x}\right)\geq 0,$$

odnosno toj nejednadžbi ekvivalentnu nejednadžbu

$$\frac{x+2}{2\cdot x}\geq 1.$$

Primijetimo da nejednakost $\frac{x+2}{2\cdot x}\geq 1$ povlači nejednakost $\frac{x+2}{2\cdot x}>0$, pa nije potrebno postavljati uvjet da vrijednost izraza pod logaritmom treba biti strogo pozitivna. Također, nejednakost $\frac{x+2}{2\cdot x}\geq 1$ povlači da je razlomak na lijevoj strani definiran i da je njegova vrijednost jednaka ili veća od 1. Zbog toga nije potrebno postavljati uvjet da vrijednost nazivnika toga razlomka treba biti različita od nule.

Preostaje riješiti nejednadžbu $\frac{x+2}{2\cdot x}\geq 1$. Imamo redom:

$$\frac{x+2}{2\cdot x}-1\geq 0,$$
$$\frac{x+2-2\cdot x}{2\cdot x}\geq 0,$$
$$\frac{2-x}{2\cdot x}\geq 0.$$

Razlikujemo točno dva moguća slučaja:

I. $\begin{cases}2-x\geq 0,\\ 2\cdot x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x\geq -2,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\langle 0,2]$;

II. $\begin{cases}2-x\leq 0,\\ 2\cdot x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x\leq -2,\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2,\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$ (prazan skup).

Dakle, rješenje zadatka je $D(g)=\langle 0,2]$

3. Odredimo najprije inverz zadane funkcije. (Prešutno pretpostavljamo da je ta funkcija bijekcija sa svoje domene na svoju sliku.) U pravilu funkcije h zamijenimo $h(\check{s})$ s y, pa iz dobivene jednakosti izrazimo $\check{s}$. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
& y = \frac{e^{\check{s}}}{2\cdot e^{\check{s}}+1}, \\
& \left(2\cdot e^{\check{s}}+1\right)\cdot y = e^{\check{s}}, \\
& 2\cdot e^{\check{s}}\cdot y + y = e^{\check{s}}, \\
& 2\cdot e^{\check{s}}\cdot y - e^{\check{s}} = -y, \quad /:(-1) \\
& -2\cdot e^{\check{s}}\cdot y + e^{\check{s}} = y, \\
& e^{\check{s}}\cdot(1-2\cdot y) = y, \\
& e^{\check{s}} = \frac{y}{1-2\cdot y}, \quad /\ln \\
& \check{s} = \ln\left(\frac{y}{1-2\cdot y}\right).
\end{aligned}
$$

Tako smo dobili:

$$h^{-1}(\check{s}) = \ln\left(\frac{\check{s}}{1-2\cdot\check{s}}\right).$$

Odredimo prirodnu domenu te funkcije. Da bi logaritamska funkcija bila definirana, vrijednost logaritmanda mora biti strogo pozitivna. Zbog toga dobivamo uvjet:

$$\frac{\check{s}}{1-2\cdot\check{s}} > 0.$$

Primijetimo da nejednakost $\frac{\check{s}}{1-2\cdot\check{s}} > 0$ povlači da je razlomak na lijevoj strani nejednakosti definiran i da je njegova vrijednost strogo pozitivan realan broj. Zbog toga nije potrebno postavljati uvjet da vrijednost nazivnika toga razlomka mora biti različita od nule.

Preostaje riješiti nejednadžbu $\frac{\check{s}}{1-2\cdot\check{s}} > 0$. Razlikujemo točno dva moguća slučaja:

I. $\begin{cases}\check{s} > 0, \\ 1-2\cdot\check{s} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\check{s} > 0, \\ -2\cdot\check{s} > -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\check{s} > 0, \\ \check{s} < \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \check{s} \in \left\langle 0,\ \frac{1}{2}\right\rangle;$

II. $\begin{cases}\check{s} < 0, \\ 1-2\cdot\check{s} < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\check{s} < 0, \\ -2\cdot\check{s} < -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\check{s} < 0, \\ \check{s} > \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$ (prazan skup).

Odatle slijedi da je traženi skup $D\left(h^{-1}\right)=\left\langle 0,\ \frac{1}{2}\right\rangle$.

4. Primijenimo jednakost $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$, za svaku bijekciju f. To znači da je inverz zadane funkcije upravo funkcija f. Odredimo taj inverz postupkom opisanim u rješenju zadatka 3. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&y=\frac{2^{č}}{2^{č+1}-1},\\
&\left(2^{č+1}-1\right)\cdot y=2^{č},\\
&2^{č+1}\cdot y-y=2^{č},\\
&2^{č}\cdot 2^{1}\cdot y-2^{č}=y,\\
&2^{č}\cdot(2\cdot y-1)=y,\\
&2^{č}=\frac{y}{2\cdot y-1},\quad /\log_2\\
&č=\log_2\left(\frac{y}{2\cdot y-1}\right).
\end{aligned}$$

Tako smo dobili:

$$f(č)=\log_2\left(\frac{č}{2\cdot č-1}\right).$$

Odredimo prirodnu domenu te funkcije. Da bi logaritamska funkcija bila definirana, vrijednost logaritmanda mora biti strogo pozitivna. To znači da mora vrijediti nejednakost:

$$\frac{č}{2\cdot č-1}>0.$$

Primijetimo da nejednakost $\frac{č}{2\cdot č-1}>0$ povlači da je razlomak na lijevoj strani definiran i da je njegova vrijednost strogo pozitivna. To znači da nije potrebno postavljati uvjet da vrijednost nazivnika toga razlomka mora biti različita od nule.

Preostaje riješiti nejednadžbu $\frac{č}{2\cdot č-1}>0$. Razlikujemo točno dva moguća slučaja:

I. $\begin{cases} č>0, \\ 2\cdot č-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} č>0, \\ 2\cdot š>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} č>0, \\ č>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow č\in\left\langle \frac{1}{2},\ +\infty\right\rangle;$

II. $\begin{cases} \check{c} < 0, \\ 2\cdot\check{c} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \check{c} < 0, \\ 2\cdot\check{c} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \check{c} < 0, \\ \check{c} < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \check{c} \in \langle -\infty,\ 0\rangle.$

Zbog toga je rješenje zadatka unija intervala $\langle -\infty, 0\rangle$ i intervala $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$. Ta unija je jednaka skupu koji se dobije kad se iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ „izbaci“ segment $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. Dakle, $D(f) = \langle -\infty, 0\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle = \mathbb{R} \setminus \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

5. Grupirajmo prvi i treći, te drugi i četvrti član u pravilu zadanoga polinoma. Imamo redom:

$$p(đ) = (đ^3 - đ) + (-2\cdot đ^2 + 2) = đ\cdot\left(đ^2 - 1\right) - 2\cdot\left(đ^2 - 1\right) = \left(đ - 2\right)\cdot\left(đ^2 - 1\right) = \left(đ - 2\right)\cdot\left(đ - 1\right)\cdot\left(đ + 1\right).$$

Sve nultočke zadanoga polinoma odredimo tako da izraz u svakoj pojedinoj zagradi izjednačimo s nulom:

$$\big((đ - 2 = 0) \vee (đ - 1 = 0) \vee (đ + 1 = 0)\big) \Leftrightarrow \big((đ = 2) \vee (đ = 1) \vee (đ = -1)\big)$$

(S $\vee$ je označen logički operator „ili“.) Dakle, traženi skup je $N(p) = \{-1, 1, 2\}$.

6. Grupirajmo članove u pravilu zadanoga polinoma tako da zasebno grupiramo prvi i posljednji član, a zasebno drugi i treći član. Primijenimo formule za rastav na faktore zbroja kubova, odnosno razlike kvadrata. Imamo redom:

$$\begin{aligned} p(w) &= (2\cdot w^3 + 2) + (-3\cdot w^2 - 3\cdot w) = 2\cdot(w^3 + 1) - 3\cdot w\cdot(w + 1) = \\ &= 2\cdot(w + 1)\cdot(w^2 - w + 1) - 3\cdot w\cdot(w + 1) = (w + 1)\cdot\left[2\cdot(w^2 - w + 1) - 3\cdot w\right] = \\ &= (w + 1)\cdot(2\cdot w^2 - 2\cdot w + 2 - 3\cdot w) = (w + 1)\cdot(2\cdot w^2 - 5\cdot w + 2) = \\ &= (w + 1)\cdot(2\cdot w^2 - 4\cdot w - w + 2) = (w + 1)\cdot\left[(2\cdot w^2 - 4\cdot w) + (-w + 2)\right] = \\ &= (w + 1)\cdot\left[2\cdot w\cdot(w - 2) - (w - 2)\right] = (w + 1)\cdot(w - 2)\cdot(2\cdot w - 1). \end{aligned}$$

Preostaje odrediti nultočke polinoma p. Izraz u svakoj pojedinoj zagradi izjednačimo s nulom:

$$\big((w + 1 = 0) \vee (w - 2 = 0) \vee (2\cdot w - 1 = 0)\big) \Leftrightarrow \left((w = -1) \vee (w = 2) \vee \left(w = \frac{1}{2}\right)\right).$$

Dakle, traženi skup je $N(p) = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

7. Podijelimo zadane polinome prema pravilu za dijeljenje polinoma. Imamo redom:

$$\begin{array}{l}
\left(t^4-t^3-7\cdot t^2+t+6\right):\left(t^2-1\right)=t^2-t-6\\
\underline{-\left(t^4-t^2\right)}\\
-t^3-6\cdot t^2+t+6\\
\underline{-\left(-t^3+t\right)}\\
-6\cdot t^2+6\\
\underline{-\left(-6\cdot t^2+6\right)}\\
0
\end{array}$$

Tako smo dobili da polinom p_1 pri dijeljenju polinomom p_2 daje količnik $q(t)=t^2-t-6$ i ostatak 0. Budući da je ostatak pri dijeljenju jednak 0, zaključujemo da je polinom p_1 djeljiv polinomom p_2.

Iz provedenoga dijeljenja izravno slijedi jednakost $p_1=p_2\cdot q$, odnosno jednakost

$$t^4-t^3-7\cdot t^2+t+6=\left(t^2-1\right)\cdot\left(t^2-t-6\right).$$

Nultočke polinoma p_1 su sva realna rješenja jednadžbe $t^4-t^3-7\cdot t^2+t+6=0$. Zbog gornje jednakosti, ta je jednadžba ekvivalentna jednadžbi:

$$\left(t^2-1\right)\cdot\left(t^2-t-6\right)=0.$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Zbog toga imamo:

$$\left(\left(t^2-1\right)\cdot\left(t^2-t-6\right)=0\right)\Leftrightarrow\left(\left(t^2-1=0\right)\vee\left(t^2-t-6=0\right)\right)\Leftrightarrow\left(\left(t=-1\right)\vee(t=-1)\vee(t=-2)\vee(t=3)\right).$$

Dakle, traženi skup je $N(p_1)=\{-2,-1,1,3\}$.

8. Podijelimo zadane polinome prema pravilu za dijeljenje polinoma. Imamo redom:

$$\begin{array}{l}
\left(-12\cdot u^5-u^4+13\cdot u^3+u^2-u\right):\left(u^3-u\right)=-12\cdot u^2-u+1\\
\underline{-\left(-12\cdot u^5+12\cdot u^3\right)}\\
-u^4+u^3+u^2-u\\
\underline{-\left(-u^4+u^2\right)}\\
u^3-u\\
\underline{-\left(u^3-u\right)}\\
0
\end{array}$$

Tako smo dobili da polinom p_1 pri dijeljenju polinomom p_2 daje količnik $q(u) = -12 \cdot u^2 - u + 1$ i ostatak 0. Budući da je ostatak pri dijeljenju jednak 0, zaključujemo da je polinom p_1 djeljiv polinomom p_2.

Iz provedenoga dijeljenja izravno slijedi jednakost $p_1 = p_2 \cdot q$, odnosno jednakost

$$-12 \cdot u^5 - u^4 + 13 \cdot u^3 + u^2 - u = \left(u^3 - u\right) \cdot \left(-12 \cdot u^2 - u + 1\right).$$

Nultočke polinoma p_1 su sva realna rješenja jednadžbe $-12 \cdot u^5 - u^4 + 13 \cdot u^3 + u^2 - u = 0$. Zbog gornje jednakosti, ta je jednadžba ekvivalentna jednadžbi:

$$\left(u^3 - u\right) \cdot \left(-12 \cdot u^2 - u + 1\right) = 0,$$

odnosno jednadžbi

$$u \cdot \left(u^2 - 1\right) \cdot \left(-12 \cdot u^2 - u + 1\right) = 0.$$

Umnožak triju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Zbog toga imamo:

$$\left(u \cdot \left(u^2 - 1\right) \cdot \left(-12 \cdot u^2 - u + 1\right) = 0\right) \Leftrightarrow \left((u = 0) \vee \left(u^2 - 1 = 0\right) \vee \left(-12 \cdot u^2 - u + 1 = 0\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left((u = 0) \vee (u = -1) \vee (u = -1) \vee \left(u = -\frac{1}{3}\right) \vee \left(u = \frac{1}{4}\right)\right).$$

Dakle, traženi skup je $N(p_1) = \left\{-1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 1\right\}$.

9. **a)** Racionalna funkcija je definirana za one vrijednosti nezavisne varijable za koje je vrijednost nazivnika te funkcije različita od nule. Skup svih tih vrijednosti – a to je upravo tražena prirodna domena - najbrže i najlakše dobijemo tako da iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ „izbacimo“ sve realne nultočke nazivnika zadane funkcije.

Iz jednadžbe $2 + \alpha - \alpha^2 = 0$ slijedi $\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = 2.$ Zbog toga je traženi skup $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

b) Podijelimo brojnik zadane racionalne funkcije njezinim nazivnikom. Dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&\left(\alpha^5+2\right):\left(-\alpha^2+\alpha+2\right)=-\alpha^3-\alpha^2-3\cdot\alpha-5\\
&\underline{-\left(\alpha^5-\alpha^4-2\cdot\alpha^3\right)}\\
&\alpha^4+2\cdot\alpha^3+2\\
&\underline{-\left(\alpha^4-\alpha^3-2\cdot\alpha^2\right)}\\
&3\cdot\alpha^3+2\cdot\alpha^2+2\\
&\underline{-\left(3\cdot\alpha^3-3\cdot\alpha^2-6\cdot\alpha\right)}\\
&5\cdot\alpha^2+6\cdot\alpha+2\\
&\underline{-\left(5\cdot\alpha^2-5\cdot\alpha-10\right)}\\
&11\cdot\alpha+12
\end{aligned}
$$

Dakle, dijeljenjem brojnika zadane racionalne funkcije njezinim nazivnikom dobiva se količnik $q(\alpha)=-\alpha^3-\alpha^2-3\cdot\alpha-5$ i ostatak $r(\alpha)=11\cdot\alpha+12$. Analogno kao u prethodnim zadacima odatle slijedi:

$$\alpha^5+2=\left(-\alpha^2+\alpha+2\right)\cdot\left(-\alpha^3-\alpha^2-3\cdot\alpha-5\right)+\left(11\cdot\alpha+12\right).$$

Podijelimo obje strane ove jednakosti s $-\alpha^2+\alpha+2$. Dobijemo:

$$\frac{\alpha^5+2}{-\alpha^2+\alpha+2}=-\alpha^3-\alpha^2-3\cdot\alpha-5+\frac{11\cdot\alpha+12}{-\alpha^2+\alpha+2},$$

odnosno

$$f(\alpha)=-\alpha^3-\alpha^2-3\cdot\alpha-5+\frac{11\cdot\alpha+12}{-\alpha^2+\alpha+2}.$$

Dobiveni prikaz je upravo traženi prikaz.

10.a) Postupimo analogno kao u zadatku 9.a). Riješimo jednadžbu $\beta^3-16\cdot\beta=0$. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&\beta^3-16\cdot\beta=0,\\
&\beta\cdot\left(\beta^2-16\right)=0,\\
&\beta\cdot\left(\beta-4\right)\cdot\left(\beta+4\right)=0.
\end{aligned}
$$

Odatle slijedi $\beta_1=0,\ \beta_2=4,\ \beta_3=-4.$ Zbog toga je traženi skup $D(g)=\mathbb{R}\setminus\{-4,0,4\}$.

b) Podijelimo brojnik zadane racionalne funkcije njezinim nazivnikom. Dobivamo:

$$\begin{array}{l}
\left(-\beta^5+3\right):\left(\beta^3-16\cdot\beta\right)=-\beta^2-16 \\
\underline{-\left(-\beta^5+16\cdot\beta^3\right)} \\
-16\cdot\beta^3+3 \\
\underline{-\left(-16\cdot\beta^3+256\cdot\beta\right)} \\
-256\cdot\beta+3
\end{array}$$

Dakle, dijeljenjem brojnika zadane racionalne funkcije njezinim nazivnikom dobiva se količnik $q(\beta)=-\beta^2-16$ i ostatak $r(\beta)=-256\cdot\beta+3$. Analogno kao u prethodnim zadacima odatle slijedi:

$$-\beta^5+3=\left(\beta^3-16\cdot\beta\right)\cdot\left(-\beta^2-16\right)+\left(-256\cdot\beta+3\right).$$

Podijelimo obje strane ove jednakosti s $\beta^3-16\cdot\beta$. Dobijemo:

$$\frac{-\beta^5+3}{\beta^3-16\cdot\beta}=-\beta^2-16+\frac{-256\cdot\beta+3}{\beta^3-16\cdot\beta},$$

odnosno

$$g(\beta)=-\beta^2-16+\frac{-256\cdot\beta+3}{\beta^3-16\cdot\beta}.$$

Dobiveni prikaz je upravo traženi prikaz.

11. Prema teoremu o dijeljenju polinoma s ostatkom mora vrijediti jednakost:

$$p_1=q\cdot p_2+r.$$

Odatle slijedi:

$$p_2=\frac{p_1-r}{q}=\frac{t^5-t^4-3\cdot t^3+3\cdot t^2-2\cdot t+5-(2\cdot t+1)}{t^2+1}=\frac{t^5-t^4-3\cdot t^3+3\cdot t^2-4\cdot t+4}{t^2+1}=$$
$$=\frac{t^4\cdot(t-1)-3\cdot t^2\cdot(t-1)-4\cdot(t-1)}{t^2+1}=\frac{(t-1)\cdot\left(t^4-3\cdot t^2-4\right)}{t^2+1}=\frac{(t-1)\cdot\left(t^4+t^2-4\cdot t^2-4\right)}{t^2+1}=$$
$$=\frac{(t-1)\cdot\left(t^2\cdot\left(t^2+1\right)-4\cdot\left(t^2+1\right)\right)}{t^2+1}=\frac{(t-1)\cdot\left(t^2+1\right)\cdot\left(t^2-4\right)}{t^2+1}=(t-1)\cdot(t-2)\cdot(t+2).$$

Sada lako očitamo $N\left(p_2\right)=\{-2,1,2\}$.

Napomena: Zadatak se može riješiti i dijeljenjem polinoma $p_3(t)=\left(p_1-r\right)(t)=$ $=t^5-t^4-3\cdot t^3+3\cdot t^2-4\cdot t+4$ i polinoma $q(t)=t^2+1$. Njihov je količnik jednak $p_2(t)=t^3-t^2-4\cdot t+4$. Taj polinom lako rastavimo na faktore:

$$p_2(t)=t^3-t^2-4\cdot t+4=t^2\cdot(t-1)-4\cdot(t-1)=(t-1)\cdot\left(t^2-4\right),$$

pa se postupak dalje nastavlja kao u gornjem rješenju.

12. Iz podatka $g(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus[-2,3]$, zaključujemo da vrijednost funkcije g postoji za svaki $x\in\mathbb{R}\setminus[-2,3]$ i da je ta vrijednost različita od nule. Odatle slijedi da funkcija g nema ni nultočaka, ni polova izvan segmenta $[-2,3]$. Zbog toga tražene skupove određujemo koristeći graf funkcije g na segmentu $[-2,3]$, tj. sliku 5.

Iz slike 5. vidimo da su sjecišta grafa funkcije g s osi apscisa točke $(-1,0)$ i $(2,0)$. To znači da su sve nultočke zadane funkcije $x_1=-1$ i $x_2=2$. Dakle, $N(g)=\{-1,2\}$.

Nadalje, iz slike 5. vidimo da su uspravne asimptote na graf funkcije g pravci $x=0$ i $x=1$. To znači da su svi polovi zadane funkcije $x_3=0$ i $x_4=1$. Dakle, $P(g)=\{0,1\}$.

