1. Opći član niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran je pravilom:

$$a_n = \frac{7-8\cdot n}{4\cdot n+3}\ .$$

a) Izračunajte graničnu vrijednost L zadanoga niza.

b) Odredite najmanji $k\in\mathbb{N}$ za koji je $|a_k - L| < 10^{-7}$ i objasnite značenje dobivenoga rezultata.

Rješenje: a) Podijelimo brojnik i nazivnik s n. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \left(\frac{\frac{7}{n} - \frac{8\cdot n}{n}}{\frac{4\cdot n}{n} + \frac{3}{n}} \right) = \\
&= \lim_n \left(\frac{-8+\frac{7}{n}}{4+\frac{3}{n}} \right) = \\
&= \frac{-8+0}{4+0} = \\
&= -2.
\end{aligned}$$

b) Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{7-8\cdot k}{4\cdot k+3} + 2 \right| < 10^{-7}, \\
&\left| \frac{7-8\cdot k + 2\cdot(4\cdot k+3)}{4\cdot k+3} \right| < 10^{-7}, \\
&\left| \frac{13}{4\cdot k+3} \right| < 10^{-7}, \\
&\frac{|13|}{|\underbrace{4\cdot k+3}_{>0}|} < 10^{-7}, \\
&\frac{13}{4\cdot k+3} < 10^{-7}, \\
&4\cdot k+3 > \frac{13}{10^{-7}}, \\
&4\cdot k > 13\cdot 10^{7} - 3, \\
&k > \frac{13\cdot 10^{7} - 3}{4}, \\
&k > 32\ 499\ 999.25.
\end{aligned}$$

(Primijenili smo jednakost:

$$|4 \cdot k + 3| = 4 \cdot k + 3, \ \forall k \in \mathbb{N} .$$

Ona vrijedi jer je izraz pod znakom apsolutne vrijednosti strogo pozitivan kad god je $k \in \mathbb{N}$.)

Najmanji prirodan broj koji zadovoljava dobivenu nejednakost je $k_{\min} = 32\ 500\ 000.$ To znači da se prvih 32 499 999 članova zadanoga niza nalazi *izvan* intervala $\langle -2 - 10^{-7}, -2 + 10^{-7} \rangle$, a da se svi članovi niza počevši od 32 500 000. nalaze *unutar* toga intervala.

2. Odredite graničnu vrijednost niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opći član definiran pravilom:

$$b_n = 4\cdot n\cdot(\ln 2+\ln n-\ln(2\cdot n-3)).$$

Rješenje: Koristeći osnovna svojstva logaritamske funkcije najprije imamo:

$$\begin{aligned} a_n &= 4\cdot n\cdot\ln\left(\frac{2\cdot n}{2\cdot n-3}\right)= \\ &= \ln\left(\left(\frac{2\cdot n}{2\cdot n-3}\right)^{4\cdot n}\right). \end{aligned}$$

Koristeći „komutativnost“ granične vrijednosti i neprekidne funkcije (u ovom slučaju, logaritamske funkcije) dalje slijedi:

$$\begin{aligned} L &= \lim_n b_n = \\ &= \lim_n\left(\ln\left(\left(\frac{2\cdot n}{2\cdot n-3}\right)^{4\cdot n}\right)\right)= \\ &= \ln\left(\lim_n\left(\left(\frac{2\cdot n}{2\cdot n-3}\right)^{4\cdot n}\right)\right). \end{aligned}$$

Odredimo graničnu vrijednost u okrugloj zagradi. Zamijenimo:

$$\begin{aligned} & t := 2\cdot n-3, \\ & 2\cdot n = t+3, \\ & 4\cdot n = 2\cdot(t+3) = 2\cdot t+6, \\ & \text{kad } n\to+\infty, \text{ onda } t\to+\infty. \end{aligned}$$

