Bojan Kovačić

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA SA DEMONSTRATURA I GRUPNIH KONZULTACIJA IZ MATEMATIKE 2

nerecenzirana verzija

Zagreb, lipanj 2018.

Sadržaj

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka u cijelosti obuhvaća gradivo predmeta *Matematika* 2 koje se predaje na 1. godini preddiplomskoga stručnoga studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu. Nastala je na temelju zadataka rješavanih na demonstraturama i grupnim konzultacijama koje su tijekom posljednjih nekoliko godina bili organizirane za sve zainteresirane studente kojima sam držao predavanja i vježbe iz navedenoga predmeta. Zbog toga se može reći da je (doslovno) svaki zadatak u ovoj zbirci „akademski ispitan“ na studentima – slušačima navedenoga predmeta.

Upravo na temelju pitanja, primjedbi i komentara studenata napisano je poglavlje zbirke koje obuhvaća detaljna rješenja zadataka. To poglavlje je namjerno dano kao zasebna cjelina jer se preporučuje da svaki zainteresirani student najprije pokuša samostalno riješiti svaki postavljeni zadatak. U tu svrhu su uz svaki zadatak navedeni samo konačni rezultati.

Zbirka zadataka *nije* zamišljena kao zamjena za auditorne vježbe, demonstrature ili grupne konzultacije, nego kao dopuna tim oblicima nastave. Zbog opsega i težine propisanoga gradiva, sadašnja satnica predmeta *Matematika* 2 u kojoj je predviđeno (samo) 60 sati auditornih vježbi pokazala se nedovoljnom za kvalitetnu pripremu polaganja ispita. Zbog toga se nadam da će ova zbirka – zajedno sa zadacima riješenima na predavanjima, auditornim vježbama, demonstraturama i grupnim konzultacijama – značajno pomoći svim studentima u pripremama za polaganje ispita.

Preporučuje se koristiti ovu zbirku zajedno s *Repetitorijem matematike za studente elektrotehnike*. Upravo zato u zbirci nije naveden pregled teorijskih pojmova, definicija i formula potrebnih za rješavanje zadataka. Osim što bi takav pregled doveo do (uvjeren sam, nepotrebnoga) povećanja opsega zbirke, drugi osnovni razlog za ovakvu odluku jest dozvoljenost *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike* kao pomagala pri polaganju kolokvija, odnosno pismenoga ispita. Zbog toga smatram vrlo primjerenim da se zadaci rješavaju uz korištenje navedenoga *Repetitorija* (…) i na taj način svojevrsno „simulira“ polaganje kolokvija, odnosno pismenoga ispita.

Ugodna mi je dužnost zahvaliti svima koji su na bilo koji način doprinijeli stvaranju ove zbirke. To se ponajprije odnosi na studente-demonstratore Mateu Jelčić i Ivana Plesivčaka koji su veći dio zadataka riješili na demonstraturama, te upozorili na pogreške. Posebnu zahvalnost dugujem svojim studentima koji su brojnim pitanjima, primjedbama i komentarima utjecali na povećanje kvalitete teksta.

Svjestan sam da je, unatoč svim naporima, u zbirci „preživio“ određen broj pogrešaka. Svakome tko me upozori na bilo koju od tih pogrešaka unaprijed izražavam zahvalnost.

U Zagrebu, lipnja 2018.

Bojan Kovačić

1. GRUPA ZADATAKA

1. Pokažite da je funkcija F primitivna funkcija realne funkcije f ako je:

a) $F(x)=\frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}-x+2\cdot\sqrt{x}-2\cdot\ln\left(\sqrt{x}+1\right)-2018^{2017}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}+1}$;

b) $F(t)=\frac{1}{2}\cdot\ln(t^2+1)-\operatorname{arctg} t+2017^{2018}$, $f(t)=\frac{t-1}{t^2+1}$.

Uputa: U svim podzadacima treba provjeriti jednakost $F'=f$.

2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^2\cdot\mathrm{d}x$;

b) $\int\left(t^2+\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}}-t^2\right)\cdot\mathrm{d}t$;

c) $\int\left(\sqrt[3]{u}-\frac{1}{\sqrt[4]{u}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{u}}+\sqrt[3]{u}\right)\cdot\mathrm{d}u$.

Rezultati: U svim rezultatima je $C\in\mathbb{R}$ konstanta.

a) $-\frac{12}{11}\cdot x\cdot\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{5}\cdot x\cdot\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{2}\cdot x^2+C$;

b) $3\cdot\sqrt[3]{t}-\frac{1}{5}\cdot t^5+C$;

c) $\frac{3}{5}\cdot u\cdot\sqrt[3]{u^2}-2\cdot\sqrt{u}+C$.

3. Pogodnom zamjenom odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int x\cdot(4\cdot x-1)^{10}\cdot\mathrm{d}x$;

b) $\int\frac{\ln^3(t+1)}{2\cdot t+2}\cdot\mathrm{d}t$; ;

c) $\int\frac{6\cdot e^{2\cdot w}}{e^{2\cdot w}+2018}\cdot\mathrm{d}w$.