5. GRUPA ZADATAKA

1. Zapišimo najprije oba broja u eksponencijalnom obliku. Imamo:

$$Z_2=(-1,-1)\Rightarrow r_2=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2},\quad \varphi_2=\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right)=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\cdot\pi\Rightarrow z_2=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{5}{4}\cdot\pi};$$

$$r_1=2,\quad \varphi_1=\frac{5}{6}\cdot\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{12}\Rightarrow z_1=2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}.$$

Primjenom de Moivréove formule za potenciranje kompleksnoga broja dobivamo:

$$\frac{z_2^{2030}}{z_1^{1014}}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2030}\cdot e^{i\cdot\frac{5}{4}\cdot\pi\cdot 2030}}{2^{1014}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}\cdot 1014}}=\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2030}}{2^{1014}}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot 2030-\frac{1}{12}\cdot 1014\right)\cdot\pi}=\frac{2^{1015}}{2^{1014}}\cdot e^{i\cdot 2453\cdot\pi}=$$

$$=2^1\cdot(\underbrace{\cos(2453\cdot\pi)}_{=-1}+i\cdot\underbrace{\sin(2453\cdot\pi)}_{=0})=-2.$$

2. Brojnik i nazivnik zadanoga kompleksnoga broja najprije zapišimo u trigonometrijskom ili eksponencijalnom obliku. Označimo $z_1:=\sqrt{3}-i$, $z_2:=\sqrt{3}\cdot i-1=-1+\sqrt{3}\cdot i$, pa imamo:

$$r_1=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2,$$

$$\varphi_1=2\cdot\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\cdot\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\cdot\pi,$$

$$r_2=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2,$$

$$\varphi_2=\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\cdot\pi.$$

Zbog toga su:

$$z_1=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{11}{6}\cdot\pi\right),\ z_2=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{2}{3}\cdot\pi\right),$$

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{11}{6}\cdot\pi\right)}{2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{2}{3}\cdot\pi\right)}=\operatorname{cis}\left(\frac{11}{6}\cdot\pi-\frac{2}{3}\cdot\pi\right)=\operatorname{cis}\left(\frac{7}{6}\cdot\pi\right).$$

Tako dalje slijedi:

$$\overline{z^{2019}}=\overline{\left(\operatorname{cis}\left(\frac{7}{6}\cdot\pi\right)\right)^{2019}}=\overline{\operatorname{cis}\left(\frac{7}{6}\cdot\pi\cdot 2019\right)}=\overline{\operatorname{cis}\left(\frac{4711}{2}\cdot\pi\right)}=\overline{\cos\left(\frac{4711}{2}\cdot\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4711}{2}\cdot\pi\right)}=$$

$$=\overline{0+i\cdot(-1)}=1\cdot i=i=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}.$$

3. Izračunajmo najprije broj z i zapišimo ga u trigonometrijskom obliku. Imamo:

$$z=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot i+i^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\frac{3-2\cdot\sqrt{3}\cdot i+(-1)}{3+1}=\frac{2-2\cdot\sqrt{3}\cdot i}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i,$$

$$r=|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1,\quad \varphi=2\cdot\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)=2\cdot\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\cdot\pi\Rightarrow z=\operatorname{cis}\left(\frac{5}{3}\cdot\pi\right).$$

Primjenom de Moivréove formule za potenciranje kompleksnoga broja dobivamo:

$$z^{2019}=\left(\operatorname{cis}\left(\frac{5}{3}\cdot\pi\right)\right)^{2019}=\operatorname{cis}\left(\frac{5}{3}\cdot\pi\cdot 2019\right)=\operatorname{cis}\left(3365\cdot\pi\right)=\cos(3365\cdot\pi)+i\cdot\sin(3365\cdot\pi)=-1+i\cdot 0=-1.$$

Zbog toga je

$$\overline{z^{2019}}=\overline{-1+0\cdot i}=-1+0\cdot i=-1.$$

Tom je broju pridružena točka (–1, 0) i ta je točka rješenje zadatka.

4. Zapišimo najprije oba broja u trigonometrijskom obliku. Imamo:

$$r_1=1,\ \operatorname{Arg}\left(z_1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow z_1=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

$$r_2=1,\ \operatorname{Arg}\left(z_2\right)=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\cdot\pi\Rightarrow z_2=\operatorname{cis}\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\right).$$

Primjenom de Moivréove formule za potenciranje kompleksnoga broja dobivamo:

$$\overline{z_1}+z_2^{2019}=\operatorname{cis}\left(2\cdot\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{cis}\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 2019\right)=\operatorname{cis}\left(\frac{5}{3}\cdot\pi\right)+\operatorname{cis}(2692\cdot\pi)=$$

$$=\cos\left(\frac{5}{3}\cdot\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{5}{3}\cdot\pi\right)+\cos(2692\cdot\pi)+i\cdot\sin(2692\cdot\pi)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i+1+0\cdot i=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\Rightarrow$$

$$\operatorname{Arg}\left(\overline{z_1}+z_2^{2019}\right)=2\cdot\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\cdot\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\cdot\pi.$$

5. Uočimo da je

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1+i| \geq 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z-(1-i)| \leq 1\},$$

pa je grafički prikaz skupa S_1 krug sa središtem u točki $Z_0 = (1,-1)$ i polumjerom $r = 1$.

Nadalje, ako je $z = x + y \cdot i$, pri čemu su $x, y \in \mathbb{R}$, onda su:

$$\frac{z}{i} = \frac{x+y\cdot i}{i} = \frac{x\cdot i + y\cdot i^2}{i^2} = \frac{x\cdot i + y\cdot(-1)}{(-1)} = y - x\cdot i \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{z}{i}\right) = y,$$
$$z\cdot i = (x+y\cdot i)\cdot i = x\cdot i + y\cdot i^2 = x\cdot i + y\cdot(-1) = -y + x\cdot i \Rightarrow \mathrm{Im}(z\cdot i) = x.$$

Zbog toga je

$$\left(\mathrm{Re}\left(\frac{z}{i}\right) + \mathrm{Im}(z\cdot i) \geq 1\right) \Leftrightarrow (y + x \geq 1),$$

pa je grafički prikaz skupa S_2 poluravnina iznad pravca $y = -x + 1$.

Ucrtamo dobivene skupove u Gaussovu ravninu, pa odredimo njihov presjek. Dobivamo sliku 8. (Traženi skup S je osjenčan.)

6. Koristimo svojstva: $(A^T)^T = (A^{-1})^{-1} = A$, $(\alpha\cdot A)^{-1} = \alpha^{-1}\cdot A^{-1}$. Ona vrijede za svaki $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ i svaku regularnu matricu A. Tako redom imamo:

$$\left(2\cdot X^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad /^T$$
$$\left(\left(2\cdot X^{-1}\right)^T\right)^T = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^T,$$
$$2\cdot X^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad /\cdot\frac{1}{2}$$
$$X^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad /^{-1}$$
$$\left(X^{-1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1},$$
$$X = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = 2\cdot\frac{1}{(-4)\cdot(-1)-3\cdot 2}\cdot\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = (-1)\cdot\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Koristimo identitet $A\cdot E_2 = E_2\cdot A = A,\ \forall A \in M_2(\mathbb{R})$, gdje je E_2 jedinična matrica reda 2. Iz zadane jednadžbe izrazimo nepoznatu matricu X:

$$A\cdot X = A - X \Leftrightarrow A\cdot X + X = A \Leftrightarrow A\cdot X + E_2\cdot X = A \Leftrightarrow \left(A+E_2\right)\cdot X = A \Leftrightarrow X = \left(A+E_2\right)^{-1}\cdot A.$$

Za zadanu matricu A izračunajmo $\left(A+E_2\right)^{-1}$. Odmah dobijemo:

$$A+E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \left(A-E_2\right)^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4 - 3\cdot 1}\cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je konačno:

$$X = \left(A+E_2\right)^{-1}\cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Označimo s E_2 jediničnu matrica reda 2. Tada imamo redom:

$$X\cdot A + 2\cdot X = B \Leftrightarrow X\cdot (A+2\cdot E_2) = B \Rightarrow X = B\cdot (A+2\cdot E_2)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 26 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}\cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 21 & 26 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}\cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 26 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 21 & 26 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}\cdot \frac{1}{3\cdot 6 - 3\cdot 2}\cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\cdot \begin{bmatrix} 21 & 26 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot \begin{bmatrix} 48 & 36 \\ 24 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Imamo redom:

$$C = A^{-1}\cdot (B-A) = \left(\frac{1}{1\cdot 1 - 0\cdot (-1)}\cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)\cdot \left(\begin{bmatrix} 2-1 & 1-(-1) \\ -1-0 & 0-1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= 1\cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot (-1) & 1\cdot 2 + 1\cdot (-1) \\ 0\cdot 1 + 1\cdot (-1) & 0\cdot 2 + 1\cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Označimo s φ traženi kut. Površina trokuta kojega zatvaraju vektori $\vec{c}$ i $\vec{d}$ jednaka je polovici duljine njihova vektorskoga umnoška. Zbog toga odredimo:

$$\vec{c}\times\vec{d} = \left(5\cdot\vec{a} - \vec{b}\right)\times\left(\vec{a} + 3\cdot\vec{b}\right) = 5\cdot\left(\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=\vec{0}}\right) \underbrace{-\vec{b}\times\vec{a}}_{=\vec{a}\times\vec{b}} + 15\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) - 3\cdot\left(\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=\vec{0}}\right) = 16\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),$$

$$P = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{c}\times\vec{d}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|16\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot 16\cdot \underbrace{\left|\vec{a}\right|}_{=1}\cdot\underbrace{\left|\vec{b}\right|}_{=1}\cdot\sin\varphi = 8\cdot\sin\varphi.$$

Prema zahtjevu zadatka, ta površina mora biti jednaka 4 kv. jed. Tako dobivamo trigonometrijsku jednadžbu:

$$8\cdot\sin\varphi=4\Leftrightarrow\sin\varphi=\frac{1}{2}.$$

Jedino rješenje te jednadžbe u intervalu $\left\langle 0,\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$ je $\varphi=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$. Dakle, $\varphi=\frac{\pi}{6}$ rad.

11. Zapišimo zadane vektore u koordinatnom zapisu: $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(-1,0,-1)$. Izračunajmo zasebno svaki od triju vektora koji razapinje tetraedar. Imamo redom:

$$\vec{c}:=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(2\cdot\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(1\cdot(-1)+1\cdot 0+1\cdot(-1)\right)\cdot\left((2,2,2)-(-1,0,-1)\right)=$$
$$=(-2)\cdot(2-(-1),2-0,2-(-1))=(-2)\cdot(3,2,3)=(-6,-4,-6),$$
$$\vec{d}:=\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\cdot\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left((1,1,1)+2\cdot(-1,0,-1)\right)=(-2)\cdot\left((1,1,1)+(-2,0,-2)\right)=$$
$$=(-2)\cdot(1-2,1+0,1-2)=(-2)\cdot(-1,1,-1)=(2,-2,2),$$
$$\vec{e}:=\left(3\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b}=3\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=3\cdot\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\-1&0&-1\end{vmatrix}=3\cdot\left(\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}\right)=$$
$$=3\cdot\left(\vec{i}\cdot(-1)-\vec{j}\cdot 0+\vec{k}\cdot 1\right)=3\cdot(-1,0,1)=(-3,0,3).$$

Zbog toga je traženi volumen tetraedra jednak:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|M\left(\vec{c},\vec{d},\vec{e}\right)\right|=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}-6&-4&-6\\2&-2&2\\-3&0&3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left|-3\cdot\begin{vmatrix}-4&-6\\-2&2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}-6&-4\\2&-2\end{vmatrix}\right|=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\left|-3\cdot(-20)+3\cdot 20\right|=\frac{1}{6}\cdot|120|=\frac{1}{6}\cdot 120=20\text{ kub. jed.}$$

12. Zapišimo zadane vektore u koordinatnom zapisu: $\vec{a}=(-1,0,1)$, $\vec{b}=(0,-1,1)$. Računamo:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&0&1\\0&-1&1\end{vmatrix}\overset{I.+III.\to III.}{=}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}+\vec{i}\\-1&0&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=-(-1)\cdot\begin{vmatrix}\vec{j}&\vec{k}+\vec{i}\\-1&1\end{vmatrix}=\left(\vec{j}\cdot 1-(-1)\cdot\left(\vec{k}+\vec{i}\right)\right)=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=(1,1,1),$$
$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\left((-1,0,1)\cdot(0,-1,1)\right)\cdot(-1,0,1)=(-1\cdot 0+0\cdot(-1)+1\cdot 1)\cdot(-1,0,1)=1\cdot(-1,0,1)=(-1,0,1),$$
$$\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=1\cdot(0,-1,1)=(0,-1,1).$$

Volumen prizme razapete izračunanim vektorima jednak je:

$$V=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{matrix}\right\| \overset{I.+III.\to III}{=} \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot\left|-(-1)\cdot\left|\begin{matrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{matrix}\right|\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|(1\cdot 1-(-1)\cdot 2)\right| =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot|3|=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}=1.5 \text{ kub. jed.}$$

13. Prema pretpostavci zadatka vrijedi $\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=1$, otkuda je $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=6.$ Koristeći osnovna svojstva vektorskoga i skalarnoga umnoška imamo redom:

$$V=\left|\left(\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\right|=\left|\left(\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{c}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\right|=$$

$$=\left|2\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\right|=2\cdot\left|\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}\right|=2\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=2\cdot 2\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=$$

$$=4\cdot 6=24 \text{ kub. jed.}$$

Napomena: U rješenju korištene jednakosti $\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ posljedica su svojstva da se parnim brojem zamjena redaka determinante ne mijenja njezina vrijednost . Neka je $D=\begin{bmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{bmatrix}$ determinanta pomoću koje se određuje mješoviti umnožak $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Zamjenom prvoga i trećega retka determinante D dobivamo $D_1=\begin{bmatrix}\vec{c}\\ \vec{b}\\ \vec{a}\end{bmatrix}$. Zamjenom drugoga i trećega retka determinante D_1 dobivamo $D_2=\begin{bmatrix}\vec{c}\\ \vec{a}\\ \vec{b}\end{bmatrix}$. D_2 je determinanta pomoću koje računamo mješoviti umnožak $\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$. Budući da smo napravili ukupno dvije zamjene redaka, zaključujemo da je $D=D_2$, odnosno $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$. Analogno se dokazuje jednakost $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$.

14. Prema pretpostavci zadatka vrijedi jednakost $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot c\right|=2.$ Tako redom imamo:

$$V=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{c}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}+\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=\vec{0}}-\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=\vec{0}}-\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{=\vec{a}\times\vec{b}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{c}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(2\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{c}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\underbrace{\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)}_{=2}\right|=\frac{1}{2}\cdot|2|=1 \text{ kub. jed.}$$

15. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $B=(0,0,b)$, za neki $b\in\mathbb{R}$. Tada redom imamo:

$$\overrightarrow{OA}=(1,0,1),\quad \overrightarrow{OB}=(0,0,b),$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & b\end{vmatrix}=b\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j}\\ 1 & 0\end{vmatrix}=b\cdot\left(-\vec{j}\right)=-b\cdot\vec{j}=(0,-b,0),$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{(-b)^2}=\sqrt{b^2}=|b|.$$

Površina trokuta kojega razapinju navedeni radijvektori jednaka je polovici duljine njihova vektorskoga umnoška. Prema uvjetu zadatka, ta je površina jednaka 0.5, pa dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{2}\cdot|b|=0.5.$$

Odatle je $|b|=1\Leftrightarrow\left((b=-1)\vee(b=1)\right)$. Zbog toga su rješenja zadatka točke $B_1=(0,0,-1)$ i $B_2=(0,0,1)$.

16. Podijelimo zadane polinome prema pravilu za dijeljenje polinoma. Pritom uočimo da je $p_2(w)=(w-3)^2=w^2-6\cdot w+9$. Imamo redom:

$$\begin{array}{l}
\left(w^4-7\cdot w^3+13\cdot w^2+3\cdot w-18\right):\left(w^2-6\cdot w+9\right)=w^2-w-2\\
\underline{-\left(w^4-6\cdot w^3+9\cdot w^2\right)}\\
-w^3+4\cdot w^2+3\cdot w-18\\
\underline{-\left(-w^3+6\cdot w^2-9\cdot w\right)}\\
-2\cdot w^2+12\cdot w-18\\
\underline{-\left(-2\cdot w^2+12\cdot w-18\right)}\\
0
\end{array}$$

Tako smo dobili da polinom p_1 pri dijeljenju polinomom p_2 daje količnik $q(w)=w^2-w-2$ i ostatak 0. Budući da je ostatak pri dijeljenju jednak 0, zaključujemo da je polinom p_1 djeljiv polinomom p_2.

Iz provedenoga dijeljenja izravno slijedi jednakost $p_1=p_2\cdot q$, odnosno jednakost

$$w^4-7\cdot w^3+13\cdot w^2+3\cdot w-18=\left(w-3\right)^2\cdot\left(w^2-w-2\right).$$

Nultočke polinoma p_1 su sva realna rješenja jednadžbe $p_1(w)=0$. Zbog jednakosti $p_1 = p_2 \cdot q$, ta je jednadžba ekvivalentna jednadžbi:

$$(w-3)^2 \cdot \left(w^2 - w - 2\right) = 0.$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Zbog toga imamo:

$$\left((w-3)^2 \cdot \left(w^2 - w - 2\right) = 0\right) \Leftrightarrow \left((w-3=0) \vee \left(w^2 - w - 2 = 0\right)\right) \Leftrightarrow \left((w=3) \vee (w=-1) \vee (w=2)\right).$$

Dakle, traženi skup je $N\left(p_1\right) = \{-1, 2, 3\}$.

17. Grupirajmo zasebno prvi i drugi, te treći i četvrti član. Dobivamo:

$$p_2(t) = t^2 \cdot (t+1) - 4 \cdot (t+1) = (t+1) \cdot (t^2 - 4) = (t+1) \cdot (t-2) \cdot (t+2).$$

Odatle lagano očitamo da su tražene nultočke –1, 2 i –2. Dakle, skup svih nultočaka zadanoga polinoma je $N(p_2) = \{-2, -1, 2\}$.

Preostaje skicirati graf zadanoga polinoma. On prolazi točkama (–2, 0), (–1, 0) i (2, 0), a siječe os ordinata u točki (0, –4). Odredimo predznak polinoma na intervalima $\langle -\infty, -2 \rangle$, $\langle -2, -1 \rangle$, $\langle -1, 2 \rangle$ i $\langle 2, +\infty \rangle$. U tu je svrhu najjednostavnije izračunati predznak vrijednosti polinoma p_2 za proizvoljan element svakoga intervala. Odaberemo npr. $S = \{-3, -1.5, 0, 3\}$, pa odredimo predznak $p_2(t)$ za svaki $t \in S$. Dobivamo sljedeću tablicu.

Interval	$\langle -\infty, -2 \rangle$	$\langle -2, -1 \rangle$	$\langle -1, 2 \rangle$	$\langle 2, +\infty \rangle$
Predznak polinoma p_2	–	+	–	+

Ucrtamo sjecišta s osi apscisa, odnosno sjecište s osi ordinata u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa kroz dobivene točke povučemo krivulju uzimajući u obzir gore određene predznake. Dobivamo sliku 9.

18. Uočimo da vrijedi identitet:

$$(x-1)^2 = x^2 - 2 \cdot x + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zbog toga je:

$$\left(-x^3+64\cdot x\right):\left(x^2-2\cdot x+1\right)=-x-2$$
$$\underline{-(-x^3+2\cdot x^2-x)}$$
$$-2\cdot x^2+65\cdot x$$
$$\underline{-(-2\cdot x^2+4\cdot x-2)}$$
$$61\cdot x+2$$

Odatle slijedi:

$$q(x)=-x-2,\quad r(x)=61\cdot x+2,$$

pa je konačno:

$$(q+r)(x)=q(x)+r(x)=-x-2+61\cdot x+2=60\cdot x.$$

19.a) Racionalna funkcija je definirana za one vrijednosti nezavisne varijable za koje je vrijednost nazivnika te funkcije različita od nule. Skup svih tih vrijednosti – a to je upravo tražena prirodna domena - najbrže i najlakše dobijemo tako da iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ „izbacimo“ sve nultočke nazivnika zadane funkcije.

Iz jednadžbe $9-\alpha^2=0$ slijedi $\alpha_1=-3,\ \alpha_2=3$. Zbog toga je traženi skup $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

b) Nultočke zadane funkcije su nultočke njezina brojnika. Imamo redom:

$$\alpha^4-3\cdot\alpha^3+2\cdot\alpha^2=0\Leftrightarrow\alpha^2\cdot\left(\alpha^2-3\cdot\alpha+2\right)=0\Leftrightarrow\left(\alpha^2=0\right)\vee\left(\alpha^2-3\cdot\alpha+2=0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\alpha=0)\vee(\alpha=1)\vee(\alpha=2).$$

Dakle, traženi skup je $N(f)=\{0,1,2\}$.

c) Podijelimo brojnik zadane racionalne funkcije njezinim nazivnikom. Dobivamo:

$$\left(\alpha^4-3\cdot\alpha^3+2\cdot\alpha^2\right):\left(-\alpha^2+9\right)=-\alpha^2+3\cdot\alpha-11$$
$$\underline{-\left(\alpha^4-9\cdot\alpha^2\right)}$$
$$-3\cdot\alpha^3+11\cdot\alpha^2$$
$$\underline{-\left(-3\cdot\alpha^3+27\cdot\alpha\right)}$$
$$11\cdot\alpha^2-27\cdot\alpha$$
$$\underline{-\left(-11\cdot\alpha^2-99\right)}$$
$$-27\cdot\alpha+99$$

Dakle, dijeljenjem brojnika zadane racionalne funkcije njezinim nazivnikom dobiva se količnik $q(\alpha)=-\alpha^2+3\cdot\alpha-11$ i ostatak $r(\alpha)=-27\cdot\alpha+99$. Prema teoremu o dijeljenju polinoma s ostatkom odatle slijedi:

$$\alpha^4-3\cdot\alpha^3+2\cdot\alpha^2=\left(9-\alpha^2\right)\cdot\left(-\alpha^2+3\cdot\alpha-11\right)+\left(-27\cdot\alpha+99\right).$$

Podijelimo obje strane ove jednakosti s $9-\alpha^2$. Dobijemo:

$$\frac{\alpha^4-3\cdot\alpha^3+2\cdot\alpha^2}{9-\alpha^2}=-\alpha^2+3\cdot\alpha-11+\frac{-27\cdot\alpha+99}{9-\alpha^2},$$

odnosno

$$f(\alpha)=-\alpha^2+3\cdot\alpha-11+\frac{-27\cdot\alpha+99}{9-\alpha^2}.$$

Dobiveni prikaz je upravo traženi prikaz.

d) Iz rješenja **d)** podzadatka lako zaključujemo da za po apsolutnoj vrijednosti velike vrijednosti varijable α vrijedi aproksimacija $f(\alpha)\sim(-\alpha^2)<0$.