Ponovno koristeći „komutativnost“ granične vrijednosti i neprekidne funkcije (u ovom slučaju, eksponencijalne funkcije), te pravilo za određivanje granične vrijednosti umnoška u slučaju kad postoji granična vrijednost svakoga faktora, dobivamo:

$$\begin{aligned} \lim_n\left(\left(\frac{2\cdot n}{2\cdot n-3}\right)^{4\cdot n}\right) &= \lim_t\left(\left(\frac{t+3}{t}\right)^{2\cdot t+6}\right)= \\ &= \lim_t\left(\left(1+\frac{3}{t}\right)^{2\cdot t}\cdot\left(1+\frac{3}{t}\right)^{6}\right)= \\ &= \lim_t\left(\left(\left(1+\frac{3}{t}\right)^{t}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{3}{t}\right)^{6}\right)= \end{aligned}$$

$$= \left(\lim_t \left(\left(\left(1 + \frac{3}{t}\right)^t \right)^2 \right) \right) \cdot \left(\lim_t \left(\left(1 + \frac{3}{t}\right)^6 \right) \right) =$$

$$= \left(\lim_t \left(1 + \frac{3}{t}\right)^t \right)^2 \cdot \left(\lim_t \left(1 + \frac{3}{t}\right) \right)^6 =$$

$$= \left(e^3\right)^2 \cdot 1^6 =$$

$$= e^6 \cdot 1 =$$

$$= e^6.$$

Zbog toga je tražena granična vrijednost jednaka:

$$L = \ln\left(e^6\right) =$$

$$= 6.$$

3. Odredite graničnu vrijednost niza $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opći član definiran pravilom:

$$c_n = 7\cdot n - \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}.$$

Rješenje: Zadano pravilo svest ćemo na ekvivalentni oblik u kojemu ćemo moći primijeniti tabličnu graničnu vrijednost

$$\lim_n\left(\frac{a}{n^k}\right) = 0,\ \forall a\in\mathbb{R},\ \forall k>0.$$

U toj ćemo transformaciji koristiti formulu za razliku kvadrata

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Imamo redom:

$$L = \lim_n\left(\left(7\cdot n - \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}\right)\cdot\frac{\left(7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}\right)}{\left(7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}\right)}\right) =$$

$$= \lim_n\left(\frac{(7\cdot n)^2 - \left(\sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}\right)^2}{7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}}\right) =$$

$$= \lim_n\left(\frac{49\cdot n^2 - \left(49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29\right)}{7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}}\right) =$$

$$= \lim_n\left(\frac{28\cdot n - 29}{7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}}\right) =$$

$$= \lim_n\left(\frac{\dfrac{28\cdot n - 29}{n}}{\dfrac{7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}}{n}}\right) =$$

$$= \lim_n\left(\frac{28 - \dfrac{29}{n}}{7 + \sqrt{\dfrac{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}{n^2}}}\right) =$$

$$= \lim_n\left(\frac{28 - \dfrac{29}{n}}{7 + \sqrt{49 - \dfrac{28}{n} + \dfrac{29}{n^2}}}\right) =$$

$$= \frac{28-0}{7+\sqrt{49-0+0}} =$$

$$= \frac{28}{7+7} =$$

$$= 2.$$

4. Odredite graničnu vrijednost (limes) niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opći član definiran pravilom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{8 \cdot n}\right)^{4 \cdot n}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n a_n = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \cdot \left(\lim_n \left(\left(1 + \frac{\frac{1}{8}}{n} \right)^n \right) \right)^4 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{8}} \right)^4 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \cdot \sqrt{\mathrm{e}} = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

5. Odredite **površinu ravninskoga lika** kojega **sve asimptote** krivulje

$$y=\frac{x^3-2\cdot x^2+1}{x^2-x-6}$$

zatvaraju s osi apscisa.