Rezultati: U svim rezultatima je $C\in\mathbb{R}$ konstanta.

a) $\frac{1}{192}\cdot(4\cdot x-1)^{12}+\frac{1}{176}\cdot(4\cdot x-1)^{11}+C$;

b) $\frac{1}{8}\cdot\ln^4(t+1)+C$; .

c) $3\cdot\ln(e^{2\cdot w}+2018)+C$.

4. Metodom djelomične integracije odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int (1-x)\cdot\cos x\cdot \mathrm{d}x;$

b) $\int 50\cdot\sqrt[3]{u^2}\cdot\ln\left(\sqrt{u}\right)\cdot \mathrm{d}u;$;

c) $\int 4\cdot t\cdot \operatorname{arcctg} t\cdot \mathrm{d}t.$

***Rezultati*:** U svim rezultatima zadataka je $C\in\mathbb{R}$ konstanta.

a) $(1-x)\cdot\sin x-\cos x+C;$

b) $3\cdot u\cdot\sqrt[3]{u^2}\cdot(5\cdot\ln u-3)+C;$;

c) $2\cdot(t^2\cdot\operatorname{arcctg} t+t+\operatorname{arcctg} t)+C.$

5. Primjenom različitih metoda odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int 4034\cdot x^{4033}\cdot e^{x^{2017}}\cdot \mathrm{d}x;$;

b) $\int \cos\sqrt{t}\cdot \mathrm{d}t.$

***Rezultati*:** U svim rezultatima zadataka je $C\in\mathbb{R}$ konstanta.

a) $2\cdot e^{x^{2017}}\cdot(x^{2017}-1)+C;$

b) $2\cdot\left(\sqrt{t}\cdot\sin\sqrt{t}+\cos\sqrt{t}\right)+C.$

6. Riješite sljedeće Cauchyjeve zadaće:

a) $\begin{cases} F'(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\ln x, \\ F(1)=\dfrac{7}{16}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} G'(u)=\arccos\left(\dfrac{u}{2}\right), \\ G(-2)=-2\cdot\pi. \end{cases}$

***Rezultati*:**

a) $F(x)=\dfrac{3}{16}\cdot x\cdot\sqrt[3]{x}\cdot(4\cdot\ln x-3)+1;$

b) $G(u)=u\cdot\arccos\left(\dfrac{u}{2}\right)-\sqrt{4-u^2}.$

2. GRUPA ZADATAKA

1. Metodom neodređenih koeficijenata (rastavom na parcijalne razlomke) odredite sljedeće neodređene integrale i pojednostavnite dobivene izraze što je više moguće:

a) $\int \frac{6}{x^3 - x^2 - 2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x;$

b) $\int \frac{16}{t^3 - 2\cdot t^2 - 4\cdot t + 8}\cdot \mathrm{d}t;$

c) $\int \frac{4}{u^3 + u^2 + u + 1}\cdot \mathrm{d}u.$

Rezultati: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbb{R}$ konstanta.

a) $\ln|x-2| + 2\cdot\ln|x+1| - 3\cdot\ln|x| + C;$

b) $\ln|t+2| - \ln|t-2| - \frac{4}{t-2} + C;$

c) $2\cdot\ln|u+1| - \ln(u^2+1) + 2\cdot\operatorname{arctg} u + C.$

2. Odredite sljedeće neodređene integrale i pojednostavnite dobivene izraze što više možete:

a) $\int \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot y}{y^2 + y + 1}\cdot \mathrm{d}y;$

b) $\int \frac{3\cdot w - 2}{w^2 + 3\cdot w + 4}\cdot \mathrm{d}w.$

Rezultati: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbb{R}$ konstanta.

a) $\sqrt{3}\cdot\ln(y^2 + y + 1) - 2\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot y + 1}{\sqrt{3}}\right) + C;$

b) $\frac{3}{2}\cdot\ln(w^2 + 3\cdot w + 4) - \frac{13}{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot w + 3}{\sqrt{7}}\right) + C.$

3. Odredite sljedeće neodređene integrale i pojednostavnite dobivene izraze što više možete:

a) $\int 8\cdot\sqrt{\alpha^2 + \alpha}\cdot \mathrm{d}\alpha;$

b) $\int 8\cdot\sqrt{12 - \beta - \beta^2}\cdot \mathrm{d}\beta;$

c) $\int \frac{\mathrm{d}\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 6\cdot\gamma}};$

d) $\int \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\sqrt{4\cdot\varepsilon - \varepsilon^2}}.$

Rezultati: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbb{R}$ konstanta.