Graf zadane funkcije skiciramo analogno grafu polinoma u 9. zadatku. On prolazi točkama (0, 0), (1, 0) i (2, 0), a ne smije sjeći pravce $\alpha=-3$ i $\alpha=3$. Odredimo predznak funkcije na intervalima $\langle-\infty,-3\rangle$, $\langle-3,0\rangle$, $\langle 0,1\rangle$, $\langle 1,2\rangle$, $\langle 2,3\rangle$ i $\langle 3,+\infty\rangle$. U tu je svrhu najjednostavnije izračunati predznak vrijednosti polinoma p_2 za neki element svakoga intervala. Odaberemo npr. $S=\{-4,-1,\ 0.5,\ 1.5,\ 2.5,\ 4\}$, pa odredimo predznak $f(\alpha)$ za svaki $\alpha\in S$. Dobivamo sljedeću tablicu:

Interval	$\langle-\infty,-3\rangle$	$\langle-3,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 2,3\rangle$	$\langle 3,+\infty\rangle$
Predznak funkcije f	–	+	+	–	+	–

Ucrtamo sjecišta s osi apscisa i polove u pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Nacrtamo pravce $\alpha=-3$ i $\alpha=3$. Kroz ostale točke povučemo grane krivulje uzimajući u obzir gore određene predznake i pazeći da te grane ne sijeku povučene pravce. Dobivamo sliku 10.

20.a) Rastavimo najprije nazivnik zadane funkcije na faktore:

$$x^3-x^2+x-1=x^2\cdot(x-1)+(x-1)=(x-1)\cdot\left(x^2+1\right).$$

Zbog toga traženi rastav ima oblik:

$$\frac{3\cdot x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B\cdot x+C}{x^2+1}.$$

Odatle slijedi:

$$3\cdot x^2+x-2=A\cdot\left(x^2+1\right)+(B\cdot x+C)\cdot(x-1).$$

Uvrštavanjem $x\in\{-1,0,1\}$ dobijemo $(A,B,C)=(1,2,3)$. Dakle, traženi rastav glasi:

$$\frac{3\cdot x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{2\cdot x+3}{x^2+1}.$$

b) Rastavimo nazivnik zadane funkcije na faktore:

$$x^3-x=x\cdot\left(x^2-1\right)=x\cdot(x-1)\cdot(x+1).$$

Zbog toga traženi rastav ima oblik:

$$\frac{x^2-2\cdot x-1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Pomnožimo ovu jednakost sa x^3-x. Dobijemo:

$$x^2-2\cdot x-1=A\cdot(x-1)\cdot(x+1)+B\cdot x\cdot(x+1)+C\cdot x\cdot(x-1).$$

Uvrštavanjem $x\in\{-1,0,1\}$ dobijemo $(A,B,C)=(1,-1,1)$. Dakle, traženi rastav glasi:

$$f(x)=\frac{1}{x}++\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}.$$

21. Zadanu funkciju najprije zapišemo u obliku:

$$u(t)=2\cdot\sin\left(\frac{1}{4}\cdot t-\frac{\pi}{4}\right).$$

Očitamo $A=2,\ \omega=\frac{1}{4},\ \varphi=-\frac{\pi}{4}$, pa izračunamo temeljni period zadane funkcije:

$$T=\frac{2\cdot\pi}{\omega}=\frac{2\cdot\pi}{\frac{1}{4}}=8\cdot\pi\,.$$

Dakle, karakteristične točke osnovnoga segmenta su redom:

$$T_0=\left(-\frac{\varphi}{\omega},0\right)=\left(-\frac{-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{4}},0\right)=(\pi,0),$$

$$T_1=\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{4},A\right)=\left(\pi+\frac{8\cdot\pi}{4},2\right)=(\pi+2\cdot\pi,2)=(3\cdot\pi,2),$$

$$T_2=\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{2},0\right)=\left(\pi+\frac{8\cdot\pi}{2},0\right)=(\pi+4\cdot\pi,0)=(5\cdot\pi,0),$$

$$T_3=\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{3}{4}\cdot T,-A\right)=\left(\pi+\frac{3}{4}\cdot 8\cdot\pi,-2\right)=(\pi+6\cdot\pi,-2)=(7\cdot\pi,-2),$$

$$T_4=\left(-\frac{\varphi}{\omega}+T,0\right)=(\pi+8\cdot\pi,2)=(9\cdot\pi,0).$$

Ucrtamo dobivene točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa ih spojimo sinusoidom. Dobivamo sliku 11.

22. Iz slike 12. se vidi da su $A=2$ i $\varphi=0$ (jer graf prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini). Nadalje, polovica temeljnoga perioda funkcije h jednaka je udaljenosti između bilo kojih dviju njezinih uzastopnih nultočaka. Iz slike se vidi da je ta udaljenost jednaka 3. Tako iz jednadžbe

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\pi}{\omega}=3$$

slijedi $\omega=\frac{\pi}{3}$. Dakle, $h(t)=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot t\right)$.

23. Iz slike 13. se vidi da je $A=1$. Analogno kao u rješenju zadatka 12. zaključujemo da je polovica temeljnoga perioda funkcije g jednaka 6, pa iz jednadžbe

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\pi}{\omega}=6$$

slijedi $\omega=\frac{\pi}{6}$.

Preostaje odrediti fazni pomak φ. Iz dobivenih rezultata zaključujemo da je $g(t)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t+\varphi\right)$. Iz slike zaključujemo da graf funkcije g prolazi točkom $(2,0)$, pa uvrštavanjem $t=2$ i $g(2)=0$ u pravilo funkcije g dobivamo:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0,$$
$$\frac{\pi}{3}+\varphi=k\cdot\pi,$$
$$\varphi=\frac{3\cdot k-1}{3}\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti relacija $\varphi\in\left\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$, pa dalje slijedi:

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{3\cdot k-1}{3}\cdot\pi<\frac{\pi}{2},\quad /\cdot\frac{6}{\pi}$$
$$-3<6\cdot k-2<3,$$
$$-3+2<6\cdot k<3+2,$$
$$-\frac{1}{6}<k<\frac{5}{6}.$$

Jedini cijeli broj koji zadovoljava ovu nejednakost je $k=0$. Dakle, $\varphi=\frac{3\cdot 0-1}{3}\cdot\pi=-\frac{\pi}{3}$, pa je konačno $g(t)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t-\frac{\pi}{3}\right)$.

6. GRUPA ZADATAKA

1. a) Primijetimo da vrijedi jednakost:

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{za neparne } n; \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

(Pritom je prilog *inače* ekvivalentan izrazu „za sve parne $n \in \mathbb{N}$“.) Zbog toga je:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4039-1}{2} = 2019, & \text{za neparne } n; \\ \dfrac{4039+1}{2} = 2020, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odatle zaključujemo da:

- podniz $(a_{2\cdot n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ kojega tvore svi članovi zadanoga niza s neparnim indeksima ima graničnu vrijednost 2019;
- podniz $(a_{2\cdot n})_{n\in\mathbb{N}}$ kojega tvore svi članovi zadanoga niza s parnim indeksima ima graničnu vrijednost 2020.

Prema tome, zadani niz ima točno dva gomilišta: 2019 i 2020, pa je $S = \{2019, 2020\}$.

b) Primijetimo da vrijedi jednakost:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) = \begin{cases} 0, & \text{za neparne } n; \\ 1, & \text{ako je } n \text{ djeljiv s 4;} \\ -1, & \text{inače.} \end{cases}$$

(Pritom je prilog *inače* ekvivalentan izrazu „za sve parne prirodne brojeve koji nisu djeljivi s 4.“) Zbog toga je:

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & \text{za neparne } n; \\ \dfrac{n}{n+1}+1, & \text{ako je } n \text{ djeljiv s 4;} \\ \dfrac{n}{n+1}-1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredimo graničnu vrijednost niza $d_n = \dfrac{n}{n+1}$. Imamo redom:

$$L=\lim_{n}\frac{n}{n+1}=\lim_{n}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Odatle zaključujemo da:

- podniz $(b_{2\cdot n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ kojega tvore svi članovi zadanoga niza s neparnim indeksima ima graničnu vrijednost 1;
- podniz $(b_{4\cdot n})_{n\in\mathbb{N}}$ kojega tvore svi članovi zadanoga niza čiji su indeksi djeljivi s 4 ima graničnu vrijednost $1+1=2$;
- podniz $(b_{4\cdot n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ kojega tvore svi članovi zadanoga niza čiji su indeksi parni brojevi koji nisu djeljivi s 4 ima graničnu vrijednost $1-1=0$.

Prema tome, zadani niz ima točno tri gomilišta: 0, 1 i 2, pa je $S=\{0,1,2\}$.

c) Primijetimo da vrijedi jednakost:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)=\begin{cases}0, & \text{za parne } n;\\ 1, & \text{ako } \exists k\in\mathbb{N} \text{ takav da je } n=4\cdot k+1,\\ -1, & \text{inače.}\end{cases}$$

(Pritom je prilog *inače* ekvivalentan izrazu „za sve neparne prirodne brojeve koji pri dijeljenju s 4 daju ostatak 3.“) Zbog toga je:

$$c_n=\begin{cases}\dfrac{2\cdot n^2-1}{(n+1)^2}, & \text{za parne } n;\\ \dfrac{2\cdot n^2-1}{(n+1)^2}+1, & \text{ako } \exists k\in\mathbb{N} \text{ takav da je } n=4\cdot k+1;\\ \dfrac{2\cdot n^2-1}{(n+1)^2}-1, & \text{inače.}\end{cases}$$

Odredimo graničnu vrijednost niza $d_n=\dfrac{2\cdot n^2-1}{(n+1)^2}$. Imamo redom:

$$L=\lim_{n}\frac{2\cdot n^2-1}{(n+1)^2}=\lim_{n}\frac{2\cdot n^2-1}{n^2+2\cdot n+1}=\lim_{n}\frac{\frac{2\cdot n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2\cdot n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n}\frac{2-\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1+2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{2-1}{1+2\cdot 0+0}=2.$$

Odatle zaključujemo da:

- podniz $(b_{2\cdot n})_{n\in\mathbb{N}}$ kojega tvore svi članovi zadanoga niza s parnim indeksima ima graničnu vrijednost 2;
- podniz $(b_{4\cdot n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ kojega tvore svi članovi zadanoga niza čiji indeksi pri dijeljenju s 4 daju ostatak 1 ima graničnu vrijednost $2+1=3$;
- podniz $(b_{4\cdot n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ kojega tvore svi članovi zadanoga niza čiji indeksi pri dijeljenju s 4 daju ostatak 3 ima graničnu vrijednost $2-1=1$.

Prema tome, zadani niz ima točno tri gomilišta: 0, 1 i 2, pa je $S=\{1,2,3\}$.

2. **a)** Podijelimo sa n svaki član brojnika, odnosno nazivnika pravila kojim je zadan niz Dobivamo:

$$L=\lim_n\left(\frac{\frac{2\cdot n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right)=\lim_n\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=\frac{2+0}{1+0}=2.$$

b) Imamo redom:

$$|a_k-L|<10^{-5}\Leftrightarrow\left|\frac{2\cdot k+3}{k+1}-2\right|<10^{-5}\Leftrightarrow\left|\frac{2\cdot k+3-2\cdot(k+1)}{k+1}\right|<10^{-5}\Leftrightarrow\left|\frac{1}{k+1}\right|<10^{-5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{|1|}{|k+1|}<10^{-5}\Rightarrow\frac{1}{k+1}<10^{-5}\Leftrightarrow k+1>\frac{1}{10^{-5}}\Leftrightarrow k>99\ 999.$$

(Primijenili smo jednakost $|k+1|=k+1,\ \forall k\in\mathbb{N}$. Ona vrijedi jer je izraz pod znakom apsolutne vrijednosti strogo pozitivan kad god je $k\in\mathbb{N}$.) Najmanji prirodan broj koji zadovoljava dobivenu nejednakost je $k_{\min}=100\ 000$. To znači da se prvih 99 999 članova zadanoga niza nalazi *izvan* intervala $\left\langle 2-10^{-5},2+10^{-5}\right\rangle$, a da se svi članovi niza počevši od 100 00. nalaze *unutar* toga intervala.

3. **a)** Podijelimo sa n svaki član brojnika, odnosno nazivnika pravila kojim je zadan niz Dobivamo:

$$L=\lim_n\left(\frac{\frac{4\cdot n}{n}+\frac{5}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}\right)=\lim_n\left(\frac{4+\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)=\frac{4+0}{1+0}=4.$$

b) Imamo redom:

$$|a_k - L| < 10^{-5} \Leftrightarrow \left|\frac{4\cdot k+5}{k+2} - 4\right| < 10^{-5} \Leftrightarrow \left|\frac{4\cdot k+5-4\cdot(k+2)}{k+2}\right| < 10^{-5} \Leftrightarrow \left|\frac{-3}{k+2}\right| < 10^{-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|-3|}{|k+2|} < 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{3}{k+2} < 10^{-5} \Leftrightarrow k+2 > \frac{3}{10^{-5}} \Leftrightarrow k > 299\ 998.$$

(Primijenili smo jednakost $|k+2| = k+2,\ \forall k \in \mathbb{N}$. Ona vrijedi jer je izraz pod znakom apsolutne vrijednosti strogo pozitivan kad god je $k \in \mathbb{N}$.) Najmanji prirodan broj koji zadovoljava dobivenu nejednakost je $k_{\min} = 299\ 999$. To znači da se prvih 299 998 članova zadanoga niza nalazi *izvan* intervala $\left\langle 4-10^{-5}, 4+10^{-5}\right\rangle$, a da se svi članovi niza počevši od 299 999. nalaze *unutar* toga intervala.

4. a) Podijelimo sa n svaki član brojnika, odnosno nazivnika pravila kojim je zadan opći član niza. Dobivamo:

$$L = \lim_n \left(\frac{\frac{1}{n} - \frac{4\cdot n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}}\right) = \lim_n \left(\frac{-4+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right) = \frac{-4+0}{1+0} = -4.$$

b) Imamo redom:

$$|b_k - L| < 10^{-5} \Leftrightarrow \left|\frac{1-4\cdot k}{k+2} - (-4)\right| < 10^{-5} \Leftrightarrow \left|\frac{1-4\cdot k}{k+2} + 4\right| < 10^{-5} \Leftrightarrow \left|\frac{1-4\cdot k+4\cdot(k+2)}{k+2}\right| < 10^{-5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{9}{k+2}\right| < 10^{-5} \Rightarrow \frac{|9|}{|k+2|} < 10^{-5} \Rightarrow \frac{9}{k+2} < 10^{-5} \Leftrightarrow k+2 > \frac{9}{10^{-5}} \Leftrightarrow k > 899\ 998.$$

(Primijenili smo jednakost $|k+2| = k+2,\ \forall k \in \mathbb{N}$. Ona vrijedi jer je izraz pod znakom apsolutne vrijednosti strogo pozitivan kad god je $k \in \mathbb{N}$.) Najmanji prirodan broj koji zadovoljava dobivenu nejednakost je $k_{\min} = 899\ 999$. To znači da se prvih 899 998 članova zadanoga niza nalazi *izvan* intervala $\left\langle -4-10^{-5}, -4+10^{-5}\right\rangle$, a da se svi članovi niza počevši od 899 999. nalaze *unutar* toga intervala.

5. a) Analogno kao u rješenju prethodnih zadataka dobivamo:

$$L = \lim_n \left(\frac{\frac{7}{n} - \frac{8\cdot n}{n}}{\frac{4\cdot n}{n} + \frac{3}{n}}\right) = \lim_n \left(\frac{-8+\frac{7}{n}}{4+\frac{3}{n}}\right) = \frac{-8+0}{4+0} = -2.$$

b) Imamo redom:

$$|b_k - L| < 10^{-7} \Leftrightarrow \left|\frac{7-8\cdot k}{4\cdot k+3}+2\right| < 10^{-7} \Leftrightarrow \left|\frac{7-8\cdot k+2\cdot(4\cdot k+3)}{4\cdot k+3}\right| < 10^{-7} \Leftrightarrow \left|\frac{13}{4\cdot k+3}\right| < 10^{-7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|13|}{|4\cdot k+3|} < 10^{-7} \Rightarrow \frac{13}{4\cdot k+3} < 10^{-7} \Leftrightarrow 4\cdot k+3 > \frac{13}{10^{-7}} \Leftrightarrow k > 32\ 499\ 999.25.$$

(Primijenili smo jednakost $|4\cdot k+3| = 4\cdot k+3,\ \forall k \in \mathbb{N}$. Ona vrijedi jer je izraz pod znakom apsolutne vrijednosti strogo pozitivan kad god je $k \in \mathbb{N}$.) Najmanji prirodan broj koji zadovoljava dobivenu nejednakost je $k_{\min} = 32\ 500\ 000$. To znači da se prvih 32 499 999 članova zadanoga niza nalazi *izvan* intervala $\left\langle -2-10^{-7}, -2+10^{-7} \right\rangle$, a da se svi članovi niza počevši od 32 500 000. nalaze *unutar* toga intervala.

6. a) Svedimo zadanu graničnu vrijednost na oblik $\left(\lim\limits_n \left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right)^k$. Kad to učinimo, primijenit ćemo jednakost

$$\lim_n \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Imamo redom:

$$L = \lim_n \left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-n}\right) = \lim_n \left(\left(\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n\right)^{-1}\right) = \left(\lim_n \left(\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n\right)\right)^{-1} = \left(e^{-2}\right)^{-1} = e^{(-2)\cdot(-1)} = e^2.$$

b) Postupimo analogno kao u prethodnom podzadatku. Dobivamo:

$$L = \lim_n \left(\left(\left(1-\frac{\frac{3}{2}}{n}\right)^n\right)^{-4}\right) = \lim_n \left(\left(\left(1+\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{n}\right)^n\right)^{-4}\right) = \left(\lim_n \left(\left(1+\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{n}\right)^n\right)\right)^{-4} = \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^{-4} = e^{\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-4)} = e^6.$$

c) Imamo redom:

$$L = \lim_n \left(\left(2019^{2019^{2019}} + \underbrace{\frac{2}{5\cdot n}}_{\to 0}\right)^{-n}\right) = \lim_n \left(\left(2019^{2019^{2019}}\right)^{-n}\right) = \lim_n \left((2019)^{\left(-2019^{2019}\right)\cdot n}\right) = \left\{2019^{-\infty}\right\} = 0.$$

d) Zamijenimo $t := 2\cdot n+1$. Tada su $2\cdot n+3 = t+2$ i $2\cdot n = t-1$. Kad $n\to+\infty$, onda i $t\to+\infty$. Tako dobivamo:

$$L=\frac{1}{e^2}\cdot\lim_t\left(\left(\frac{t+2}{t}\right)^{t-1}\right)=\frac{1}{e^2}\cdot\lim_t\left(\left(\frac{t+2}{t}\right)^{t}\cdot\left(\frac{t+2}{t}\right)^{-1}\right)=\frac{1}{e^2}\cdot\lim_t\left(\left(1+\frac{2}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{2}{t}\right)^{-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{e^2}\cdot\left(\lim_t\left(\left(1+\frac{2}{t}\right)^{t}\right)\right)\cdot\left(\lim_t\left(\left(1+\frac{2}{t}\right)^{-1}\right)\right)=\frac{1}{e^2}\cdot e^2\cdot 1^{-1}=1\cdot 1=1.$$

e) Zamijenimo $t := 12\cdot n-11$. Tada su $12\cdot n+13 = t+24$ i $2\cdot n=\frac{t+11}{6}$. Kad $n\to+\infty$, onda i $t\to+\infty$. Tako dobivamo:

$$L=\frac{1}{e^4}\cdot\lim_t\left(\left(\frac{t+24}{t}\right)^{\frac{t+11}{6}}\right)=\frac{1}{e^4}\cdot\lim_t\left(\left(\left(1+\frac{24}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{t+11}{6\cdot t}}\right)=\frac{1}{e^4}\cdot\left(\lim_t\left(\left(1+\frac{24}{t}\right)^{t}\right)\right)^{\lim_t\left(\frac{t+11}{6\cdot t}\right)}=$$

$$=e^{-4}\cdot\left(e^{24}\right)^{\frac{1}{6}}=e^{-4+24\cdot\frac{1}{6}}=e^0=1.$$

f) Primijenit ćemo jednakost $\lim_n\left(a^n\right)=0,\ \forall a\in\langle 0,1\rangle$. Imamo redom:

$$L=\left(\lim_n\left(\frac{2\cdot n+1}{3\cdot n+2}\right)\right)^{\lim_n(2019\cdot n)}=\left(\lim_n\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{3}}\right)\right)^{\lim_n(2019\cdot n)}=\left(\frac{2+0}{3+0}\right)^{\lim_n(2019\cdot n)}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}\right\}=0.$$

g) Zapišimo pravilo zadanoga niza u obliku:

$$c_n=\frac{7^{2\cdot n+1}+1}{50-49^n}=\frac{7^{2\cdot n}\cdot 7+1}{50-49^n}=\frac{\left(7^2\right)^n\cdot 7+1}{50-49^n}=\frac{7\cdot 49^n+1}{50-49^n}$$