Rješenje: Primijetimo da je izraz kojim je zadana krivulja neprava racionalna funkcija. Zbog toga zadana krivulja ili ima obostranu kosu asimptotu ili uopće nema kosu asimptotu. (U kose asimptote uvrštavamo i vodoravne asimptote.) Dakle, pri određivanju koeficijenata kose asimptote nećemo morati određivati četiri granične vrijednosti (dvije za lijevu i dvije za desnu kosu asimptotu), nego samo dvije.

Odredimo najprije uspravne asimptote. Nazivnik izraza kojim je zadana krivulja izjednačimo s nulom. Dobivamo:

$$x^2-x-6=0,$$
$$x_1=-2,\ x_2=3.$$

Dakle, zadana krivulja ima dvije uspravne asimptote: $x=-2$ i $x=3$.

Ispitajmo ima li krivulja (obostranu) kosu asimptotu. Odredimo:

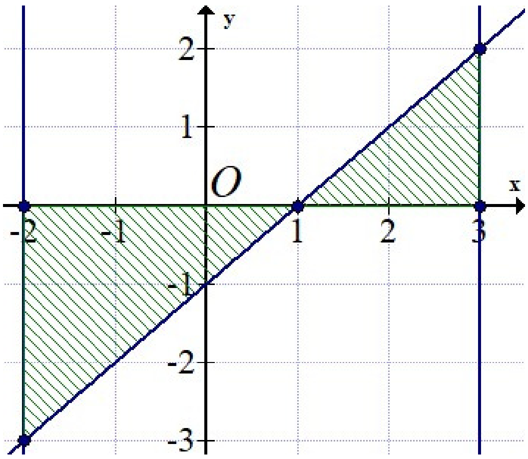
$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2\cdot x^2+1}{x^3-x^2-6\cdot x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-2\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}-6\cdot\frac{1}{x^2}}\right)=$$
$$=\frac{1-2\cdot 0+0}{1-0-6\cdot 0}=$$
$$=1,$$

$$l=\lim_{x\to\infty}(y-k\cdot x)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2\cdot x^2+1}{x^2-x-6}-1\cdot x\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2\cdot x^2+1-\left(x^3-x^2-6\cdot x\right)}{x^2-x-6}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2+6\cdot x+1}{x^2-x-6}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1+6\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-6\cdot\frac{1}{x^2}}\right)=$$
$$=\frac{-1+6\cdot 0+0}{1-0-6\cdot 0}=$$
$$=-1.$$

Dakle, obostrana kosa asimptota zadane krivulje je $y=x-1$.

Nacrtajmo sva tri pravca u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

Tako zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P=\frac{1}{2}\cdot(3\cdot 3+2\cdot 2)=$$
$$=\frac{13}{2}=6.5\text{ kv. jed.}$$

6. Odredite **sve asimptote** krivulje

$$y = 2 \cdot (\operatorname{arctg} x - x).$$

Rješenje: Primijetimo da je izraz kojim je definirana krivulja definiran za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zbog toga krivulja *nema nijednu uspravnu asimptotu*.

Ispitajmo ima li zadana krivulja kose asimptote. U ovom se slučaju ne radi o racionalnoj funkciji, pa moramo odrediti (najviše) četiri granične vrijednosti. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2\cdot(\operatorname{arctg} x - x)}{x}\right) = \left\{\frac{+\infty}{-\infty}\right\} = \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(2\cdot(\operatorname{arctg} x - x)\right)'}{(x)'}\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)}{1}\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(2\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)\right) = \\
&= 2\cdot(0-1) = \\
&= -2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= \lim_{x\to-\infty}(y - k_1\cdot x) = \\
&= \lim_{x\to-\infty}(2\cdot(\operatorname{arctg} x - x) - (-2\cdot x)) = \\
&= \lim_{x\to-\infty}(2\cdot \operatorname{arctg} x) = \\
&= 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \\
&= -\pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\cdot(\operatorname{arctg} x - x)}{x}\right) = \left\{\frac{-\infty}{+\infty}\right\} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(2\cdot(\operatorname{arctg} x - x)\right)'}{(x)'}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)}{1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(2\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)\right) =$$

$$= 2\cdot(0-1) = -2,$$

$$l_2 = \lim_{x\to+\infty}(y - k_2\cdot x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(2\cdot(\operatorname{arctg} x - x) - (-2\cdot x)) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(2\cdot\operatorname{arctg} x) =$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$= \pi.$$

Dakle, zadana krivulja ima dvije kose asimptote: $y = -2\cdot x - \pi$ i $y = -2\cdot x + \pi$.

