ODREĐENI INTEGRAL I PRIMJENE.

Primjenom Newton – Leibnizove formule izračunajte sljedeće određene integrale (sve beskonačne periodičke racionalne brojeve i iracionalne brojeve nije potrebno aproksimirati decimalnim brojevima):

1. $\int_0^6 (x^2+4\cdot x+5)\cdot \mathrm{d}x$.

2. $\int_0^{12} (2-7\cdot x-x^2)\cdot \mathrm{d}x$.

3. $\int_0^1 (x+1)^2\cdot \mathrm{d}x$.

4. $\int_{-1}^1 (2-x)^2\cdot \mathrm{d}x$.

5. $\int_{-2}^1 (2\cdot x+1)^3\cdot \mathrm{d}x$.

6. $\int_{-1}^2 (1-3\cdot x)^3\cdot \mathrm{d}x$.

7. $\int_0^1 (x+1)\cdot(x-1)\cdot \mathrm{d}x$.

8. $\int_{-3}^3 (2-x)\cdot(x+2)\cdot \mathrm{d}x$.

9. $\int_{-2}^2 (1-x)\cdot(x^2+x+1)\cdot \mathrm{d}x$.

10. $\int_{-1}^1 (x+3)\cdot(x^2-3\cdot x+9)\cdot \mathrm{d}x$.

11. $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}\cdot \mathrm{d}x$.

12. $\int_{-2}^1 \sqrt{1+x^2}\cdot \mathrm{d}x$.

13. $\int_2^3 \sqrt{x^2-1}\cdot \mathrm{d}x$.

14. $\int_1^2 \sqrt{4\cdot x^2+1}\cdot \mathrm{d}x$.

15. $\int_{-1}^0 \sqrt{3-2\cdot x^2}\cdot \mathrm{d}x$.

16. $\int_{-1}^1 \sqrt{7-3\cdot x^2}\cdot \mathrm{d}x$.

17. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2}$.

ODREĐENI INTEGRAL I PRIMJENE.

18. $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{2-x}$.

19. $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{4\cdot x+3}$.

20. $\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{5\cdot x-1}$.

21. $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$.

22. $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{4\cdot x^2+1}$.

23. $\int_{3}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4}$.

24. $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{9\cdot x^2-4}$.

25. $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{9-x^2}$.

26. $\int_{-3}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{25-9\cdot x^2}$.

27. $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+9}}$.

28. $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16\cdot x^2+1}}$.

29. $\int_{3}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}}$.

30. $\int_{-4}^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cdot x^2-25}}$.

31. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

32. $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4\cdot x^2}}$.

33. $\int_{-1}^{2} 2^x\cdot \mathrm{d}x$.

34. $\int_{0}^{1} 3^{-x}\cdot \mathrm{d}x$.

35. $\int_{0}^{1} e^{x+4}\cdot \mathrm{d}x$.

ODREĐENI INTEGRAL I PRIMJENE.

36. $\int_{-1}^{0} e^{6-x} \cdot \mathrm{d}x$.

37. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2 \cdot x) \cdot \mathrm{d}x$.

38. $\int_{0}^{1} \sin(x-1) \cdot \mathrm{d}x$.

39. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(4 \cdot x) \cdot \mathrm{d}x$.

40. $\int_{0}^{1} \cos(1-x) \cdot \mathrm{d}x$.

41. $\int_{0}^{1} x \cdot e^{2x} \cdot \mathrm{d}x$.

42. $\int_{1}^{e} \ln x \cdot \mathrm{d}x$.

43. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \cdot \mathrm{d}x$.

44. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(2 \cdot x) \cdot \mathrm{d}x$.

45. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}\left(0.5 \cdot x\right) \cdot \mathrm{d}x$

46. $\int_{0}^{\pi} \mathrm{ctg}\left(0.25 \cdot x\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot$

47. $\int_{0}^{1} \arcsin x \cdot \mathrm{d}x$.

48. $\int_{-1}^{0} \arccos x \cdot \mathrm{d}x$.

49. $\int_{0}^{1} x \cdot \mathrm{arctg}\, x \cdot \mathrm{d}x$.

50. $\int_{0}^{1} 12 \cdot x^2 \cdot \mathrm{arcctg}\, x \cdot \mathrm{d}x$.

51. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2 \cdot \sin x + 1} \cdot \mathrm{d}x$.

ODREĐENI INTEGRAL I PRIMJENE.

52. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4\cdot\cos x + 3}\cdot \mathrm{d}x\,.$

53. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{\cos^2(2\cdot x)+\cos(2\cdot x)}}\cdot \mathrm{d}x$

54. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{5+4\cdot\sin x-\sin^2 x}}\cdot \mathrm{d}x\,.$

55. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cdot \mathrm{d}x\,.$

56. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^7 x\cdot \mathrm{d}x\,.$

57. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^2\left(0.5\cdot x\right)\cdot \mathrm{d}x\,.$

58. $\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \mathrm{ctg}^2\left(\frac{x}{3}\right)\cdot \mathrm{d}x\,.$

59. $\int_{0}^{1} \mathrm{sh}^3 x\cdot \mathrm{d}x\,.$

60. $\int_{0}^{1} \mathrm{ch}^4 x\cdot \mathrm{d}x\,.$

61. Izračunajte prosječnu vrijednost funkcije:

a) $f(x)=\cos x$ na segmentu [0, π];

b) $f(x)=\sin x$ na segmentu $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$;

c) $f(x)=\sqrt{x}$ na segmentu [0, 1];

d) $f(x)=e^x$ na segmentu [0, 1];

e) $f(x)=x^3$ na segmentu [1, 4];

f) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ na segmentu [1, 2];

g) $f(x)=x^2+2\cdot x-3$ na segmentu određenom nultočkama te funkcije;

h) $f(x)=x^3-4\cdot x^2-3\cdot x$ na segmentu određenom najmanjom i najvećom nultočkom te funkcije;

i) $f(x)=\ln(1-x)$ na segmentu [1 − *e*, 0];

j) $f(x)=x^2\cdot\ln x$ na segmentu [1, *e*];

k) $f(x)=(x^2-7\cdot x+10)\cdot\ln x$ na segmentu određenom najmanjom i najvećom nultočkom te funkcije;

ODREĐENI INTEGRAL I PRIMJENE.

l) $f(x) = (x-1)\cdot \ln(2\cdot x)$ na segmentu određenom nultočkama te funkcije;

m) $f(x) = (x^2-9)\cdot e^x$ na segmentu određenom nultočkama te funkcije;

n) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ na segmentu određenom nultočkama te funkcije;

o) $f(x) = 2\cdot x\cdot \sin x\cdot \cos x$ na segmentu $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$;

p) $f(x) = 2\cdot \operatorname{arctg}(2\cdot x)$ na segmentu $\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$.

62. Izrazite prosječnu vrijednost realne funkcije $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ na njezinu prirodnu području definicije kao funkciju parametra $a \in \mathbb{R}$**.** Za koji $a > 0$ je ta vrijednost jednaka $\dfrac{\pi}{2}$?

63. Neka je $a > 0$ konstanta. Pokažite da prosječne vrijednosti realne funkcije:

a) $f(x) = e^{\frac{x}{a}}$ na segmentu $[-a, a]$;

b) $f(x) = e^{-\frac{x}{a}}$ na segmentu $[-a, a]$

ne zavise o vrijednosti parametra a.

Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama:

64. $y = 2$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 2$.
65. $y = x$, $x = 0$ i $x = 4$.
66. $y = 2\cdot x + 2$, $y = 0$, $x = -1$ i $x = 5$.
67. $y = 1 - x$, $y = 2\cdot x - 2$ i $x = 4$.
68. $y = 4 - x^2$ i $y = 0$.
69. $y = -x^2 - 2\cdot x + 3$ i $y = 0$.
70. $y = x^2$ i $y = 2 - x$.
71. $y = x^2 - x$ i $y = x - x^2$.
72. $y = x^2 - 1$ i $y = 2 - 2\cdot x^2$.
73. $y = x^2 - 4$ i $y = 2\cdot x - 4$.
74. $y = \dfrac{4}{x}$ i $y = 5 - x$.
75. $y = x^3$ i $y = 4\cdot x$.
76. $y = \ln(3 - 2\cdot x)$, $y = 0$, $x = -1$ i $x = 1$.
77. $y = e^x$, $y = 1 - \ln(x + 1)$ i $x = 1$.
78. $y = e^{-x}$, $y = \dfrac{2}{x+2}$, $y = 0$ i $x = 1$.
79. $y = \ln(x + 1)$, $y = -2\cdot x$ i $x = 1$.
80. $y = \dfrac{1}{2} + \ln\sqrt{1-x^2}$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}$ i $y = 0$.
81. $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 1$ i $x = \dfrac{\pi}{4}$.

ODREĐENI INTEGRAL I PRIMJENE.

82. $y = \cos x \cdot e^{\sin x}$ i $y = 0$ unutar kojega se nalazi točka $T = (1, 1)$.

83. $y = \sin(4 \cdot x) \cdot e^{\sin(2 \cdot x)}$ i $y = 0$ unutar kojega se nalazi točka $T = (-2, -1)$.