Ponovno ćemo primijeniti jednakost korištenu u rješenju prethodnoga podzadatka. Dijeljenjem svakoga člana brojnika i svakoga člana nazivnika sa 49^n dobivamo:

$$L=\lim_n\left(\frac{7+\frac{1}{49^n}}{\frac{50}{49^n}-1}\right)=\lim_n\left(\frac{7+\left(\frac{1}{49}\right)^n}{50\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^n-1}\right)=\frac{7+0}{50\cdot 0-1}=-7.$$

h) Analogno kao u prethodnom podzadatku dobivamo redom:

$$c_n=\frac{2^{2\cdot(3\cdot n+5)}-1}{8^{2\cdot n+3}+1}=\frac{2^{6\cdot n+10}-1}{\left(2^3\right)^{2\cdot n+3}+1}=\frac{2^{6\cdot n+10}-1}{2^{6\cdot n+9}+1}=\frac{2\cdot 2^{6\cdot n+9}-1}{2^{6\cdot n+9}+1}\Rightarrow$$

$$L=\lim_n\left(\frac{2\cdot 2^{6\cdot n+9}-1}{2^{6\cdot n+9}+1}\right)=\lim_n\left(\frac{2-\frac{1}{2^{6\cdot n+9}}}{1+\frac{1}{2^{6\cdot n+9}}}\right)=\lim_n\left(\frac{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{6\cdot n+9}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{6\cdot n+9}}\right)=\frac{2-0}{1+0}=2.$$

U pretposljednjem koraku graničnu vrijednost izračunali smo koristeći

$$\lim_n\left(\frac{1}{2}\right)^{6\cdot n+9}=\left\{\begin{matrix}\text{zamjena: } t:=6\cdot n+9\\ \text{kad } n\to\infty,\ \text{onda } t\to\infty\end{matrix}\right\}=\lim_t\left(\frac{1}{2}\right)^t=0.$$

i) Pravilo koje zadaje niz transformirajmo ovako:

$$c_n=\frac{13^{n+3}+11^{n+3}}{13^{n+1}+11^{n+1}}=\frac{13^n\cdot 13^3+11^n\cdot 11^3}{13^n\cdot 13+11^n\cdot 11}.$$

Dijeljenjem svakoga člana brojnika, odnosno nazivnika, sa 13^n dobivamo:

$$L=\lim_n\left(\frac{13^3+11^3\cdot\frac{11^n}{13^n}}{13+11\cdot\frac{11^n}{13^n}}\right)=\lim_n\left(\frac{13^3+11^3\cdot\left(\frac{11}{13}\right)^n}{13+11\cdot\left(\frac{11}{13}\right)^n}\right)=\frac{13^3+11^3\cdot 0}{13+11\cdot 0}=\frac{13^3}{13}=13^2=169.$$

7. U svim četirima podzadacima pravilo kojim je zadan niz trebamo transformirati tako da možemo primijeniti jednakost $\lim_n\left(a^n\right)=0,\forall a\in\langle 0,1\rangle$. Pritom koristimo formulu za razliku kvadrata.

a) Imamo redom:

$$L=\lim_n\left(\sqrt{4\cdot n^2+4\cdot n+5}-2\cdot n\right)=\lim_n\left(\left(\sqrt{4\cdot n^2+4\cdot n+5}-2\cdot n\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{4\cdot n^2+4\cdot n+5}+2\cdot n\right)}{\left(\sqrt{4\cdot n^2+4\cdot n+5}+2\cdot n\right)}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{\left(\sqrt{4\cdot n^2+4\cdot n+5}\right)^2-(2\cdot n)^2}{\sqrt{4\cdot n^2+4\cdot n+5}+2\cdot n}\right)=\lim_n\left(\frac{4\cdot n^2+4\cdot n+5-4\cdot n^2}{\sqrt{4\cdot n^2+4\cdot n+7}+2\cdot n}\right)=\lim_n\left(\frac{4\cdot n+5}{\sqrt{4\cdot n^2+4\cdot n+5}+2\cdot n}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{\frac{4\cdot n+5}{n}}{\frac{\sqrt{4\cdot n^2+4\cdot n+5}+2\cdot n}{n}}\right)=\lim_n\left(\frac{4+\frac{5}{n}}{\sqrt{\frac{4\cdot n^2+4\cdot n+5}{n^2}}+2}\right)=\lim_n\left(\frac{4+\frac{5}{n}}{\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+2}\right)=\frac{4+0}{\sqrt{4+0+0}+2}=1.$$

b) U ovom slučaju imamo redom:

$$L=\lim_n\left(\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}-5\cdot n\right)=\lim_n\left(\left(\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}-5\cdot n\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}+5\cdot n\right)}{\left(\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}+5\cdot n\right)}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{\left(\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}\right)^2-(5\cdot n)^2}{\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}+5\cdot n}\right)=\lim_n\left(\frac{25\cdot n^2+20\cdot n+21-25\cdot n^2}{\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}+5\cdot n}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{\left(\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}\right)^2-(5\cdot n)^2}{\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}+5\cdot n}\right)=\lim_n\left(\frac{25\cdot n^2+20\cdot n+21-25\cdot n^2}{\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}+5\cdot n}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{20\cdot n+21}{\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}+5\cdot n}\right)=\lim_n\left(\frac{\frac{20\cdot n+21}{n}}{\frac{\sqrt{25\cdot n^2+20\cdot n+21}+5\cdot n}{n}}\right)=\lim_n\left(\frac{20+\frac{21}{n}}{\sqrt{\frac{25\cdot n^2+20\cdot n+21}{n^2}}+5}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{20+\frac{21}{n}}{\sqrt{25+\frac{20}{n}+\frac{21}{n^2}}+5}\right)=\frac{20+0}{\sqrt{25+0+0}+5}=\frac{20}{5+5}=2.$$

c) U ovom slučaju dobivamo:

$$L=\lim_n\left(7\cdot n-\sqrt{49\cdot n^2-56\cdot n+57}\right)=\lim_n\left(\left(7\cdot n-\sqrt{49\cdot n^2-56\cdot n+57}\right)\cdot\frac{\left(7\cdot n+\sqrt{49\cdot n^2-56\cdot n+57}\right)}{\left(7\cdot n+\sqrt{49\cdot n^2-56\cdot n+57}\right)}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{(7\cdot n)^2-\left(\sqrt{49\cdot n^2-56\cdot n+57}\right)^2}{7\cdot n+\sqrt{49\cdot n^2-56\cdot n+57}}\right)=\lim_n\left(\frac{49\cdot n^2-\left(49\cdot n^2-56\cdot n+57\right)}{7\cdot n+\sqrt{49\cdot n^2-56\cdot n+57}}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{56\cdot n+57}{7\cdot n+\sqrt{49\cdot n^2-56\cdot n+57}}\right)=\lim_n\left(\frac{\frac{56\cdot n+57}{n}}{\frac{7\cdot n+\sqrt{49\cdot n^2-56\cdot n+57}}{n}}\right)=\lim_n\left(\frac{56+\frac{57}{n}}{7+\sqrt{\frac{49\cdot n^2-56\cdot n+57}{n^2}}}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{56+\frac{57}{n}}{7+\sqrt{49-\frac{56}{n}+\frac{57}{n^2}}}\right)=\frac{56+0}{7+\sqrt{49-0+0}}=\frac{56}{7+7}=4.$$

d) Analogno kao u prethodnom podzadatku dobivamo:

$$L=\lim_n\left(3\cdot n-\sqrt{9\cdot n^2-36\cdot n+37}\right)=\lim_n\left(\left(3\cdot n-\sqrt{9\cdot n^2-36\cdot n+37}\right)\cdot\frac{\left(3\cdot n+\sqrt{9\cdot n^2-36\cdot n+37}\right)}{\left(3\cdot n+\sqrt{9\cdot n^2-36\cdot n+37}\right)}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{(3\cdot n)^2-\left(\sqrt{9\cdot n^2-36\cdot n+37}\right)^2}{3\cdot n+\sqrt{9\cdot n^2-36\cdot n+37}}\right)=\lim_n\left(\frac{9\cdot n^2-\left(9\cdot n^2-36\cdot n+37\right)}{3\cdot n+\sqrt{9\cdot n^2-36\cdot n+37}}\right)=$$

$$=\lim_{n}\left(\frac{36\cdot n+37}{3\cdot n+\sqrt{9\cdot n^2-36\cdot n+37}}\right)=\lim_{n}\left(\frac{\frac{36\cdot n+37}{n}}{\frac{3\cdot n+\sqrt{9\cdot n^2-36\cdot n+37}}{n}}\right)=\lim_{n}\left(\frac{36+\frac{37}{n}}{3+\sqrt{\frac{9\cdot n^2-36\cdot n+37}{n^2}}}\right)=$$

$$=\lim_{n}\left(\frac{36+\frac{37}{n}}{3+\sqrt{9-\frac{36}{n}+\frac{37}{n^2}}}\right)=\frac{36+0}{3+\sqrt{9-0+0}}=\frac{36}{3+3}=6.$$

8. a) Postupimo analogno kao u prethodnom zadatku. Imamo redom:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(2\cdot x-\sqrt{4\cdot x^2-8\cdot x+19}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(2\cdot x-\sqrt{4\cdot x^2-8\cdot x+19}\right)\cdot\left(2\cdot x+\sqrt{4\cdot x^2-8\cdot x+19}\right)}{2\cdot x+\sqrt{4\cdot x^2-8\cdot x+19}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4\cdot x^2-\left(4\cdot x^2-8\cdot x+19\right)}{2\cdot x+\sqrt{4\cdot x^2-8\cdot x+19}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8\cdot x+19}{2\cdot x+\sqrt{4\cdot x^2-8\cdot x+19}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8+\frac{19}{x}}{2+\sqrt{4-8\cdot\frac{1}{x}+\frac{19}{x^2}}}=\frac{8+0}{2+\sqrt{4-0+0}}=2.$$

b) Analogno kao u prethodnom zadatku najprije dobivamo:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)\cdot\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-(x^2-x+1)}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{x}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}}\right).$$

Ovdje ne smijemo napisati $\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}}$. Naime, znamo da $x\to-\infty$, pa je x strogo negativan realan broj, a za takve brojeve ne vrijedi jednakost $x=\sqrt{x^2}$.

Da bismo mogli izračunati $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}$ moramo uvesti zamjenu $t=-x$. Odatle je $x=-t$. Očito, kad $x\to-\infty$, onda $t\to+\infty$. Tako sada imamo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{(-t)^2-(-t)+1}}{(-t)}=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right).$$

Sad $t\to+\infty$, pa je t strogo pozitivan realan broj. Za takve brojeve vrijedi jednakost $t=\sqrt{t^2}$. Zbog toga dobivamo:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(-\sqrt{\frac{t^2+t+1}{t^2}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)=-\sqrt{1+0+0}=-1.$$

Tako konačno imamo:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}}\right)=\frac{1-0}{1-(-1)}=\frac{1}{2}.$$

c) I u ovome slučaju najprije imamo:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left(5\cdot x+\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\left(5\cdot x+\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}\right)\cdot\frac{\left(5\cdot x-\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}\right)}{\left(5\cdot x-\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(5\cdot x)^2-\left(\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}\right)^2}{5\cdot x-\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{25\cdot x^2-\left(25\cdot x^2-20\cdot x+1\right)}{5\cdot x-\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{20\cdot x-1}{5\cdot x-\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{20-\frac{1}{x}}{5-\frac{\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}}{x}}\right).$$

Ni ovdje **ne smijemo** napisati $\frac{\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}}{x}=\frac{\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{\frac{25\cdot x^2-20\cdot x+1}{x^2}}$.

Razlozi su potpuno analogni onima iz prethodnoga podzadatka. Zbog toga moramo uvesti zamjenu $t=-x$. Odatle je $x=-t$. Očito, kad $x\to-\infty$, onda $t\to+\infty$ i vrijedi jednakost $t=\sqrt{t^2}$ Tako sada imamo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{25\cdot(-t)^2-20\cdot(-t)+1}}{(-t)}=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\sqrt{25\cdot t^2+20\cdot t+1}}{t}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\sqrt{25\cdot t^2+20\cdot t+1}}{t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(-\sqrt{\frac{25\cdot t^2+20\cdot t+1}{t^2}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(-\sqrt{25+\frac{20}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)=-\sqrt{25+0+0}=-5.$$

Konačno dobivamo:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{20-\frac{1}{x}}{5-\frac{\sqrt{25\cdot x^2-20\cdot x+1}}{x}}\right).=\frac{20-0}{5-(-5)}=\frac{20}{10}=2.$$

d) Imamo redom:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}-\left(x-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{x}}{x}}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{1+1}=1.$$

e) Primjenom formule za rastav zbroja kubova na faktore dobivamo redom:

$$L=\lim_{t\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}+2\cdot t\right)=\lim_{t\to-\infty}\left(\left(\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}+2\cdot t\right)\cdot\frac{\left(\left(\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}\right)^2-2\cdot t\cdot\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}+(2\cdot t)^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}\right)^2-2\cdot t\cdot\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}+(2\cdot t)^2\right)}\right)=$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}\right)^3+(2\cdot t)^3}{\left(\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}\right)^2-2\cdot t\cdot\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}+4\cdot t^2}\right)=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3+8\cdot t^3}{\left(\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}\right)^2-2\cdot t\cdot\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}+4\cdot t^2}\right)=$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1+12\cdot t^2}{\left(\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}\right)^2-2\cdot t\cdot\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}+4\cdot t^2}\right)=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{\frac{1}{t^2}+12}{\left(\frac{\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}}{t}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt[3]{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}}{t}+4}\right)=$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{\frac{1}{t^2}+12}{\left(\sqrt[3]{\frac{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}{t^3}}\right)^2-2\cdot\sqrt[3]{\frac{1+12\cdot t^2-8\cdot t^3}{t^3}}+4}\right)=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{\frac{1}{t^2}+12}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+12\cdot\frac{1}{t}-8}\right)^2-2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+12\cdot\frac{1}{t}-8}+4}\right)=$$

$$=\frac{0+12}{\left(\sqrt[3]{-8}\right)^2-2\cdot\sqrt[3]{-8}+4}=\frac{12}{4-2\cdot(-2)+4}=1.$$

f) Primjenom formula za kvadrat binoma i razliku kvadrata dobivamo:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(1-x)\cdot(x+1)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2\cdot x+1+x^2-2\cdot x+1}{1^2-x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2\cdot x^2+2}{1-x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{2\cdot x^2+2}{x^2}}{\frac{1-x^2}{x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1}\right)=\frac{2+0}{0-1}=-2.$$

g) Analogno kao u prethodnom podzadatku dobivamo:

$$L=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{(2\cdot t-3)^2+(3\cdot t+2)^2}{(5-t)\cdot(t+5)}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{4\cdot t^2-12\cdot t+9+9\cdot t^2+12\cdot t+4}{5^2-t^2}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{13\cdot t^2+13}{25-t^2}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{13+\frac{13}{t^2}}{\frac{25}{t^2}-1}\right)=\frac{13+0}{0-1}=\frac{13}{-1}=-13.$$

h) Analogno kao u prethodnom podzadatku dobivamo:

$$L=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{(2\cdot t+3)^2+(3\cdot t-2)^2}{(7\cdot t-8)^2-(6\cdot t+5)^2}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{4\cdot t^2+12\cdot t+9+9\cdot t^2-12\cdot t+4}{49\cdot t^2-112\cdot t+64-36\cdot t^2-60\cdot t+25}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{13\cdot t^2+13}{13\cdot t^2-172\cdot t+91}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{13+\frac{13}{t^2}}{13-\frac{172}{t}+\frac{91}{t^2}}\right)=\frac{13+0}{13-0+0}=\frac{13}{13}=1.$$

i) Uvedimo zamjenu $t:=\frac{x}{2}$. Odatle je $x=2\cdot t$. Kad $x\to 0$, onda i $t\to 0$. Tako odmah dobivamo:

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\cdot x}}\right)=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{2\cdot(2\cdot t)}}\right)=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{4\cdot t}}\right)=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(e^1\right)^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{1}{4}}.$$

j) Imamo redom:

$$L=\lim_{x\to 0}\left((1+2\cdot x)^{\frac{1}{3\cdot x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\left((1+2\cdot x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\left((1+2\cdot x)^{\frac{1}{x}}\right)\right)^{\frac{1}{3}}=\left(e^2\right)^{\frac{1}{3}}=e^{2\cdot\frac{1}{3}}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}.$$

k) U ovom ćemo podzadatku iskoristiti pravilo da je granična vrijednost umnoška dviju funkcija u nekoj točki (uključujući i „točku“ ∞) jednaka umnošku graničnih vrijednosti tih funkcija u toj točki, uz uvjet da postoje obje granične vrijednosti funkcija u dotičnoj točki. Tako redom imamo:

$$L=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2\cdot t+1}{t^2}\right)^{t+\frac{2019}{t}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(\frac{t^2+2\cdot t+1}{t^2}\right)^{t+\frac{2019}{t}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(\frac{(t+1)^2}{t^2}\right)^{t+\frac{2019}{t}}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(\left(\frac{t+1}{t}\right)^2\right)^{t+\frac{2019}{t}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(\frac{t+1}{t}\right)^{2\cdot\left(t+\frac{2019}{t}\right)}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(\frac{t+1}{t}\right)^{2\cdot t+\frac{4038}{t}}\right)=$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\left(\frac{t+1}{t}\right)^{2\cdot t}\cdot\left(\frac{t+1}{t}\right)^{\frac{4038}{t}}\right) = \left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(\frac{t+1}{t}\right)^{2\cdot t}\right)\right)\cdot\left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(\frac{t+1}{t}\right)^{\frac{4038}{t}}\right)\right) =$$

$$= \left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)\right)^{2}\cdot\left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{4038}{t}}\right)\right) = e^{2}\cdot(1+0)^{0} = e^{2}\cdot 1 = e^{2}.$$

l) Primijetimo da vrijedi jednakost

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{(2-x)\cdot(x+2)} = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{4-x^2}.$$

Uvedimo zamjenu $t = x^2$. Očito, kad $x \to +\infty$, onda $t \to +\infty$. Zbog toga dobivamo:

$$L = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4-t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4}}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}} = \frac{\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4}}{\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}} = \frac{(1+0)^4}{e^1} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

7. GRUPA ZADATAKA

1. Limes slijeva, limes zdesna i vrijednost funkcije u svakom $c \in \mathbb{R}$ moraju biti međusobno jednaki. Sva tri pravila koja se pojavljuju prilikom definiranja funkcije f su izrazi za eksponencijalnu funkciju (e^x) i polinom $(2 \cdot x - 1)$, a te funkcije su neprekidne gdje god su definirane. Zbog toga su „kritične“ točke zadane točke one u kojima se mijenja pravilo zadavanja funkcije, a to su $c = 0$ i $c = 1$. Dakle, funkcija f će biti neprekidna na $\mathbb{R}$ ako i samo ako bude neprekidna u točkama $c = 0$ i $c = 1$.

Za $c = 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} e^x = e^0 = 1, \\
&\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (a \cdot x + b) = a \cdot 0 + b = b, \\
&f(0) = a \cdot 0 + b = b,
\end{aligned}$$

pa izjednačavanjem desnih strana tih jednakosti slijedi $b = 1$.

Analogno, za $c = 1$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (a \cdot x + b) = a \cdot 1 + b = a + b, \\
&\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (2 \cdot x - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \\
&f(1) = a \cdot 1 + b = a + b,
\end{aligned}$$

pa izjednačavanjem desnih strana tih triju jednakosti slijedi $a + b = 1$.

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice $\begin{cases} b = 1, \\ a + b = 1 \end{cases}$ čije je rješenje $(a, b) = (0, 1)$.

2. U ovome zadatku je jedina „kritična“ točka $y = 0$. Računamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y \to 1-} g(y) = \lim_{y \to 1-} (c + 1) = c + 1, \\
&\lim_{y \to 1+} g(y) = \lim_{y \to 1+} \frac{y^2 - 1}{\sin(y - 1)} = \lim_{y \to 1+} \frac{(y-1) \cdot (y+1)}{\sin(y-1)} = \left(\lim_{y \to 1+} \frac{(y-1)}{\sin(y-1)} \right) \cdot \left(\lim_{y \to 1+} (y+1) \right) = \left(\lim_{y \to 1+} \frac{y-1}{\sin(y-1)} \right) \cdot (1+1) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := y - 1, \\ \text{kad } y \to 1+, \text{ onda } t \to 0+ \end{array} \right\} = 2 \cdot \left(\lim_{t \to 0+} \frac{t}{\sin t} \right) = 2 \cdot 1 = 2, \\
&g(1) = c + 1,
\end{aligned}$$

pa izjednačavanjem desnih strana tih triju jednakosti dobivamo jednadžbu $c + 1 = 2$. Rješenje te jednadžbe je $c = 1$.

3. U ovome zadatku je (ponovno) jedina „kritična“ točka $c=1$. Računamo:

$$\lim_{t\to 2-} h(t) = \lim_{t\to 2-}\left(d\cdot e^{t}\right) = d\cdot e^{2},$$

$$\lim_{t\to 2+} h(t) = \lim_{t\to 2+}(t-1)^{\frac{2}{t-2}} = \left\{\begin{matrix}\text{zamjena: } x=t-2,\\ t=x+2,\\ \text{kad } t\to 2+,\ \text{onda } x\to 0+\end{matrix}\right\} = \lim_{t\to 0+}\left(\left(x+2-1\right)^{\frac{2}{x}}\right) = \lim_{t\to 0+}\left((1+x)^{\frac{2}{x}}\right) = e^{2},$$

$$h(2) = d\cdot e^{2},$$

pa izjednačavanjem desnih strana tih triju jednakosti dobivamo jednadžbu $d\cdot e^{2} = e^{2}$. Rješenje te jednadžbe je $d=1$.