7. U sjecištu krivulje $K... \; y = x^2 \cdot \ln x$ s osi **apscisa** povučene su tangenta i normala na krivulju *K*. Izračunajte površinu trokuta kojega ti pravci zatvaraju s osi **ordinata**.

Rješenje: Primijetimo da je izraz kojim je definirana zadana krivulja smislen za $x > 0$ jer logaritamska funkcija nije definirana za nepozitivne realne brojeve.

Sjecište zadane krivulje s osi apscisa dobijemo tako da u izraz kojim je zadana krivulja uvrstimo $y = 0$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
&0 = x^2 \cdot \ln x, \\
&\ln x = 0, \\
&x = 1, \\
&S = (1, 0).
\end{aligned}$$

Koeficijent smjera k_t tangente povučene u točki *S* jednak je vrijednosti prve derivacije izraza kojim je zadana krivulja za $x = 1$. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned}
k_t &= \left(x^2 \cdot \ln x\right)'_{x=1} = \\
&= \left(2 \cdot x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right)_{x=1} = \\
&= \left(2 \cdot x \cdot \ln x + x\right)_{x=1} = \\
&= 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 1 = \\
&= 2 \cdot 0 + 1 = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Prema tome, jednadžba tangente t (u segmentnom obliku) glasi:

$$\begin{aligned}
&t... \; y = 1 \cdot (x - 1), \\
&y = x - 1, \\
&-x + y = -1, \\
&\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1.
\end{aligned}$$

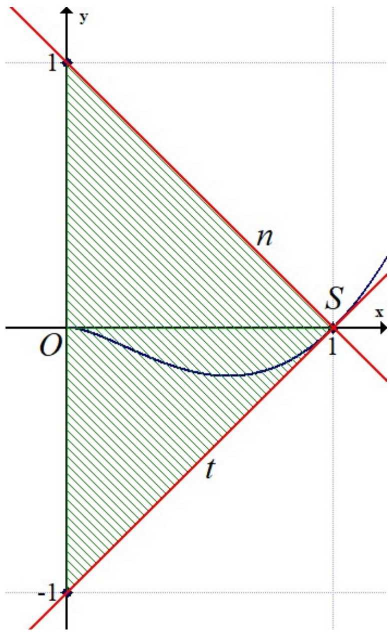
Koeficijent smjera k_n normale povučene na zadanu krivulju u točki *S* je suprotan i recipročan u odnosu na koeficijent smjera tangente k_t:

$$\begin{aligned}
k_n &= \frac{-1}{k_t} = \\
&= \frac{-1}{1} = \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Jednadžba normale n (u segmentnom obliku) glasi:

$$\begin{aligned} &n\ldots\ \ y=(-1)\cdot(x-1),\\ &y=-x+1,\\ &x+y=1,\\ &\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1. \end{aligned}$$

Prikažimo dobivene pravce u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

Tražena je površina jednaka površini trokuta kojemu su vrhovi u točkama S, (0, 1) i (0, -1).

Dio osi ordinata između točaka (0, 1) i (0, -1) je osnovica toga trokuta. Njezina je duljina jednaka $1+1=2$ jed. duljine.

Dužina $\overline{OS}$ je visina trokuta povučena iz vrha S na uočenu osnovicu. Njezina je duljina jednaka 1 jed. duljine.

Tako zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$\begin{aligned} P&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=\\ &=1 \text{ kv. jed.} \end{aligned}$$