84. $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg}(0.5 \cdot x)$, $x = 0$ i $x = \dfrac{\pi}{2}$.

85. $y = \arccos x$, $y = 0$, $x = -1$ i $x = 1$.

86. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $x = 1$ i $x = 2$.

87. $y = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$ i $y = 0$.

88. $y = \cos(0.5 \cdot \pi \cdot x)$, $y = \operatorname{arctg} x - 0.25 \cdot \pi$, $x = 0$ i $x = 1$.

89. $y = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ i $\pi \cdot x - 4 \cdot y = 0$.

90. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $y = 1 + \ln(x + 1)$ i $x = 2$.

Izračunajte duljinu luka krivulje:

91. $y = x^2 - 5 \cdot x + 6$ ispod segmenta određenoga nultočkama pripadne realne funkcije.

92. $y = 9 - 10 \cdot x - x^2$ iznad segmenta određenoga nultočkama pripadne realne funkcije.

93. $y = x \cdot \sqrt{x}$ nad segmentom $[0, 5]$.

94. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2} \cdot \ln x$ nad segmentom $[1, e]$.

95. $y = \ln x$ nad segmentom $\left[\sqrt{3},\ \sqrt{5}\right]$.

96. $y = \ln(\sin x)$ nad segmentom $\left[\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3} \cdot \pi\right]$.

97. $y = \ln(\cos x)$ nad segmentom $\left[\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3} \cdot \pi\right]$

98. $y = \dfrac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ nad segmentom $[0, a]$, gdje je $a > 0$ konstanta.

99. $y = \sqrt{1 - x^2}$.

100. $y = \sqrt{1 - 4 \cdot x^2}$.

101. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenoga krivuljama $y = \sin x$, $x = 0$ i $x = \pi$ oko osi:

- **a)** apscisa;
- **b)** ordinata.

102. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom krivulje $x^2 + y^2 = 1$ oko osi:

- **a)** apscisa;
- **b)** ordinata.

103. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom krivulje $x^2 + 4 \cdot y^2 = 4$ oko osi:

- **a)** apscisa;
- **b)** ordinata.

ODREĐENI INTEGRAL I PRIMJENE.

104. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom tijela omeđenoga krivuljama $y^2 = x^3$, $y = 0$ i $x = 1$ oko osi:
- **a)** apscisa;
- **b)** ordinata.

105. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom krivulje $y = 2 \cdot x - x^2$ oko osi apscisa.

106. Lik omeđen krivuljama $y^2 = 8 \cdot x$, $x = 0$ i $x = 2$ rotira oko osi apscisa. Izračunajte obujam nastaloga rotacijskoga tijela.

107. Lik omeđen krivuljama $y = \cos^2 x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = \pi$ rotira oko osi ordinata. Izračunajte obujam nastaloga rotacijskoga tijela.

108. Lik omeđen krivuljama $y = 4 \cdot x^2$, $y = 0$ i $y = 16$ rotira oko osi ordinata. Izračunajte obujam nastaloga rotacijskoga tijela.

109. Lik omeđen krivuljama $y = \left[2 \cdot (x-1)\right]^2$, $x = 1$ i $y = 16$ rotira oko osi ordinata. Izračunajte obujam nastaloga rotacijskoga tijela.

110. Lik omeđen krivuljama $x^2 + y^2 = 9$, $y = 1$ i $y = 2$ rotira oko osi ordinata. Izračunajte obujam nastaloga rotacijskoga tijela.

111. Ako se neka materijalna točka giba po nekoj krivulji brzinom $v = v(t)$, onda je put koji prijeđe ta točka u intervalu $[t_1, t_2]$ dan izrazom

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot \mathrm{d}t .$$

Ako se točka giba ukupno 20 s jednolikom brzinom od 2 m/s, izračunajte duljinu ukupnoga prijeđenoga puta i prosječnu brzinu na tom putu.

112. Brzina gibanja neke materijalne točke iznosi $v(t) = t^2 + 1$. Izračunajte duljinu puta koji prijeđe ta točka u prvih 10 sekundi mjerenih od početka gibanja. (*Napomena*: Primijenite izraz iz prethodnoga zadatka.)

113. Brzina gibanja neke materijalne točke iznosi $v(t) = t \cdot \ln(t + 1)$. Izračunajte duljinu puta koji prijeđe ta točka u prvih 10 sekundi mjerenih od početka gibanja. (*Napomena*: Primijenite izraz iz 111. zadatka.)

114. Brzina gibanja neke materijalne točke iznosi $v = v(t) = t \cdot e^{-0.01 \cdot t}$. Izračunajte duljinu puta koji prijeđe ta točka od početka gibanja do potpunoga zaustavljanja. (*Napomena*: Primijenite izraz iz 111. zadatka.)