4. Analogno kao u zadatku 1. zaključujemo da imamo dvije „kritične“ točke: $c=-2$ i $c=2$.

Za $c=-2$ dobivamo:

$$\lim_{w\to(-2)-} k(w) = \lim_{w\to(-2)-}\frac{w^{2}-4}{w+2} = \lim_{w\to(-2)-}\frac{(w-2)\cdot(w+2)}{w+2} = \lim_{w\to(-2)-}(w-2) = -2-2 = -4,$$

$$\lim_{x\to(-2)+} k(w) = \lim_{w\to(-2)+}(\alpha\cdot w+\beta) = \alpha\cdot(-2)+\beta = -2\cdot\alpha+\beta,$$

$$f(-2) = -2\cdot\alpha+\beta,$$

pa izjednačavanjem desnih strana tih triju jednakosti dobivamo jednadžbu

$$-2\cdot\alpha+\beta = -4\,.$$

Analogno, za $c=2$ dobivamo:

$$\lim_{w\to 2-} k(w) = \lim_{w\to 2-}(\alpha\cdot w+\beta) = \alpha\cdot 2+\beta = 2\cdot\alpha+\beta,$$

$$\lim_{x\to 2+} k(w) = \lim_{w\to 2+}\left[\frac{4\cdot\left(e^{w-2}-1\right)}{w-2}\right] = \left\{\begin{matrix}\text{zamjena: } t=w-2,\\ \text{kad } w\to 2+,\ \text{onda } t\to 0+\end{matrix}\right\} = 4\cdot\lim_{w\to 0+}\frac{e^{t}-1}{t} = 4\cdot 1 = 4,$$

$$f(2) = 2\cdot\alpha+\beta,$$

pa izjednačavanjem desnih strana tih triju jednakosti dobivamo jednadžbu

$$2\cdot\alpha+\beta = 4\,.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases}-2\cdot\alpha+\beta=-4,\\ 2\cdot\alpha+\beta=4\end{cases}$$

Njegovo je rješenje $(\alpha,\beta)=(2,0)$.

5. $f'(t)=4\cdot\pi^2\cdot\left(\dfrac{t^2\cdot\cos t-2\cdot t\cdot\sin t}{t^4}\right)\Rightarrow f'(2\cdot\pi)=4\cdot\pi^2\cdot\left(\dfrac{4\cdot\pi^2\cdot\cos(2\cdot\pi)-2\cdot(2\cdot\pi)\cdot\sin(2\cdot\pi)}{(2\cdot\pi)^4}\right)=$

$=4\cdot\pi^2\cdot\left(\dfrac{4\cdot\pi^2\cdot 1-2\cdot(2\cdot\pi)\cdot 0}{2^4\cdot\pi^4}\right)=\dfrac{4\cdot\pi^2\cdot 4\cdot\pi^2}{2^4\cdot\pi^4}=1.$

6. $g'(x)=\dfrac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(2\cdot x\cdot\cos x+x^2\cdot\sin x\right)\Rightarrow g'(\pi)=\dfrac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(2\cdot\pi\cdot\cos\pi+\pi^2\cdot\sin\pi\right)=$

$=\dfrac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(2\cdot\pi\cdot(-1)+\pi^2\cdot 0\right)=\dfrac{1}{2\cdot\pi}\cdot(-2\cdot\pi)=-1.$

7. $h'(y)=\dfrac{\frac{1}{y}\cdot y^3-(\ln y)\cdot(3\cdot y^2)}{y^6}=\dfrac{y^2-3\cdot y^2\cdot\ln y}{y^6}=\dfrac{y^2\cdot(1-3\cdot\ln y)}{y^6}=\dfrac{1-3\cdot\ln y}{y^6}\Rightarrow h'(1)=\dfrac{1-3\cdot\ln 1}{1^6}=\dfrac{1-3\cdot 0}{1}=1.$

8. $u'(w)=\left(2\cdot w+1\right)\cdot e^w+(w^2+w+1)\cdot e^w=e^w\cdot\left(2\cdot w+1+w^2+w+1\right)=\left(w^2+3\cdot w+2\right)\cdot e^w\Rightarrow$

$u'(-1)=\left((-1)^2+3\cdot(-1)+2\right)\cdot e^{-1}=(1-3+2)\cdot e^{-1}=0\cdot e^{-1}=0.$

9. $k(0)=0^2\cdot e^0+(\sin 0)\cdot(\operatorname{sh} 0)=0\cdot 1+0\cdot 0=0,$

$k'(\alpha)=2\cdot\alpha\cdot e^\alpha+\alpha^2\cdot e^\alpha+(\cos\alpha)\cdot(\operatorname{ch}\alpha)+(\sin\alpha)\cdot(\operatorname{sh}\alpha)\Rightarrow$

$k'(0)=2\cdot 0\cdot e^0+0^2\cdot e^0+(\cos 0)\cdot(\operatorname{ch} 0)+(\sin 0)\cdot(\operatorname{sh} 0)=0\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 0=1.$

10. **a)** $f'(y)=75-3\cdot y^2\Rightarrow 75-3\cdot y^2=0\Leftrightarrow y^2=25\Rightarrow y\in\{-5,5\}.$

b) $f'(x)=\left(2\cdot x-3\right)\cdot e^x+\left(x^2-3\cdot x+3\right)\cdot e^x=e^x\cdot\left(2\cdot x-3+x^2-3\cdot x+3\right)=\left(x^2-x\right)\cdot e^x\Rightarrow\left(x^2-x\right)\cdot e^x=0$

$\Leftrightarrow x^2-x=0\Rightarrow x\in\{0,1\}.$

c) $f'(w)=\dfrac{1}{\cos^2 w}-1=\dfrac{1-\cos^2 w}{\cos^2 w}=\dfrac{\sin^2 w}{\cos^2 w}=\left(\dfrac{\sin w}{\cos w}\right)^2=\operatorname{tg}^2 w\Rightarrow\operatorname{tg}^2 w=0\Leftrightarrow\operatorname{tg} w=0\Rightarrow w=k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

d) $h(v)=(2\cdot v^2-4\cdot v)\cdot\ln v+4\cdot v-v^2\Rightarrow h'(v)=(4\cdot v-4)\cdot\ln v+(2\cdot v^2-4\cdot v)\cdot\dfrac{1}{v}+4-2\cdot v=$

$=(4\cdot v-4)\cdot\ln v+2\cdot v-4\cdot v+4-2\cdot v=(4\cdot v-4)\cdot\ln v=4\cdot(v-1)\cdot\ln v\Rightarrow 4\cdot(v-1)\cdot\ln v=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow((v-1)=0)\vee(\ln v=0)\Rightarrow v=1.$

8. GRUPA ZADATAKA

Funkcije u zadacima 1. – 4. treba derivirati prema pravilu deriviranja složene funkcije.

1. $f'(x)=e^{x^2+4\cdot x+3}\cdot(x^2+4\cdot x+3)'=e^{x^2+4\cdot x+3}\cdot(2\cdot x+4+0)=2\cdot(x+2)\cdot e^{x^2+4\cdot x+3}\Rightarrow f'(-1)=2\cdot 1\cdot e^0=2.$

2. $g'(t)=\cos(\ln t)\cdot(\ln t)'=\cos(\ln t)\cdot\frac{1}{t}=\frac{\cos(\ln t)}{t}\Rightarrow g'(1)=\frac{\cos(\ln 1)}{1}=\frac{\cos 0}{1}=1.$

3. $h(u)=\left(6\cdot\left(1+\cos^2 u\right)\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow h'(u)=\frac{1}{2}\cdot\left(6\cdot\left(1+\cos^2 u\right)\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(6\cdot\left(1+\cos^2 u\right)\right)'=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(6\cdot\left(1+\cos^2 u\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 6\cdot\left(1+\cos^2 u\right)'=3\cdot\left(6\cdot\left(1+\cos^2 u\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(0+2\cdot\cos u\cdot(\cos u)'\right)=$$

$$=3\cdot\left(6\cdot\left(1+\cos^2 u\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\cdot\cos u\cdot(-\sin u)=(-3)\cdot\left(6\cdot\left(1+\cos^2 u\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2\cdot\sin u\cdot\cos u)=$$

$$=(-3)\cdot\left(6\cdot\left(1+\cos^2 u\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin(2\cdot u)\Rightarrow h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(-3)\cdot\left(6\cdot\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=(-3)\cdot\left(6\cdot\left(1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-3)\cdot\left(6\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1=(-3)\cdot 9^{-\frac{1}{2}}\cdot 1=-1.$$

4. $k'(w)=40\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\right)\right)'=40\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\right)^2+1}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\right)'=40\cdot\frac{1}{\frac{1}{w}+1}\cdot\left(w^{-\frac{1}{2}}\right)'=$

$$=40\cdot\frac{w}{w+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot w^{-\frac{1}{2}-1}=-20\cdot\frac{w}{w+1}\cdot w^{-\frac{3}{2}}=-20\cdot\frac{w^{-\frac{1}{2}}}{w+1}=-\frac{20}{(w+1)\cdot w^{\frac{1}{2}}}=-\frac{20}{(w+1)\cdot\sqrt{w}}$$

$$\Rightarrow k'(4)=-\frac{20}{(4+1)\cdot\sqrt{4}}=-\frac{20}{5\cdot 2}=-2.$$

U zadacima 5. – 8. treba primijeniti pravilo deriviranja implicitno zadane funkcije.

5. $3\cdot x^2+3\cdot y^2\cdot y'=6\cdot\left(1\cdot y+x\cdot 1\cdot y'\right)\Rightarrow 3\cdot x^2+3\cdot y^2\cdot y'=6\cdot y+6\cdot x\cdot y'\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\cdot y^2\cdot y'-6\cdot x\cdot y'=6\cdot y-3\cdot x^2\Leftrightarrow y'\cdot\left(3\cdot y^2-6\cdot x\right)=6\cdot y-3\cdot x^2\Leftrightarrow y'=\frac{6\cdot y-3\cdot x^2}{3\cdot y^2-6\cdot x}=$$

$$=\frac{3\cdot(2\cdot y-x^2)}{3\cdot(y^2-2\cdot x)}=\frac{2\cdot y-x^2}{y^2-2\cdot x}\Rightarrow y'(3,3)=\frac{2\cdot 3-3^2}{3^2-2\cdot 3}=\frac{6-9}{9-6}=-1.$$

6. $\frac{1}{\frac{x}{t}}\cdot\left(\frac{x}{t}\right)'+\frac{1\cdot x'\cdot t-x\cdot 1}{t^2}-1=0\Rightarrow\frac{t}{x}\cdot\frac{x'\cdot t-x}{t^2}+\frac{x'\cdot t-x}{t^2}-1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow t\cdot\left(x'\cdot t-x\right)+x\cdot\left(x'\cdot t-x\right)-x\cdot t^2=0\Rightarrow x'\cdot t^2-t\cdot x+x'\cdot t\cdot x-x^2-x\cdot t^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'\cdot t^2+x'\cdot t\cdot x=t\cdot x+x^2+x\cdot t^2\Leftrightarrow x'\cdot(t^2+x\cdot t)=x^2+x\cdot t+x\cdot t^2\Rightarrow x'=\frac{x^2+x\cdot t+x\cdot t^2}{t^2+x\cdot t}\Rightarrow$

$\Rightarrow x'(1,1)=\frac{1^2+1\cdot 1+1\cdot 1^2}{1^2+1\cdot 1}=\frac{3}{2}=1.5$

7. $\cos(y\cdot w)\cdot(y\cdot w)'+2\cdot y\cdot y'\cdot w+y^2\cdot 1+\frac{1}{w}=0\Rightarrow\cos(y\cdot w)\cdot\left(1\cdot y'\cdot w+y\cdot 1\right)+2\cdot y\cdot y'\cdot w+y^2\cdot 1+\frac{1}{w}=0.$

Iz ove jednakosti je nemoguće izraziti y'. Zato u nju uvrstimo $w=1,\ y=0$, pa dobijemo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom $\left(y'\right)$:

$\cos(0\cdot 1)\cdot\left(1\cdot y'\cdot 1+0\cdot 1\right)+2\cdot 0\cdot y'\cdot 1+0^2\cdot 1+\frac{1}{1}=0\Rightarrow y'+1=0\Rightarrow y'=-1.$

8. $4\cdot t^{2-1}+\frac{1\cdot y-t\cdot 1\cdot y'}{y^2}-e^{\frac{y}{t}+1}\cdot\left(\frac{y}{t}+1\right)'=0\Rightarrow 4\cdot t+\frac{y-t\cdot y'}{y^2}-e^{\frac{y}{t}+1}\cdot\left(\frac{1\cdot y'\cdot t-y\cdot 1}{t^2}+0\right)=0\Rightarrow$

$4\cdot t+\frac{y-t\cdot y'}{y^2}-e^{\frac{y}{t}+1}\cdot\left(\frac{y'\cdot t-y}{t^2}\right)=0.$

Iz ove jednadžbe je prekomplicirano (i nepotrebno) izraziti y', pa uvrstimo $t=-1,\ y=1$:

$4\cdot(-1)+\frac{1-(-1)\cdot y'}{1^2}-e^{\frac{1}{-1}+1}\cdot\left(\frac{y'\cdot(-1)-1}{(-1)^2}\right)=0\Rightarrow -4+1+y'-1\cdot\left(-y'-1\right)=0\Rightarrow 2\cdot y'=2\Rightarrow y'=1.$

U zadacima 9. – 12. treba primijeniti pravilo deriviranja parametarski zadane funkcije.

9. $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\left(t^3-t^2+t-1\right)'}{\left(t^3+t^2+t+1\right)'}=\frac{3\cdot t^2-2\cdot t+1-0}{3\cdot t^2+2\cdot t+1+0}=\frac{3\cdot t^2-2\cdot t+1}{3\cdot t^2+2\cdot t+1}\Rightarrow\left(y'\right)_{t=0}=\frac{3\cdot 0^2-2\cdot 0+1}{3\cdot 0^2+2\cdot 0+1}=1.$

10. $y'=\frac{\left(t\cdot\cos t\right)'}{\left(t\cdot e^t\right)'}=\frac{1\cdot\cos t+t\cdot(-\sin t)}{1\cdot e^t+t\cdot e^t}=\frac{\cos t-t\cdot\sin t}{(t+1)\cdot e^t}\Rightarrow\left(y'\right)_{t=0}=\frac{\cos 0-0\cdot\sin 0}{(0+1)\cdot e^0}=\frac{1-0}{1\cdot 1}=1.$

11. $y'=\frac{\left((1+\sin t)\cdot\cos t\right)'}{(1+\sin t)'}=\frac{(0+\cos t)\cdot\cos t+(1+\sin t)\cdot(-\sin t)}{0+\cos t}=\frac{(\cos^2 t-\sin^2 t)-\sin t}{\cos t}=\frac{\cos(2\cdot t)-\sin t}{\cos t}\Rightarrow$

$\left(y'\right)_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{0-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1.$

12. $y' = \dfrac{\left(\cos(2\cdot t)\cdot \sin t\right)'}{\left(\cos(2\cdot t)\cdot \cos t\right)'} = \dfrac{-\sin(2\cdot t)\cdot(2\cdot t)'\cdot \sin t + \cos(2\cdot t)\cdot \cos t}{-\sin(2\cdot t)\cdot(2\cdot t)'\cdot \cos t + \cos(2\cdot t)\cdot(-\sin t)} = \dfrac{\cos(2\cdot t)\cdot \cos t - 2\cdot \sin(2\cdot t)\cdot \sin t}{-2\cdot \sin(2\cdot t)\cdot \cos t - \cos(2\cdot t)\cdot \sin t} \Rightarrow$

$$\left(y'\right)_{t=\frac{3}{4}\pi} = \frac{\cos\left(2\cdot\frac{3}{4}\cdot\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) - 2\cdot\sin\left(2\cdot\frac{3}{4}\cdot\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)}{-2\cdot\sin\left(2\cdot\frac{3}{4}\cdot\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) - \cos\left(2\cdot\frac{3}{4}\cdot\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) - 2\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)}{-2\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)} = \frac{0\cdot\cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) - 2\cdot(-1)\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)}{-2\cdot(-1)\cdot\cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) - 0\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)}{\cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)} = \mathrm{tg}\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) = -1.$$

9. GRUPA ZADATAKA

1. **a)** Iz slike 14. se vidi da je $(1,4)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije *f*, pa prema Fermatovu teoremu slijedi $f'(1)=0$.

$f'(0)$ je koeficijent smjera tangente *t* povučene u točki $(0,2)$. Iz slike 1. se vidi da ta tangenta prolazi točkama $(0,2)$ i $(1,5)$, pa je njezin koeficijent smjera:

$$k_t=\frac{5-2}{1-0}=\frac{3}{1}=3.$$

Zbog toga je $f'(0)=3$.

Tako konačno dobivamo:

$$f'(0)+f'(1)=0+3=3.$$

b) Koeficijent smjera normale *n* povučene u točki $(0,2)$ je suprotan i recipročan u odnosu na koeficijent smjera tangente *t*. Koristeći dio rješenja **a)** podzadatka dobivamo:

$$k_n=-\frac{1}{k_t}=-\frac{1}{3}.$$

Dakle, normala *n* ima koeficijent smjera jednak $-\frac{1}{3}$ i prolazi točkom $(0,2)$. Odredimo njezinu jednadžbu zapisanu u segmentnom obliku. Imamo redom:

$$y=-\frac{1}{3}\cdot x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot x+y=2 \Leftrightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1.$$

Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P=\frac{|6|\cdot|2|}{2}=\frac{6\cdot 2}{2}=6 \text{ kv. jed.}$$

2. Iz slike 15. očitamo koordinate točaka *A* i *C*: $A=(-2,0)$, $C=(0,2)$. Zbog toga je jednadžba tangente *t*:

$$t\ldots\ \frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1 \Leftrightarrow y=x+2.,$$

Odatle očitamo koeficijent smjera tangente *t*: $k_t=1$.

S druge je strane taj koeficijent jednak vrijednosti prve derivacije funkcije f u točki $x=0$. To znači da je $f'(0)=1$.

Površina trokuta ABC jednaka je polovici umnoška duljine stranice $\overline{BC}$ i duljine visine povučene na tu stranicu. Duljina uočene visine jednaka je apsolutnoj vrijednosti apscise točke A, tj. 2. Duljina stranice $\overline{BC}$ jednaka je zbroju ordinate točke C i apsolutne vrijednosti ordinate točke B. Označimo li s y_B ordinatu točke B, pri čemu je očito $y_B<0$, dobivamo jednadžbu:

$$\frac{(2+|y_B|)\cdot 2}{2}=2.4.$$

Jedino strogo negativno rješenje te jednadžbe je $y_B=-0.4$. Dakle, $C=(0,-0.4)$.

Jednadžba normale n glasi:

$$n\ldots\ \frac{x}{-2}+\frac{y}{-0.4}=1 \Leftrightarrow y=(-0.2)\cdot x-0.4.$$

Odatle očitamo koeficijent smjera normale n: $k_n=-0.2$.

S druge je strane taj koeficijent jednak suprotnoj i recipročnoj vrijednosti prve derivacije funkcije f u točki $x=-2$. Tako iz jednadžbe

$$-\frac{1}{f'(-2)}=-0.2$$

slijedi $f'(-2)=5$.

Prema tome, rješenje zadatka je:

$$f'(-2)+f'(0)=5+1=6.$$

3. Primijetimo najprije da je polinom p' neparna funkcija. To znači da je polinom p parna funkcija. (**Podsjetnik**: Derivacija parne funkcije je uvijek neparna funkcija.) Iz podatka $p(0)=0$ zaključujemo da je slobodni član polinoma p jednak nuli. Iz zaključaka da je p parna funkcija i da je slobodni član od p jednak nuli slijedi:

$$p\left(-2\cdot\sqrt{3}\right)+p\left(2\cdot\sqrt{3}\right)=-18 \overset{\text{zbog } p\left(-2\cdot\sqrt{3}\right)=p\left(2\cdot\sqrt{3}\right)}{\Rightarrow} p\left(-2\cdot\sqrt{3}\right)=p\left(2\cdot\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot(-18)=-9,$$

$$p(-2)+p(2)=-10 \overset{\text{zbog } p(-2)=p(2)}{\Rightarrow} p(-2)=p(2)=\frac{1}{2}\cdot(-10)=-5.$$

a) Tražimo skup svih rješenja nejednadžbe $p'(x)>0$ sadržanih u domeni polinoma p. Iz slike 16. se vidi da je $p'(x)>0$ ako i samo ako je $x\in\left\langle -2\cdot\sqrt{3},0\right\rangle\cup\left\langle 2\cdot\sqrt{3},4\right\rangle$. Dakle, traženi intervali su $\left\langle -2\cdot\sqrt{3},0\right\rangle$ i $\left\langle 2\cdot\sqrt{3},4\right\rangle$.

b) Tražimo skup svih rješenja nejednadžbe $p'(x)<0$ sadržanih u domeni polinoma p. Iz slike 16. se vidi da je $p'(x)>0$ ako i samo ako je $x\in\left\langle -4,-2\cdot\sqrt{3}\right\rangle$ i $\left\langle 0,2\cdot\sqrt{3}\right\rangle$. Dakle, traženi intervali su $\left\langle -4,-2\cdot\sqrt{3}\right\rangle$ i $\left\langle 0,2\cdot\sqrt{3}\right\rangle$.

c) Lokalni ekstremi polinoma p su nultočke polinoma p' takve da polinom p' mijenja predznak pri prolazu kroz te točke. Iz slike 16. vidimo:

- Pri prolazu kroz točku $x_1=-2\cdot\sqrt{3}$ polinom p' mijenja predznak iz negativnoga u pozitivan. To znači da za $x_1=-2\cdot\sqrt{3}$ polinom p ima lokalni minimum $p\left(-2\cdot\sqrt{3}\right)=-9$.
- Pri prolazu kroz točku $x_2=0$ polinom p' mijenja predznak iz pozitivnoga u negativan. To znači da za $x_2=0$ polinom p ima lokalni maksimum $p(0)=0$.
- Pri prolazu kroz točku $x_3=2\cdot\sqrt{3}$ polinom p' mijenja predznak iz negativnoga u pozitivan. To znači da za $x_3=2\cdot\sqrt{3}$ polinom p ima lokalni minimum $p\left(2\cdot\sqrt{3}\right)=-9$.

Dakle, točke lokalnoga minimuma su $\left(-2\cdot\sqrt{3},-9\right)$ i $\left(2\cdot\sqrt{3},-9\right)$, a točka lokalnoga maksimuma je $O=(0,\ 0)$.

d) Tražimo skup svih rješenja nejednadžbe $p''(x)>0$ sadržanih u domeni polinoma p. Budući da je $p''=\left(p'\right)'$, taj skup se podudara s intervalima rasta polinoma p'. Iz slike 16. vidimo da p' raste na intervalima $\left\langle -4,-2\right\rangle$ i $\left\langle 2,4\right\rangle$. Dakle, traženi intervali su $\left\langle -4,-2\right\rangle$ i $\left\langle 2,4\right\rangle$.

e) Tražimo skup svih rješenja nejednadžbe $p''(x)<0$ sadržanih u domeni polinoma p. Budući da je $p''=\left(p'\right)'$, taj skup se podudara s intervalima pada polinoma p'. Iz slike 16. vidimo da p' pada na intervalu $\left\langle -2,2\right\rangle$. Dakle, traženi interval je $\left\langle -2,2\right\rangle$.

f) Prva koordinata svake točke pregiba (infleksije) polinoma p jednaka je prvoj koordinati točke lokalnoga ekstrema polinoma p'. Iz slike 16. vidimo da p' ima lokalni minimum za $x_4 = 2$, a lokalni maksimum za $x_5 = -2$. Dakle, tražene točke pregiba su $T_1 = (-2, p(-2)) = (-2, -5)$ i $T_2 = (2, p(2)) = (2, -5)$.

g) Točka u kojoj polinom p najbrže raste jednaka je točki globalnoga maksimuma polinoma p' koja pripada području rasta polinoma p. (**Oprez: Nije ispravno** zaključiti da je ta točka jednaka točki **lokalnoga** maksimuma polinoma p' jer lokalni maksimum ne mora biti i globalni.) Iz slike 16. vidimo da je $T_1 = (-2, p(-2)) = (-2, -5)$ točka globalnoga maksimuma polinoma p'. Budući da očito vrijedi relacija $-2 \in \left\langle -2\cdot\sqrt{3}, 0\right\rangle \cup \left\langle 2\cdot\sqrt{3}, 4\right\rangle$, ova točka je rješenje zadatka.

h) Točka u kojoj polinom p najsporije pada jednaka je točki globalnoga minimuma polinoma p' koja pripada području pada polinoma p. (**Oprez: Nije ispravno** zaključiti da je ta točka jednaka točki lokalnoga minimuma polinoma p' jer lokalni minimum ne mora biti i globalni.) Iz slike 16. vidimo da je ta točka $T_2 = (2, p(2)) = (2, -5)$. Budući da očito vrijedi relacija $2 \in \left\langle 0, 2\cdot\sqrt{3}\right\rangle$, ova točka je rješenje zadatka.

4. $p \ldots x + 13\cdot y + 1 = 0 \Leftrightarrow 13\cdot y = -x - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{13}\cdot x - \frac{1}{13} \Rightarrow k_n = -\frac{1}{13} \Rightarrow k_t = -\frac{1}{k_n} = 13,$

$T = (x_T, y_T) \Rightarrow k_t = \left((x^3 + x + 1)'\right)_{x=x_T} = (3\cdot x^2 + 1)_{x=x_T} = 3\cdot x_T^2 + 1 \Rightarrow 3\cdot x_T^2 + 1 = 13 \Rightarrow (x_T)_1 = -2,\ (x_T)_2 = 2$

$T_1 = (-2,\ (-2)^3 + (-2) + 1) = (-2, -9),\ T_2 = (2,\ 2^3 + 2 + 1) = (2, 11).$

5. $p \ldots 7\cdot x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 7\cdot x + 2 \Rightarrow k_t = 7,$

$T = (x_T, y_T) \Rightarrow k_t = \left((x^3 + 4\cdot x + 2)'\right)_{x=x_T} = (3\cdot x^2 + 4)_{x=x_T} = 3\cdot x_T^2 + 4 \Rightarrow 3\cdot x_T^2 + 4 = 7 \Rightarrow (x_T)_1 = -1,\ (x_T)_2 = 1$

$\Rightarrow T_1 = (-1,\ (-1)^3 + 4\cdot(-1) + 2) = (-1, -3),\ T_2 = (1,\ 1^3 + 4\cdot 1 + 2) = (1, 7).$

6. $(x^2 + 1)\cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow T = (1,\ 0)$

$$k_n = -\frac{1}{\left(\left((x^2+1)\cdot\ln x\right)'\right)_{x=1}} = -\frac{1}{\left((2\cdot x + 0)\cdot\ln x + (x^2+1)\cdot\frac{1}{x}\right)_{x=1}} = -\frac{1}{\left(2\cdot x\cdot\ln x + x + \frac{1}{x}\right)_{x=1}} =$$

$$= -\frac{1}{\left(2\cdot 1\cdot \ln 1 + 1 + \frac{1}{1}\right)} = -\frac{1}{0+1+1} = -\frac{1}{2}$$

$$n \ldots y = -\frac{1}{2}\cdot(x-1) + 0 \Leftrightarrow 2\cdot y = -x + 1 \Leftrightarrow x + 2\cdot y = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow m = 1,\ n = \frac{1}{2},$$

$$P = \frac{1}{2}\cdot|m\cdot n| = \frac{1}{2}\cdot\left|1\cdot\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ kv. jed.}$$

7. $T=\left(0,\ \frac{1-\sin 0}{e^0}\right)=(0,\ 1)$

$$k_t=\left(\frac{1-\sin x}{e^x}\right)'_{x=0}=\left(\frac{(1-\sin x)'\cdot e^x-(1-\sin x)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}\right)_{x=0}=\left(\frac{(0-\cos x)\cdot e^x-(1-\sin x)\cdot e^x}{(e^x)^2}\right)_{x=0}=$$

$$\left(\frac{e^x\cdot(-\cos x-1+\sin x)}{(e^x)^2}\right)_{x=0}=\left(\frac{\sin x-\cos x-1}{e^x}\right)_{x=0}=\frac{\sin 0-\cos 0-1}{e^0}=\frac{0-1-1}{1}=-2\Rightarrow$$

$$t...\ y=-2\cdot(x-0)+1\Leftrightarrow 2\cdot x+y=1\Leftrightarrow\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{1}=1$$

$$k_n=-\frac{1}{k_t}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$$

$$n...\ y=\frac{1}{2}\cdot(x-0)+1\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cdot x+y=1\Leftrightarrow\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}=1$$

$$P=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{2}\cdot 1\right|+\frac{1}{2}\cdot\left|(-2)\cdot 1\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}\ \text{kv. jed.}$$

8. Odredimo najprije sjecišta zadane krivulje s osi apscisa. U tu svrhu riješimo jednadžbu

$$x^4-4\cdot x^2=0.$$

Imamo:

$$x^4-4\cdot x^2=0,$$
$$x^2\cdot(x^2-4)=0,$$
$$x^2\cdot(x-2)\cdot(x+2)=0.$$

Odatle slijedi $x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=2.$ Dakle, sjecišta krivulje K s osi apscisa su točke $S_1=O=(0,0),\ S_2=(2,0)$ i $S_3=(-2,0).$

U svakoj od tih točaka povučemo tangentu na krivulju K. Koeficijent smjera tangente povučene u *bilo kojoj* točki T krivulje K jednak je vrijednosti derivacije funkcije u apscisi točke T. Dakle,

$$k_t=y'=(x^4-4\cdot x^2)'=4\cdot x^3-4\cdot 2\cdot x=4\cdot x^3-8\cdot x.$$

U ovaj izraz najprije uvrstimo $x=0$ (to je apscisa točke S_1). Lako izračunamo: $k_{t_1}=0$. Zbog toga je jednadžba tangente povučene na krivulju K u točki S_1:

$$t_1...\ y=0\cdot(x-0)+0,$$
$$y=0.$$

Dakle, tangenta povučena na krivulju K u točki S_1 je os apscisa.

Ponovimo postupak za svaku od preostale dvije točke.

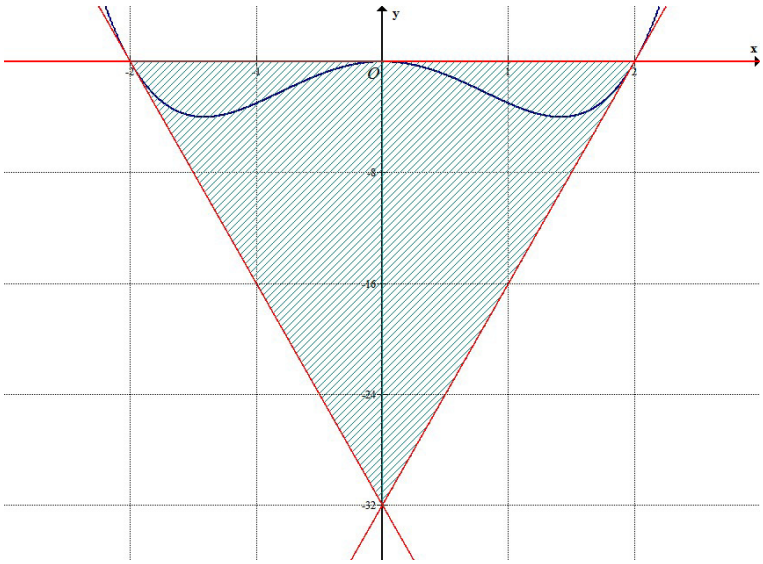
U izraz za k_t uvrstimo $x=2$ (to je apscisa točke S_2). Lako izračunamo: $k_{t_2}=4\cdot 2^3-8\cdot 2=16$. Zbog toga je jednadžba tangente povučene na krivulju K u točki S_2:

$$\begin{aligned}
&t_2 \ldots\ y=16\cdot(x-2)+0,\\
&y=16\cdot x-32,\\
&-16\cdot x+y=-32,\ /:(-32)\\
&\frac{x}{2}+\frac{y}{-32}=1.
\end{aligned}$$

U izraz za k_t uvrstimo $x=-2$ (to je apscisa točke S_3). Lako izračunamo: $k_{t_3}=4\cdot(-2)^3-8\cdot(-2)=-16$. Zbog toga je jednadžba tangente povučene na krivulju K u točki S_2:

$$\begin{aligned}
&t_3 \ldots\ y=(-16)\cdot(x-(-2))+0,\\
&y=-16\cdot x-32,\\
&16\cdot x+y=-32,\ \ /:(-32)\\
&\frac{x}{-2}+\frac{y}{-32}=1.
\end{aligned}$$

Skicirajmo sve tri tangente u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 18.



Slika 18.

Vidimo da je lik kojega omeđuju sve tri tangente trokut. Jedna njegova osnovica pripada osi apscisa, a visina na tu osnovicu povučena iz vrha nasuprot osnovice pripada osi ordinata. Tangente t_2 i t_3 imaju isti odsječak na osi ordinata (to je –32)), pa zaključujemo da se one sijeku u točki (0, -32). (Analitički (bez crtanja) tu točku dobijemo rješavanjem sustava

$$\begin{cases} y = 16 \cdot x - 32, \\ y = -16 \cdot x - 32. \end{cases})$$

Dakle, uočeni trokut ima jednu osnovicu čija je duljina $a = 2 - (-2) = 4,$ te visinu na tu osnovicu čija je duljina v_a = |-32| = 32. Zbog toga je tražena površina jednaka

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 32 = 64 \text{ kv. jed.}$$

9. Najprije odredimo:

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3.$$

Iz jednadžbe $f'(x) = 0$ slijedi

$$3 \cdot x^2 - 3 = 0,$$

a odatle je $x_1 = -1,\ x_2 = 1.$

Preostaje izračunati vrijednosti funkcije f u rubnim točkama segmenta (domene), te u dvjema stacionarnim točkama:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -2, \\ f(-1) &= (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2, \\ f(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1 = -2, \\ f(2) &= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo:

f ima globalni minimum –2. On se postiže za x = –2 i za x = 1. Kraće možemo reći da su točke globalnoga minimuma $T_1 = (-2, -2)$ i $T_2 = (1, -2)$.

f ima globalni maksimum 2. On se postiže za x = –1 i za x = 2. Kraće možemo reći da su točke globalnoga maksimuma $T_3 = (-1,\ 2)$ i $T_2 = (2,\ 2)$.

10. Najprije odredimo:

$$g(y) = y\cdot(y-3)^2 = y\cdot(y^2-6\cdot y+9) = y^3-6\cdot y^2+9\cdot y,$$
$$g'(y) = 3\cdot y^2-12\cdot y+9.$$

Iz jednadžbe $g'(y)=0$ slijedi

$$3\cdot y^2-12\cdot y+9=0,$$

a odatle je $y_1=1,\ y_2=3.$

Preostaje izračunati vrijednosti funkcije g u rubnim točkama segmenta (domene), te u jednoj stacionarnoj točki koja nije rub segmenta:

$$g(0)=0\cdot(0-3)^2=g(3)=3\cdot(3-3)^2=0,$$
$$g(1)=1\cdot(1-3)^2=4,$$

Odatle zaključujemo:

g ima globalni minimum 0. On se postiže za $y = 0$ i za $y = 3$. Kraće možemo reći da su točke globalnoga minimuma $T_1=(0,\ 0)$ i $T_2=(3,\ 0)$.

g ima globalni maksimum 4. On se postiže za $y = 1$. Kraće možemo reći da je točka globalnoga maksimuma $T_3=(1,\ 4)$.

11.a) Iz uvjeta $x\neq 0$ slijedi $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Prva derivacija funkcije f je $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$. Iz jednadžbe $f'(x)=0$ slijedi

$$x^2=1,$$

a odavde je $x_1=-1,\ x_2=1.$ Budući da tražimo intervale monotonosti, promatramo funkciju na četirima intervalima: $\langle-\infty,\ -1\rangle$, $\langle-1,\ 0\rangle$, $\langle 0,\ 1\rangle$ i $\langle 1,\ +\infty\rangle$.

Uzmemo $x = -2$, pa izračunamo $f'(-2)=0.75>0$. Dakle, f raste na intervalu $\langle-\infty,\ -1\rangle$.
Uzmemo $x=-0.5$, pa izračunamo $f'(-0.5)=-3<0$. Dakle, f pada na intervalu $\langle-1,\ 0\rangle$.
Uzmemo $x=0.5$, pa izračunamo $f'(0.5)=-3<0$. Dakle, f pada na intervalu $\langle 0,\ 1\rangle$.
Uzmemo $x = 2$, pa izračunamo $f'(2)=0.75>0$. Dakle, f raste na intervalu $\langle 1,\ +\infty\rangle$.

Prema tome, intervali rasta su $\langle-\infty,\ -1\rangle$ i $\langle 1,\ +\infty\rangle$, a intervali pada $\langle-1,\ 0\rangle$ i $\langle 0,\ 1\rangle$.

Budući da je f rastuća lijevo od $x = -1$, a padajuća desno od $x = -1$, zaključujemo da je $T_1 = (-1, f(-1)) = (-1, -2)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije f.

Analogno, budući da je f padajuća lijevo od $x = 1$, a rastuća desno od $x = 1$, zaključujemo da je $T_2 = (1, f(1)) = (1,\ 2)$ točka lokalnoga minimuma funkcije f.

b) Iz uvjeta $t > 0$ i $t \neq 0$ slijedi $D(g) = \mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty \rangle$.

Prva derivacija funkcije g je $g'(t) = \dfrac{1 - 2 \cdot \ln t}{t^3}$.

Iz jednadžbe $g'(t) = 0$ slijedi

$$1 - 2 \cdot \ln t = 0,$$

a odavde je $t = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Zbog toga promatramo funkciju na intervalima $\langle 0, \sqrt{e} \rangle$ i $\langle \sqrt{e}, +\infty \rangle$.

Za $t = 1$ je $g'(1) = 1 > 0$. Dakle, g raste na intervalu $\langle 0, \sqrt{e} \rangle$.
Za $t = e$ je $g'(e) = -\dfrac{1}{e^3} < 0$, pa g pada na intervalu $\langle \sqrt{e}, +\infty \rangle$.

Odatle zaključujemo da je $T = \left(\sqrt{e}, g\left(\sqrt{e}\right)\right) = \left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2 \cdot e}\right)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije g.

c) Budući da vrijedi nejednakost $e^{2 \cdot u} > 0,\ \forall u \in \mathbb{R}$, nemamo nikakvih uvjeta na vrijednost varijable u. Zbog toga je $D(h) = \mathbb{R}$.

Prva derivacija funkcije h je $h'(u) = \dfrac{2 - 4 \cdot u}{e^{2 \cdot u}}$. Iz jednadžbe $h'(u) = 0$ slijedi

$$2 - 4 \cdot u = 0,$$

a odavde je $u = \dfrac{1}{2}$. Zbog toga promatramo ponašanje funkcije h na intervalima $\left\langle -\infty,\ \dfrac{1}{2} \right\rangle$ i $\left\langle \dfrac{1}{2}, +\infty \right\rangle$.

Za $u = 0$ je $h'(0) = 2 > 0$, pa h raste na intervalu $\left\langle -\infty,\ \dfrac{1}{2} \right\rangle$.

Za $u = 1$ je $h'(1) = -\frac{2}{e^2} < 0$, pa h pada na intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$.

Odatle zaključujemo da je $T = \left(\frac{1}{2}, h\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e}\right)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije h.

d) U zadatku je već navedeno da je domena zadane funkcije $D(p) = [0, 2 \cdot \pi]$.

Prva derivacija zadane funkcije je $p'(v) = \cos v - \sin v$. Iz jednadžbe $p'(v) = 0$ slijedi

$$\cos v - \sin v = 0.$$

Za isti $v \in \mathbb{R}$ vrijednosti funkcija sinus i kosinus ne mogu istodobno biti jednake nuli jer u suprotnom nije moguća jednakost $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$. Ako bi bilo $\cos v = 0$, onda bi iz dobivene jednadžbe slijedilo $\sin v = 0$, što je proturječje. Zbog toga jednadžbu smijemo podijeliti sa $\cos v$. Tako dobijemo jednadžbu

$$\operatorname{tg} v = 1.$$

Ona u segmentu $[0, 2 \cdot \pi]$ ima točno dva rješenja: $v_1 = \frac{\pi}{4}$ i $v_2 = \frac{5}{4} \cdot \pi$. Zbog toga promatramo zadanu funkciju na intervalima $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$, $\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4} \cdot \pi \right\rangle$ i $\left\langle \frac{5}{4} \cdot \pi, 2 \cdot \pi \right\rangle$.

Za $v = \frac{\pi}{6}$ je $p'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} > 0$, pa p raste na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Za $v = \pi$ je $p'(\pi) = -1 < 0$, pa p pada na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4} \cdot \pi \right\rangle$.

Za $v = \frac{3}{2} \cdot \pi$ je $p'\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) = 1 > 0$, pa p raste na intervalu $\left\langle \frac{5}{4} \cdot \pi, 2 \cdot \pi \right\rangle$.

Dakle, intervali rasta zadane funkcije su $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ i $\left\langle \frac{5}{4} \cdot \pi, 2 \cdot \pi \right\rangle$, a interval pada $\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4} \cdot \pi \right\rangle$.

Odatle zaključujemo da je $T_1 = \left(\frac{\pi}{4}, p\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije p, a $T_2 = \left(\frac{5}{4} \cdot \pi, p\left(\frac{5}{4} \cdot \pi\right)\right) = \left(\frac{5}{4} \cdot \pi, -\sqrt{2}\right)$ točka lokalnoga minimuma funkcije p.

12. Neka su x i y redom duljina, odnosno širina gradilišta. Zbog toga je površina gradilišta $P = x \cdot y$. Ta površina mora biti jednaka 1 ha = 10 000 m^2, pa dobivamo jednakost:

$$x \cdot y = 10000.$$

Nadalje, za ograđivanje gradilišta će se potrošiti najmanje materijala ako opseg gradilišta bude minimalan. Opseg pravokutnika čije su duljine stranica x i y dan je formulom

$$O = 2 \cdot x + 2 \cdot y\,.$$

Tako smo dobili sljedeći optimizacijski problem:

minimizirati $O = 2 \cdot x + 2 \cdot y$
pod uvjetima
$x \cdot y = 10000,$
$x, y > 0.$

Posljednji uvjet moramo nadopisati jer je iz prirode problema jasno da nije moguće da x i y budu nepozitivni realni brojevi.