115. Na rubovima otpornika čiji je otpor R postoji napon $U = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Otpornikom teče struja $I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ i razvija se snaga $P = U \cdot I$. Pokažite da je prosječna snaga po jednom periodu $T = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}$ jednaka snazi izmjenične struje pri naponu $\dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$ i jakosti $\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$.

116. Vodeći statističari Kraljevine Bušbumbuj prognozirali su trend kretanja broja stanovnika N te kraljevine:

$$N(t) = 500000 \cdot \ln\left(\frac{t}{2} + e\right),$$

pri čemu je t vrijeme iskazano u godinama, a $t = 0$ vrijednost pridružena danu 01.01.2016.

ODREĐENI INTEGRAL I PRIMJENE.

a) Prognozirajte očekivani prosječan godišnji broj stanovnika te kraljevine za svaku od sljedećih 5 godina.
b) Izračunajte očekivani prosječan godišnji broj stanovnika te kraljevine u razdoblju od 01.01.2017. do 31.12.2021.

117. 01.01.2016. privatna tvrtka *Fero Jozo* iz Špičkovine počela je proizvodnju svojega novoga preparata *Kiloskid* namijenjenom osobama koje žele smanjiti višak tjelesne mase. Ekonomski analitičar tvrtke Štef Dvolitrica procijenio je da će se prodaja preparata odvijati prema trend-modelu

$$N(t) = 8\,000 \cdot \ln(t + 1),$$

gdje su t vrijeme iskazano u mjesecima, $t = 0$ vrijednost pridružena danu 01.01.2016., a $N(t)$ očekivani ukupni broj prodanih preparata u trenutku t.

a) Procijenite ukupan broj prodanih preparata u prvih 6 mjeseci 2016. godine.
b) Procijenite broj prodanih preparata u listopadu 2016. godine.
c) Procijenite vrijeme potrebno da ukupan broj prodanih preparata dosegne vrijednost 20 000.
d) Ako je cijena jednoga preparata 300.00 kn, procijenite prosječnu mjesečnu zaradu na prodaji preparata u 2018. godini.

118. Riješite prethodni zadatak ako je drugi ekonomski analitičar tvrtke Ivek Dvolitrica procijenio da će se prodaja preparata odvijati prema trend-modelu

$$N(t) = 10\,000 \cdot \operatorname{arctg}\sqrt[3]{t}\,.$$

119. Demografi Kraljevine Niškoristije procijenili su da će se kretanje ukupnoga broja stanovnika N te kraljevine odvijati prema trend-modelu

$$N(t) = 1000000 \cdot e^{-\frac{\sqrt{t}}{8}},$$

gdje je t vrijeme iskazano u godinama, a $t = 0$ vrijednost pridružena danu 01.01.2016.

a) Procijenite ukupan broj stanovnika promatrane kraljevine na dan 01.01.2019.
b) Procijenite vrijeme potrebno da se broj stanovnika (u odnosu na broj stanovnika 01.01.2016.) smanji za 50%.
c) Procijenite vrijeme potrebno da se broj stanovnika smanji za 60% (u odnosu na broj stanovnika 01.01.2016.).

120. Definirajmo *duljinu dana* kao vrijeme proteklo od izlaska do zalaska sunca (iskazano u satima). Utvrđeno je da se, uz pretpostavku da jedna godina ima 365 dana, duljina t – toga dana nakon proljetne ravnodnevice (21.03.) može računati prema formuli

$$l(t) = 12 + 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{182}\right).$$

Pritom pretpostavljamo da je prirodno područje definicije funkcije l skup $\mathbb{R}$.

ODREĐENI INTEGRAL I PRIMJENE.

a) Izračunajte duljinu najduljega dana, vrijednost t za koju se postiže ta duljina, kao i datum u godini pridružen toj vrijednosti.

b) Izračunajte duljinu najkraćega dana, vrijednost t za koju se postiže ta duljina, kao i datum u godini pridružen toj vrijednosti.

c) Nađite najmanju vrijednost $t > 0$ za koju je $l(t) = l(0)$, kao i datum u godini pridružen toj vrijednosti. Interpretirajte dobiveni rezultat.

d) Odredite najmanju vrijednost $t > 0$ nakon koje će se ciklus duljina dana početi ponavljati.

e) Izračunajte prosječnu duljinu dana tijekom proljetnih i ljetnih mjeseci (tj. u razdoblju od 21.03. do 23.09.).

f) Izračunajte prosječnu duljinu dana tijekom jesenskih i zimskih mjeseci (tj. u razdoblju od 23.09. do 21.03., uz pretpostavku da veljača ima 28 dana).