Ovaj optimizacijski problem rješavamo svođenjem na problem određivanja globalnoga ekstrema funkcije jedne realne varijable. Iz uvjeta $x \cdot y = 10000$ izrazimo npr. varijablu y:

$$y = \frac{10000}{x}.$$

Uvrstimo li taj izraz u funkciju čiji globalni minimum tražimo, dobit ćemo:

$$O = O(x) = 2 \cdot x + \frac{20000}{x}.$$

Zbog uvjeta $x > 0$, domena ove funkcije je $\mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty \rangle$, pa tražimo globalni minimum funkcije O na ovom skupu. Postupamo na uobičajen način:

$$O'(x) = 2 - \frac{20000}{x^2},$$

$$O'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{20000}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 10000 \Rightarrow x = 100.$$

Analogno kao u zadatku 3., lako provjerimo da funkcija O strogo pada na intervalu $\langle 0,\ 100\rangle$ (npr. uzmemo $x = 1$ i dobijemo $O'(1) = -19998 < 0$), a strogo raste na intervalu $\langle 100,\ +\infty\rangle$ (uzmemo npr. $x = 200$ i dobijemo $O'(200) = 1.5 > 0$). Zbog toga funkcija O ima *lokalni* minimum za $x = 100$.

Međutim, mi tražimo *globalni* minimum te funkcije. Iz zaključka da funkcija O strogo pada na intervalu $\langle 0,\ 100\rangle$ slijedi da za svaki $x \in \langle 0,100\rangle$ vrijedi nejednakost $O(x) > O(100)$, a iz zaključka da funkcija O strogo raste na intervalu $\langle 100,\ +\infty\rangle$ slijedi da za svaki $x > 100$ vrijedi nejednakost $O(100) < O(x)$.

Iz tih dviju nejednakosti zaključujemo da za svaki $x \in \langle 0,+\infty\rangle = D(O)$ (domena funkcije O) vrijedi nejednakost $O(x) > O(100)$, pa O doista ima globalni minimum za $x = 100$.

Dakle, optimalna vrijednost duljine gradilišta je $x^* = 100$ metara. Lako izračunamo:

$$y^* = \frac{10000}{x^*} = \frac{10000}{100} = 100 \text{ metara.}$$

Prema tome, optimalno je da gradilište bude kvadrat stranice 100 metara.

13.

a) $$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot(x-\operatorname{arctg} x)}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3\cdot(x-\operatorname{arctg} x)\right)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)}{3\cdot x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0} = 1;$$

b) $$L_2 = \lim_{y\to 0}\frac{2\cdot(e^{\cos y}-e)}{\sin^2 y} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{y\to 0}\frac{\left(2\cdot(e^{\cos y}-e)\right)'}{(\sin^2 y)'} = \lim_{y\to 0}\frac{2\cdot e^{\cos y}\cdot(-\sin y)}{2\cdot\sin y\cdot\cos y} = \lim_{y\to 0}\frac{-e^{\cos y}}{\cos y} = \frac{-e^{\cos 0}}{\cos 0} = \frac{-e^1}{1} = -e;$$

c) $$L_3 = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2+t+1}{e^t} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} = \lim_{t\to+\infty}\frac{(t^2+t+1)'}{(e^t)'} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2\cdot t+1}{e^t} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} = \lim_{t\to+\infty}\frac{(2\cdot t+1)'}{(e^t)'} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2}{e^t} = 0;$$

d) $$L_4 = \lim_{w\to-\infty}\frac{e^{2\cdot w}}{w^3-w^2+w-1} = \left\{\frac{0}{-\infty}\right\} = \lim_{w\to-\infty}\frac{(e^{2\cdot w})'}{(w^3-w^2+w-1)'} = \lim_{w\to-\infty}\frac{2\cdot e^{2\cdot w}}{3\cdot w^2-2\cdot w+1} = \left\{\frac{0}{+\infty}\right\} =$$

$$= \lim_{w\to-\infty}\frac{(2\cdot e^{2\cdot w})'}{(3\cdot w^2-2\cdot w+1)'} = \lim_{w\to-\infty}\frac{4\cdot e^{2\cdot w}}{6\cdot w-2} = \left\{\frac{0}{-\infty}\right\} = \lim_{w\to-\infty}\frac{(4\cdot e^{2\cdot w})'}{(6\cdot w-2)'} = \lim_{w\to-\infty}\frac{8\cdot e^{2\cdot w}}{6} = \frac{8\cdot 0}{6} = 0.$$

14.a) Primijetimo da je $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Odredimo $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=+\infty$ i $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, pa zaključujemo da je os apscisa uspravna asimptota na graf funkcije *f*. Nadalje, lako vidimo da vrijedi jednakost $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-\frac{1}{x^2}\right)=\pm\infty$, pa zaključujemo da graf funkcije *f* nema nijednu kosu asimptotu.

Za određivanje intervala konveksnosti, intervala konkavnosti i točke pregiba potrebno je odrediti drugu derivaciju zadane funkcije. Imamo:

$$f'(x)=2\cdot x+\frac{1}{x^2},$$
$$f''(x)=2-\frac{2}{x^3}=\frac{2\cdot x^3-2}{x^3}=\frac{2\cdot(x^3-1)}{x^3}=\frac{2\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x^3}.$$

Uočimo da za svaki $x\in D(f)$ vrijedi nejednakost $x^2+x+1>0$. Naime, pripadna kvadratna jednadžba nema realnih rješenja, koeficijent uz x^2 je strogo pozitivan (i jednak 1), pa izraz poprima samo strogo pozitivne vrijednosti. Zbog toga je predznak druge derivacije funkcije *f* jednak predznaku izraza $\frac{x-1}{x^3}$.

Iz nejednadžbe $f''(x)>0$ slijedi $\begin{cases}x-1>0,\\ x^3>0\end{cases}$ ili $\begin{cases}x-1<0,\\ x^3<0\end{cases}$, odnosno $\begin{cases}x>1,\\ x>0\end{cases}$ ili $\begin{cases}x<1,\\ x<0\end{cases}$.
Zbog toga je skup svih rješenja te nejednadžbe $\langle-\infty,0\rangle\cup\langle 1,+\infty\rangle$. Intervali $\langle-\infty,0\rangle$ i $\langle 1,+\infty\rangle$ su pravi podskupovi skupa $D(f)$, pa su oni ujedno i svi intervali konveksnosti funkcije *f*.

Iz nejednadžbe $f''(x)<0$ slijedi $\begin{cases}x-1>0,\\ x^3<0\end{cases}$ ili $\begin{cases}x-1<0,\\ x^3>0\end{cases}$, odnosno $\begin{cases}x>1,\\ x<0\end{cases}$ ili $\begin{cases}x<1,\\ x>0\end{cases}$.
Zbog toga je skup svih rješenja te nejednadžbe $\langle 0,1\rangle$. Taj interval je pravi podskup skupa $D(f)$, pa je taj interval ujedno i jedini interval konkavnosti funkcije *f*.

Iz navedenih razmatranja zaključujemo da je $T=(1,f(1))=(1,0)$ jedina točka pregiba grafa funkcije *f*.

b) Primijetimo da je $D(g)=\langle 0,+\infty\rangle$. Računamo:

$$\lim_{t\to 0+} g(t)=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{6\cdot\ln t}{5\cdot t^2}\right)=\left\{\frac{-\infty}{0}\right\}=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{6\cdot\frac{1}{t}}{5\cdot 2\cdot t}\right)=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{3}{5\cdot t^2}\right)=+\infty\ ,$$

pa zaključujemo da je os ordinata (os y) uspravna asimptota na graf funkcije g.

Zbog $D(g)=\langle 0,+\infty\rangle$, graf funkcije g može imati samo desnu kosu asimptotu. Zbog toga računamo:

$$k=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{g(t)}{t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{6\cdot\ln t}{5\cdot t^3}\right)=\left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{6\cdot\frac{1}{t}}{5\cdot 3\cdot t^2}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{5\cdot t^3}\right)=0,$$

$$l=\lim_{t\to+\infty}\left(g(t)-k\cdot t\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{6\cdot\ln t}{5\cdot t^2}\right)=\left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{6\cdot\frac{1}{t}}{5\cdot 2\cdot t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{3}{5\cdot t^2}\right)=0.$$

Zaključujemo da je os apscisa, tj. pravac $y=0$, desna vodoravna asimptota.

Za određivanje intervala konveksnosti, intervala konkavnosti i točke pregiba potrebno je odrediti drugu derivaciju zadane funkcije. Imamo:

$$g'(t)=\frac{6-12\cdot\ln t}{5\cdot t^3},$$
$$g''(t)=\frac{36\cdot\ln t-30}{5\cdot t^4}=\frac{6\cdot(6\cdot\ln t-5)}{5\cdot t^4}.$$

Primijetimo da za svaki $t\in D(g)=\langle 0,+\infty\rangle$ vrijedi nejednakost $\frac{6}{5\cdot t^4}>0$. Zbog toga je predznak druge derivacije funkcije g jednak predznaku izraza $6\cdot\ln t-5$.

Iz nejednadžbe $6\cdot\ln t-5>0$ slijedi $t>e^{\frac{5}{6}}$, pa je interval konveksnosti $\left\langle e^{\frac{5}{6}},+\infty\right\rangle$.

Iz nejednadžbe $6\cdot\ln t-5<0$ slijedi $t<e^{\frac{5}{6}}$, pa je interval konveksnosti $\left\langle 0,\ e^{\frac{5}{6}}\right\rangle$.

Odatle slijedi da je $T=\left(e^{\frac{5}{6}},g\left(e^{\frac{5}{6}}\right)\right)=\left(e^{\frac{5}{6}},e^{-\frac{5}{3}}\right)$ jedina točka pregiba grafa funkcije g.

c) Primijetimo da je $D(h)=\mathbb{R}$, pa graf funkcije h nema uspravnu asimptotu. Računamo:

$$k=\lim_{y\to\pm\infty}\left(\frac{h(y)}{y}\right)=\lim_{y\to\pm\infty}\left(\frac{e^{-2\cdot y^2}}{y}\right)=\lim_{y\to\pm\infty}\left(\frac{1}{y\cdot e^{2\cdot y^2}}\right)=0,$$
$$l=\lim_{y\to\pm\infty}\left(h(y)-k\cdot y\right)=\lim_{y\to\pm\infty}\left(e^{-2\cdot y^2}\right)=\lim_{y\to\pm\infty}\left(\frac{1}{e^{2\cdot y^2}}\right)=0,$$

pa zaključujemo da je os apscisa obostrana vodoravna asimptota na graf funkcije *h*.

Za određivanje intervala konveksnosti, intervala konkavnosti i točke pregiba potrebno je odrediti drugu derivaciju zadane funkcije. Primjenom pravila za deriviranje umnoška i pravila za deriviranje složene funkcije dobivamo:

$$h'(y) = (-4\cdot y)\cdot e^{-2\cdot y^2},$$
$$h''(y) = -4\cdot e^{-2\cdot y^2} + 16\cdot y^2\cdot e^{-2\cdot y^2} = 4\cdot e^{-2\cdot y^2}\cdot(4\cdot y^2 - 1).$$

Primijetimo da za svaki $y\in\mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $4\cdot e^{-2\cdot y^2} > 0$. To znači da je predznak druge derivacije zadane funkcije jednak predznaku izraza $4\cdot y^2 - 1$.

Iz nejednadžbe $4\cdot y^2 - 1 > 0$ slijedi $y\in\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] = \left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$. To znači da su $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$ i $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$ svi intervali konveksnosti funkcije *h*.

Iz nejednadžbe $4\cdot y^2 - 1 < 0$ slijedi $y\in\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$. To znači da je $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ jedini interval konkavnosti funkcije *h*.

Tako zaključujemo da su $T_1 = \left(-\frac{1}{2}, h\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ i $T_2 = \left(\frac{1}{2}, h\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ sve točke pregiba grafa funkcije *h*.

15. Jakost struje (u trenutku *t* sekundi) je derivacija količine naboja po vremenu. Lako nalazimo:

$$I(t) = Q'(t) = 3\cdot t^2 - 6\cdot t + 6.$$

I je kvadratna funkcija koja ima strogo pozitivan koeficijent uz t^2. Zbog toga ta funkcija ima globalni minimum. Odredimo taj minimum:

$$I'(t) = 6\cdot t - 6,$$
$$I''(t) = 6.$$

Iz jednadžbe $I'(t) = 0$ slijedi $6\cdot t - 6 = 0$, odnosno $t = 1$. Očito je $I''(1) = 6 > 0$, pa je doista riječ o globalnom minimumu. Taj minimum iznosi $I(1) = 3 - 6 + 6 = 3$. Dakle, u trenutku $t = 1$ vodičem će teći struja najmanje jakosti i ta jakost iznosi $I(1) = 3$ A.

16. a) Tražena vrijednost jednaka je broju bakterija u trenutku $t=0$, a taj je jednak $N_0 = N(0) = 100.$

b) Dvaput deriviramo funkciju N i pojednostavnimo dobiveno pravilo što više možemo. Dobivamo:

$$N'(t) = \frac{630 \cdot e^{0.07 \cdot t}}{\left(e^{0.07 \cdot t} + 9\right)^2} > 0, \ \forall t \geq 0,$$

$$N''(t) = \frac{44.1 \cdot e^{0.07 \cdot t} \cdot \left(9 - e^{0.07 \cdot t}\right)}{\left(e^{0.07 \cdot t} + 9\right)^3}.$$

Odatle zaključujemo da N raste na $\langle 0, +\infty \rangle$ i da je točka najbržega rasta jednaka globalnom maksimumu funkcije N'.

Iz $N''(t) = 0$ slijedi $e^{0.07 \cdot t} - 9 = 0$, odnosno $t_0 = \frac{200}{7} \cdot \ln 3 \approx 31.38892.$ Uzmemo $t_1 = 31$ i $t_2 = 32$, pa lako odredimo:

$$N''(31) > 0, \ \ N''(32) < 0.$$

Dakle, N' raste na intervalu $\langle 0, t_0 \rangle$, a pada na intervalu $\langle t_0, +\infty \rangle$, pa ta funkcija za $t_0 = \frac{200}{7} \cdot \ln 3$ ima lokalni i globalni maksimum. Lako izračunamo: $N(t_0) \approx 500.$ Tako zaključujemo da broj bakterija najbrže raste u trenutku $t_0 = \frac{200}{7} \cdot \ln 3$ i u tom trenutku taj broj iznosi 500.

c) Odmah imamo:

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1000}{1 + 9 \cdot e^{-0.07 \cdot t}} = \frac{1000}{1 + 9 \cdot 0} = 1000.$$

To znači da će, računajući od početnoga trenutka, što vrijeme više bude odmicalo, broj bakterija u kulturi biti sve bliži 1000.

17. Odredimo najprije vrijednost nepoznatoga parametra a. Prema podacima u zadatku vrijedi jednakost $f(-1) = 0$, pa uvrštavanjem $x = -1$ u pravilo funkcije f dobivamo:

$$(-1)^2 + \frac{a}{-1} = 0 \Leftrightarrow -a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Dakle, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

Očito je $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pa je pravac $x=0$ uspravna asimptota na graf funkcije *f*. Iz

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=\pm\infty$$

zaključujemo da graf funkcije *f* nema nijednu kosu asimptotu.

(**Napomena**: Isti zaključak možemo izvesti i tako da uočimo da neprava racionalna funkcija ima kosu (uključivo i vodoravnu) asimptotu ako i samo ako je razlika stupnja brojnika i stupnja nazivnika jednaka ili manja od 1. U ovome je slučaju ta razlika jednaka $3-1=2>1$, pa slijedi zaključak.)

Odredimo drugu derivaciju funkcije *f*. Imamo redom:

$$f'(x)=2\cdot x-\frac{1}{x^2},$$
$$f''(x)=2+\frac{2}{x^3}.$$

Iz $f''(x)=0$ dobivamo jednadžbu $2\cdot x^3+2=0$. Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $x=-1$. Zbog toga funkciju f'' promatramo na intervalima $\langle-\infty,-1\rangle$ i $\langle-1,0\rangle$.

Odaberemo $x=-2$, pa izračunamo $f''(-2)=\frac{7}{4}>0$. Dakle, *f* je konveksna na $\langle-\infty,-1\rangle$.

Odaberemo $x=-\frac{1}{2}$, pa izračunamo $f''\left(-\frac{1}{2}\right)=-14<0$. Dakle, *f* je konkavna na $\langle-1,0\rangle$.

Odatle slijedi da je $T=(-1,f(-1))=(-1,0)$ jedina točka pregiba grafa funkcije *f*.

18. Odredimo najprije vrijednost nepoznatoga parametra *a*. Prema podacima u zadatku vrijedi jednakost $g(0)=e$, pa uvrštavanjem $x=0$ u pravilo funkcije *f* dobivamo:

$$e^{a-0^2}=e\Leftrightarrow e^a=e\Leftrightarrow a=1.$$

Dakle, $g(x)=e^{1-x^2}$. Primijetimo da je $D(g)=\mathbb{R}$, što znači da graf funkcije *g* nema uspravnih asimptota.

Odredimo prve dvije derivacije funkcije *g*. Imamo redom:

$$g'(x)=e^{1-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)'=-2\cdot x\cdot e^{1-x^2},$$
$$g''(x)=-2\cdot e^{1-x^2}+(-2)\cdot x\cdot(-2)\cdot x\cdot e^{1-x^2}=2\cdot\left(2\cdot x^2-1\right)\cdot e^{1-x^2}.$$

Iz jednadžbe $g'(x)=0$, zbog nejednakosti $-2\cdot e^{1-x^2}<0, \forall x\in\mathbb{R}$, slijedi $x=0$. Očito je $g''(0)=-2\cdot e<0$, pa zaključujemo da je $T=(0,g(0))=(0,e)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije g.

Iz nejednadžbe $g'(x)>0$, zbog nejednakosti $-2\cdot e^{1-x^2}<0, \forall x\in\mathbb{R}$, slijedi $x<0$. Dakle, g raste na intervalu $\langle -\infty,0\rangle$. Analogno zaključujemo da g pada na intervalu $\langle 0,+\infty\rangle$. To znači da je T točka globalnoga maksimuma funkcije g.

Iz jednadžbe $g''(x)=0$, zbog nejednakosti $2\cdot e^{1-x^2}>0, \forall x\in\mathbb{R}$, slijedi $2\cdot x^2-1=0$. Sva realna rješenja te jednadžbe su $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Zbog toga promatramo funkciju g'' na intervalima $\left\langle -\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$ i $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right\rangle$.

Odaberemo $x=-1$, pa izračunamo $g''(-1)=2>0$. Dakle, g je konveksna na $\left\langle -\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$.

Odaberemo $x=0$, pa izračunamo $g''(0)=-2\cdot e<0$. Dakle, g je konkavna na $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$.

Odaberemo $x=1$, pa izračunamo $g''(1)=2>0$. Dakle, g je konveksna na $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right\rangle$.

Odatle slijedi da su $T_1=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$ i $T_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$ točke pregiba grafa funkcije g.

Naposljetku, primijetimo da vrijedi jednakost:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\left\{e^{-\infty}\right\}=0,$$

pa zaključujemo da je os apscisa jedina obostrana vodoravna asimptota na graf funkcije g.

10. GRUPA ZADATAKA

1.

a) $L_1=\lim\limits_n a_n=\lim\limits_n\left(\dfrac{11\cdot\left((2\cdot n-1)^2-(n+1)\cdot(3\cdot n-2)\right)}{(3\cdot n-2)^2+(n+1)\cdot(2\cdot n-1)}\right)=\lim\limits_n\left(\dfrac{11\cdot(4\cdot n^2-4\cdot n+1-3\cdot n^2-3\cdot n+2\cdot n+2)}{9\cdot n^2-12\cdot n+4+2\cdot n^2+2\cdot n-n-1}\right)=$

$$=\lim_n\left(\frac{11\cdot(n^2-5\cdot n+3)}{11\cdot n^2-11\cdot n+3}\right)=\lim_n\left(\frac{11\cdot n^2-55\cdot n+33}{11\cdot n^2-11\cdot n+3}\right)=\lim_n\left(\frac{11-\frac{55}{n}+\frac{33}{n^2}}{11-\frac{11}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)=\frac{11-0+0}{11-0+0}=\frac{11}{11}=1.$$

b) $L_2=\lim\limits_n b_n=\lim\limits_n\left(14\cdot n\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{7\cdot n}\right)\right)=\lim\limits_n\left(14\cdot\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{7\cdot n}\right)^n\right)\right)=14\cdot\ln\left(\lim\limits_n\left(\left(1+\dfrac{\frac{1}{7}}{n}\right)^n\right)\right)=14\cdot\ln\left(e^{\frac{1}{7}}\right)=14\cdot\dfrac{1}{7}=2.$

c) Zamijenimo $t:=2\cdot n+5$. Tada su $2\cdot n+3=t-2$ i $2\cdot n=t-5$. Kad $n\to+\infty$, onda $t\to+\infty$. Tako imamo:

$$L_3=e^2\cdot\lim_t\left(\frac{t-2}{t}\right)^{t-5}=e^2\cdot\lim_t\left(1-\frac{2}{t}\right)^{t-5}=e^2\cdot\left(\lim_t\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^t\right)\right)\cdot\left(\lim_t\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^{-5}\right)\right)=e^2\cdot e^{-2}\cdot 1^{-5}=1\cdot 1=1.$$

2. **a)** Svaki član razlomka kojim je definiran niz podijelimo s n. Dobivamo:

$$L=\lim_n\left(\frac{6-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)=\frac{6-0}{3+0}=-2.$$

b) Riješimo nejednadžbu $|a_k-L|<10^{-5}$ po nepoznanici k. Imamo redom:

$$\left|\frac{6\cdot k-1}{3\cdot k+1}-2\right|<10^{-5},$$

$$\left|\frac{6\cdot k-1-2\cdot(3\cdot k+1)}{3\cdot k+1}\right|<10^{-5},$$

$$\left|\frac{6\cdot k-1-6\cdot k-2}{3\cdot k+1}\right|<10^{-5},$$

$$\left|\frac{-3}{3\cdot k+1}\right|<10^{-5},$$

$$\frac{|-3|}{\left|\underbrace{3\cdot k+1}_{>0}\right|}<10^{-5},$$

$$\frac{3}{3\cdot k+1}<10^{-5},$$

$$3\cdot k+1>\frac{3}{10^{-5}}=3\cdot 10^5,$$

$$k>\frac{3\cdot 10^5-1}{3}=99\,999.\dot{6}$$

Najmanji $k\in\mathbb{N}$ koji zadovoljava posljednju nejednakost je $k_{\min}=100\,000$.

3. „Kritične“ točke su $w=0$ i $w=2$. Za $w=0$ imamo:

$$L_1=\lim_{w\to 0-} g(w)=\lim_{w\to 0-}\frac{\operatorname{tg} w-w}{2\cdot(w-\sin w)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0-}\frac{(\operatorname{tg} w-w)'}{[2\cdot(w-\sin w)]'}=\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{1}{\cos^2 w}-1}{2\cdot(1-\cos w)}=$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{1-\cos^2 w}{\cos^2 w}}{2\cdot(1-\cos w)}=\lim_{x\to 0-}\frac{(1-\cos w)\cdot(1+\cos w)}{2\cdot(1-\cos w)\cdot\cos^2 w}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos w}{2\cdot\cos^2 w}=\frac{1+1}{2\cdot 1}=\frac{2}{2}=1,$$

$$L_2=\lim_{w\to 0+} g(w)=\lim_{w\to 0+}(\alpha\cdot w+\beta)=\alpha\cdot 0+\beta=\beta,$$

$$g(0)=\alpha\cdot 0+\beta=\beta,$$

pa izjednačavanjem odmah slijedi $\beta=1$.

Za $w=2$ imamo:

$$L_1=\lim_{w\to 2-} g(w)=\lim_{w\to 2-}(\alpha\cdot w+\beta)=2\cdot\alpha+\beta,$$

$$L_2=\lim_{x\to 2+} g(w)=\lim_{w\to 2+}\frac{\ln(w-1)}{2-w}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{w\to 2+}\frac{[\ln(w-1)]'}{(2-w)'}=\lim_{w\to 2+}\frac{\frac{1}{w-1}\cdot(w-1)'}{0-1}=$$

$$=\lim_{w\to 2+}\frac{\frac{1}{w-1}\cdot 1}{-1}=\lim_{w\to 2+}\frac{1}{1-w}=\frac{1}{1-2}=-1,$$

$$g(2)=\alpha\cdot 2+\beta=2\cdot\alpha+\beta.$$

pa izjednačavanjem desnih strana dobijemo $2\cdot\alpha+\beta=-1$. Tako smo dobili sustav:

$$\begin{cases}\beta=1,\\ 2\cdot\alpha+\beta=-1\end{cases}$$

čije rješenje je $(\alpha,\beta)=(-1,1)$.

4. Uočimo da je $D(q)=[-6,2]$. Odredimo stacionarne točke funkcije q. Imamo redom:

$$q'(\varepsilon)=0$$
$$3\cdot\varepsilon^2-75=0,$$
$$\varepsilon^2=25.$$

Jedino rješenje ove jednadžbe koje pripada skupu $[-2,6]$ je $\varepsilon=-5$. Preostaje izračunati:

$$q(-6)=(-6)^3-75\cdot(-6)=234,$$
$$q(-5)=(-5)^3-75\cdot(-5)=250,$$
$$q(2)=2^3-75\cdot 2=-142.$$

Dakle, najmanja vrijednost funkcije q iznosi -142 i postiže se za $\varepsilon = 2$. Najveća vrijednost funkcije q iznosi 250 i postiže se za $\varepsilon = -5$.

5. Odredimo najprije prirodnu domenu zadane funkcije. Izraz pod drugim korijenom treba biti nenegativan, pa dobivamo nejednadžbu:

$$2 \cdot w - w^2 \geq 0.$$

Skup svih rješenja te jednadžbe je segment $[0,2]$. Nađimo prvu derivaciju zadane funkcije:

$$h'(w) = \left(\left(2 \cdot w - w^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot w - w^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(2 \cdot w - w^2\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot w - w^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 - 2 \cdot w) =$$

$$= \left(2 \cdot w - w^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - w) = \frac{1 - w}{\left(2 \cdot w - w^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1 - w}{\sqrt{2 \cdot w - w^2}}.$$

Izjednačavanjem prve derivacije s nulom dobivamo:

$$1 - w = 0 \Leftrightarrow w = 1.$$

Preostaje izračunati:

$$h(0) = h(2) = 0,$$
$$h(1) = 1.$$

Dakle, najmanja vrijednost funkcije h jednaka je 0, dok je njezina najveća vrijednost jednaka 1.

6. Izračunajmo koordinate točke krivulje K koja odgovara parametru $t = 0$. Imamo:

$$\begin{cases} x = 0 + \sin 0 = 0 + 0 = 0, \\ y = 2 \cdot (0 - \cos 0) = 2 \cdot (0 - 1) = -2, \end{cases}$$

pa je $T = (0, -2)$. Koeficijent smjera tangente povučene na krivulju K u točki T jednak je:

$$k_t = \left(\frac{y'}{x'}\right)_{t=0} = \left(\frac{2 \cdot (t - \cos t)'}{(t + \sin t)'}\right)_{t=0} = \left(\frac{2 \cdot (1 - (-\sin t))}{1 + \cos t}\right)_{t=0} = \left(\frac{2 \cdot (1 + \sin t)}{1 + \cos t}\right)_{t=0} = \frac{2 \cdot (1 + \sin 0)}{1 + \cos 0} = \frac{2 \cdot (1 + 0)}{1 + 1} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Zbog toga je jednadžba te tangente zapisana u segmentnom obliku:

$$y = 1 \cdot (x - 0) - 2,$$
$$y = x - 2,$$

$$-x+y=-2, \quad /:(-2)$$

$$t\ldots\ \frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1$$

Koeficijent smjera normale povučene na krivulju K u točki T jednak je

$$k_n=-\frac{1}{k_t}=-\frac{1}{1}=-1,$$

pa jednadžba te normale zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$y=(-1)\cdot(x-0)-2,$$

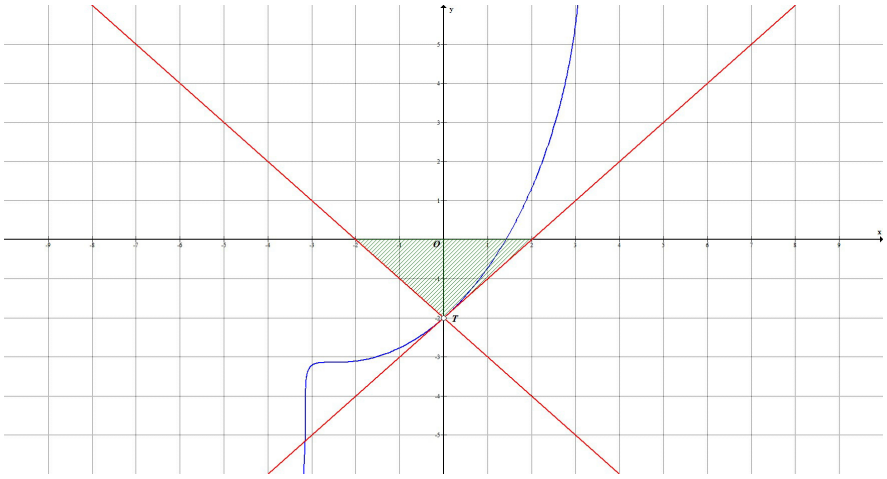
$$y=-x-2,$$

$$x+y=-2, \quad /:(-2)$$

$$n\ldots\ \frac{x}{-2}+\frac{y}{-2}=1$$

Nacrtajmo oba pravca u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 19. Iz slike vidimo da oba pravca s osi apscisa zatvaraju trokut čiji su vrhovi točka T, točka (–2, 0) i točka (2, 0). Duljina jedne osnovice toga trokuta jednaka je udaljenosti između točaka (-2, 0) i (2, 0). Ta udaljenost iznosi 4 jed. Duljina visine povučene na tu osnovicu jednaka je udaljenosti ishodišta i točke T. Ta udaljenost iznosi 2 jed. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4 \text{ kv. jed.}$$



Slika 19.

7. Nepoznatu ordinatu točke T dobivamo tako da u jednadžbu krivulje K uvrstimo $x=-1$. Lako izračunamo $T=(-1,-1)$. Koeficijent smjera tangente t povučene na krivulju K u točki T jednak je:

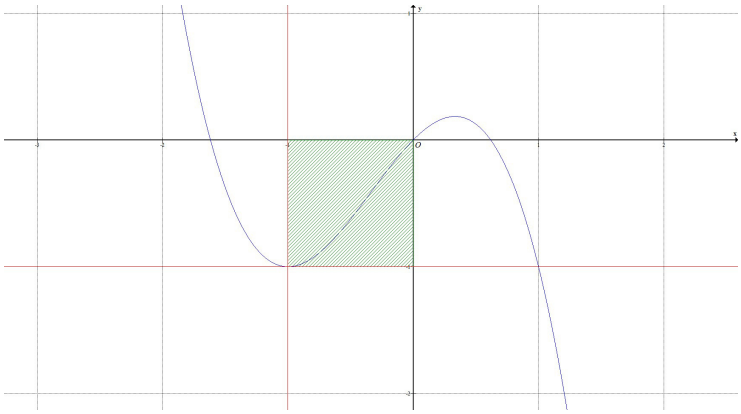
$$k_t = \left(\left(-x^3 - x^2 + x\right)'\right)_{x=-1} = \left(-3\cdot x^2 - 2\cdot x + 1\right)_{x=-1} = -3\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 1 = 0.$$

Zbog toga su jednadžbe tangente t, odnosno normale n, povučenih na krivulju K u točki T:

$$t\ldots\ y = -1 \quad n\ldots\ x = -1$$

Nacrtajmo pravce t i n u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 20. Iz slike vidimo da pravci t i n zajedno s objema koordinatnim osima zatvaraju kvadrat čiji su vrhovi (–1, 0), O, (0, 1) i T. Duljina stranice toga kvadrata iznosi $a = 1$. Zbog toga je tražena površina jednaka

$$P = a^2 = 1 \text{ kv. jed.}$$



Slika 20.

8. 1. rješenje: Neka je $t\ldots\ \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ tangenta sa zadanim svojstvom. Iz zadanih podataka slijedi $\frac{|m\cdot n|}{2} = 2$, odnosno $|m\cdot n| = 4$.

Uvjet tangencijalnosti pravca $p_1\ldots\ y = k\cdot x + l$ i parabole $y^2 = 2\cdot p\cdot x$ je $2\cdot k\cdot l = p$. U našem slučaju iz $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ slijedi $y = -\frac{n}{m}\cdot x + 1$, pa su $k = -\frac{n}{m}$, $l = n$, te $p = \frac{1}{2}$. Uvrštavanjem tih triju izraza u uvjet tangencijalnosti dobijemo:

$$2\cdot\left(-\frac{n}{m}\right)\cdot n = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -4\cdot n^2.$$

Uvrštavanjem toga izraza u izraz $|m\cdot n| = 4$ dobivamo:

$$\left|-4\cdot n^2\cdot n\right| = 4 \Rightarrow |-4|\cdot\left|n^3\right| = 4 \Rightarrow 4\cdot|n|^3 = 4 \Rightarrow |n|^3 = 1 \Rightarrow |n| = 1 \Rightarrow n_1 = -1,\ n_2 = 1.$$

Zbog toga su $m_1 = m_2 = -4 \cdot 1 = -4$. Dakle, tangente koje imaju svojstvo iz zadatka su:

$$t_1 \ldots \frac{x}{-4} + \frac{y}{1} = 1 \text{ i } t_2 \ldots \frac{x}{-4} + \frac{y}{-1} = 1.$$

Preostaje odrediti njihova sjecišta sa zadanom parabolom. U tu svrhu riješimo sustave:

$$\begin{cases} \frac{x}{-4} + \frac{y}{1} = 1, \\ y^2 = x, \end{cases} \text{ i } \begin{cases} \frac{x}{-4} + \frac{y}{-1} = 1, \\ y^2 = x. \end{cases}$$

U obama slučajevima drugu jednadžbu sustava uvrstimo u prvu jednadžbu i dobiveni izraz pomnožimo s (–4).

U prvom se slučaju dobije jednadžba $y^2 - 4 \cdot y + 4 = 0$ čije je jedino rješenje $y = 2$. Uvrštavanjem te vrijednosti u drugu jednadžbu odmah slijedi $x = 4$.

Analogno, u drugom slučaju se dobije jednadžba $y^2 + 4 \cdot y + 4 = 0$ čije je jedino rješenje $y = -2$. Uvrštavanjem te vrijednosti u drugu jednadžbu opet slijedi $x = 4$ (što smo mogli i očekivati zbog simetričnosti zadane parabole s obzirom na os apscisa).

Dakle, tražene točke su $T_1 = (4, 2)$ i $T_2 = (4, -2)$.

2. rješenje: Neka je $T = (x_T, y_T) \in K$ točka sa svojstvom iz zadatka. Koeficijent smjera tangente t povučene na krivulju K u točki T dobijemo deriviranjem izraza za K kao implicitno zadane funkcije:

$$2 \cdot y \cdot y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2 \cdot y}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je jednadžba tangente t zadana u segmentnom obliku:

$$t \ldots \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Zbog uvjeta da površina trokuta kojega tangenta t zatvara s objema koordinatnim osima jednaka 4 moraju vrijediti nejednakosti $m, n \neq 0$. Iz gornje jednakosti lako slijedi da je koeficijent smjera tangente t jednak:

$$k_t = -\frac{n}{m}.$$

Tako dobivamo sljedeći sustav četiriju jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\begin{cases} y_T^2 = x_T, \\ -\dfrac{n}{m} = \dfrac{1}{2\cdot y_T}, \\ \dfrac{1}{2}\cdot|mn| = 2, \\ \dfrac{x_T}{m} + \dfrac{y_T}{n} = 1. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe slijedi

$$n = -\frac{m}{2\cdot y_T}.$$

Uvrštavanjem te jednakosti u četvrtu jednadžbu dobijemo:

$$\frac{x_T}{m} - \frac{2\cdot y_T^2}{m} = 1 \overset{\text{zbog (1)}}{\Rightarrow} \frac{x_T}{m} - \frac{2\cdot x_T}{m} = 1 \Leftrightarrow m = -x_T \Rightarrow n = \frac{x_T}{2\cdot y_T}.$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza za m i n u treću jednadžbu dobijemo:

$$\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{x_T^2}{2\cdot y_T}\right| = 2 \overset{\text{zbog (1)}}{\Rightarrow} \left|-\frac{y_T^4}{2\cdot y_T}\right| = 4 \Rightarrow \left|-y_T^3\right| = 8 \Leftrightarrow \left|y_T^3\right| = 8 \Rightarrow \left|y_T\right| = 2 \Rightarrow (y_T)_1 = -2,\ (y_T)_2 = 2.$$

Uvrštavanjem tih vrijednosti u prvu jednadžbu sustava u oba slučaja slijedi $x_T = 4$. Dakle, tražene točke su $T_1 = (4,2)$. i $T_2 = (4,-2)$.

9. Odredimo prve dvije derivacije zadane funkcije. Imamo redom:

$$f'(x) = 864\cdot\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right) = 1728\cdot\frac{3-x}{x^4},$$
$$f''(x) = 1728\cdot\left(\frac{3}{x^4} - \frac{12}{x^5}\right) = 5184\cdot\frac{x-4}{x^5}.$$

Iz jednadžbe $f'(x) = 0$ slijedi $3 - x = 0$, odnosno $x = 3$. Očito je $f''(3) < 0$, pa zaključujemo da je $M = (3, f(3)) = (3,32)$ točka lokalnoga maksimuma funkcije *f*.

Iz jednadžbe $f''(x) = 0$ slijedi $x - 4 = 0$, odnosno $x = 4$. Očito su $f''(3) < 0$ i $f''(5) > 0$, pa zaključujemo da je $T = (4, f(4)) = (4,27)$ točka pregiba grafa funkcije *f*.

Preostaje odrediti asimptote. Uočimo da je $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pa graf zadane funkcije ima uspravnu asimptotu $x=0$ (os ordinata). Također, uočimo da je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=864\cdot(0-0)=0,$$

pa graf zadane funkcije ima (obostranu) vodoravnu asimptotu $y=0$ (os apscisa).

10. *Prirodna domena*: Iz uvjeta $x\neq 0$ slijedi $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Nultočke i sjecište s osi ordinata: Iz jednadžbe $f(x)=0$ slijedi $x=0$ jer je $e^{\frac{1}{x}}>0, \forall x\in D(f)$. No, $0\notin D(f)$, pa zaključujemo da graf funkcije f ne siječe nijednu koordinatnu os.

Točke prekida, parnost, neparnost, periodičnost: Funkcija f je umnožak polinoma 1. stupnja $\left(p_1(x)=x\right)$ i kompozicije eksponencijalne funkcije $e(x)=e^x$ i racionalne funkcije $f_1(x)=\frac{1}{x}$. Sve te funkcije su neprekidne na $D(f)$. Zbog toga je i zadana funkcija neprekidna na $D(f)$.

Također, $f(-x)=(-x)\cdot e^{-\frac{1}{x}}\neq \pm x\cdot e^{\frac{1}{x}}=\pm f(x)$, pa f nije ni parna, ni neparna. f je umnožak neperiodičnih funkcija, pa je i sama neperiodična.

Intervali monotonosti i lokalni ekstremi: Odredimo f'. Imamo:

$$f'(x)=(x)'\cdot e^{\frac{1}{x}}+x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=1\cdot e^{\frac{1}{x}}+x\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=e^{\frac{1}{x}}+x\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}=\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Riješimo jednadžbu $f'(x)=0$. Zbog $e^{\frac{1}{x}}>0, \forall x\in D(f)$, mora vrijediti $1-\frac{1}{x}=0$, odnosno $x-1=0$. Odatle je $x=1$. Dakle, stacionarna točka je $x=1$. Izborom $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$ i $x=2$ zaključujemo da je $f'(x)>0$ za $x\in\langle-\infty,0\rangle$ i za $x\in\langle 1,+\infty\rangle$, a da je $f'(x)<0$ za $x\in\langle 0,1\rangle$. Dakle, intervali rasta su $\langle-\infty,0\rangle$ i $\langle 1,+\infty\rangle$, a interval pada je $\langle 0,1\rangle$. Točka $T=(1,f(1))=(1,e)$ je točka strogoga lokalnoga minimuma funkcije *f*.

Intervali konkavnosti i konveksnosti, točke pregiba: Odredimo f''. Imamo:

$$f''(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)'\cdot e^{\frac{1}{x}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^3}\cdot e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^3}\cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Zbog $e^{\frac{1}{x}} > 0, \forall x \in D(f)$, jednadžba $f''(x) = 0$ nema realnih rješenja. Dakle, graf funkcije *f* nema nijednu točku pregiba. Izborom $x = -1$ i $x = 1$ zaključujemo da je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle 0, +\infty \rangle$, a da je $f''(x) < 0$ za $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$. Dakle, funkcija *f* je konveksna na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, a konkavna na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$.

<u>*Asimptote*</u>: Najprije provjerimo je li pravac $x = 0$, tj. os ordinata, asimptota na graf funkcije *f*. Računamo granične vrijednosti:

$$L_1 = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t = \frac{1}{x}, \\ \text{kad } x \to 0-, \text{ onda } t \to -\infty \end{array} \right\} = \lim_{t \to -\infty} \frac{e^t}{t} = \left\{ \frac{0}{-\infty} \right\} = \lim_{t \to -\infty} \frac{e^t}{1} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$L_2 = \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t = \frac{1}{x}, \\ \text{kad } x \to 0+, \text{ onda } t \to +\infty \end{array} \right\} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{1} = +\infty.$$

Odatle slijedi da je pravac $x = 0$ uspravna asimptota na graf funkcije *f*.

Ispitajmo ima li graf funkcije *f* kose asimptote. Računamo granične vrijednosti:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1,$$

$$l = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - k \cdot x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1) \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t = \frac{1}{x}, \\ \text{kad } x \to \pm\infty, \text{ onda } t \to 0 \end{array} \right\} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Dakle, obostrana kosa asimptota je pravac $y = x + 1$.

<u>*Graf*</u>: Na temelju prethodnih podataka crtamo graf funkcije *f*. Dobivamo sliku 17.

LITERATURA

1. B. Kovačić, L. Marohnić, T. Strmečki: *Repetitorij matematike za studente elektrotehnike*, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016. (javno dostupno na: http://bkovacic.weebly.com)

2. A. Aglić Aljinović et.al.: *Matematika* 1, Element, Zagreb, 2014.

3. S. Suljagić: *Matematika* 1, interna skripta, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003.

4. B. P. Demidovič: *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike*, Danjar, Zagreb, 1995.

5. V. P. Minorski: *Zbirka zadataka iz više matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1972.

6. I. Brnetić: *Matematička analiza* 1, zadaci s pismenih ispita, Element, Zagreb, 2005.