a) $2\cdot(2\cdot\alpha+1)\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha}-\ln\left(2\cdot\alpha+1+2\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha}\right)+C;$

b) $2\cdot(2\cdot\beta+1)\cdot\sqrt{12-\beta-\beta^2}+49\cdot\arcsin\left(\frac{2\cdot\beta+1}{7}\right)+C;$

c) $\ln\left(\gamma-3+\sqrt{\gamma^2-6\cdot\gamma}\right)+C;$

d) $\arcsin\left(\frac{\varepsilon-2}{2}\right)+C.$

4. Riješite sljedeće Cauchyjeve zadaće i pojednostavnite dobivene izraze što više možete:

a) $\begin{cases} F'(\lambda)=\dfrac{\lambda^2}{\lambda+1}, \\ F(0)=1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} G'(\mu)=\dfrac{\mu+1}{\mu^2-\mu}, \\ G\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln 2. \end{cases}$

Rezultati:

a) $F(\lambda)=\frac{1}{2}\cdot\lambda^2-\lambda+1+\ln|\lambda+1|;$

b) $G(\mu)=\ln\left|\mu-2+\frac{1}{\mu}\right|.$

3. GRUPA ZADATAKA

1. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \sin^5 x \cdot \cos^8 x \cdot \mathrm{d}x;$

b) $\int \sin^6 y \cdot \cos^5 y \cdot \mathrm{d}y;$

c) $\int \mathrm{ctg}^3 t \cdot \mathrm{d}t.$

Rezultati: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbb{R}$ konstanta.

a) $-\frac{1}{13} \cdot \cos^{13} x + \frac{2}{11} \cdot \cos^{11} x - \frac{1}{9} \cdot \cos^9 x + C;$

b) $\frac{1}{11} \cdot \sin^{11} y - \frac{2}{9} \cdot \sin^9 y + \frac{1}{7} \cdot \sin^7 y + C;$

c) $-\ln|\sin t| - \frac{1}{2 \cdot \sin^2 t} + C.$

2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \mathrm{sh}^5 w \cdot \mathrm{ch}^{12} w \cdot \mathrm{d}w;$

b) $\int \mathrm{sh}^{10} q \cdot \mathrm{ch}^5 q \cdot \mathrm{d}q;$

c) $\int \mathrm{cth}^3 u \cdot \mathrm{d}u.$

Rezultati: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbb{R}$ konstanta.

a) $\frac{1}{17} \cdot \mathrm{ch}^{17} w - \frac{2}{15} \cdot \mathrm{ch}^{15} w + \frac{1}{13} \cdot \mathrm{ch}^{13} w + C;$

b) $\frac{1}{15} \cdot \mathrm{sh}^{15} q + \frac{2}{13} \cdot \mathrm{sh}^{13} q + \frac{1}{11} \cdot \mathrm{sh}^{11} q + C;$

c) $\ln|\mathrm{sh}\, u| - \frac{1}{2 \cdot \mathrm{sh}^2 u} + C.$

3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x} \cdot \mathrm{d}x;$

b) $\int \frac{2 \cdot \sin y}{2 \cdot \cos y - \cos^2 y} \cdot \mathrm{d}y;$

c) $\int \frac{4 \cdot \sin(2 \cdot t)}{\sin^2 t - 6 \cdot \sin t - 7} \cdot \mathrm{d}t.$

Rezultati: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbb{R}$ konstanta.

a) $\ln\left|\frac{\sin x}{1 + \sin x}\right| + C;$

b) $\ln\left|\dfrac{\cos y-2}{\cos y}\right|+C;$

c) $7\cdot\ln(7-\sin t)+\ln(\sin t+1)+C.$

4. Odredite sljedeće neodređene integrale:

a) $\int 2\cdot\sqrt{1+\mathrm{ch}^2 q}\cdot\mathrm{sh}\, q\cdot \mathrm{d}q;$

b) $\int 2\cdot\sqrt{10\cdot\mathrm{sh}\, u-\mathrm{sh}^2 u}\cdot\mathrm{ch}\, u\cdot \mathrm{d}u;$

c) $\int \dfrac{2\cdot\mathrm{sh}\, w}{\sqrt{4\cdot\mathrm{ch}^2 w+4\cdot\mathrm{ch}\, w-3}}\cdot \mathrm{d}w;$

d) $\int \dfrac{4\cdot\mathrm{ch}\, v}{\sqrt{8\cdot\mathrm{sh}\, v-3-16\cdot\mathrm{sh}^2 v}}\cdot \mathrm{d}v.$

Rezultati: U svim rezultatima zadataka je $C\in\mathbb{R}$ konstanta.

a) $\mathrm{ch}\, q\cdot\sqrt{1+\mathrm{ch}^2 q}+\ln\left(\mathrm{ch}\, q+\sqrt{1+\mathrm{ch}^2 q}\right)+C;$

b) $(\mathrm{sh}\, u-5)\cdot\sqrt{10\cdot\mathrm{sh}\, u-\mathrm{sh}^2 u}+25\cdot\arcsin\left(\dfrac{\mathrm{sh}\, u-5}{5}\right)+C;$

c) $\ln\left|2\cdot\mathrm{ch}\, w-1+\sqrt{4\cdot\mathrm{ch}\, w^2+4\cdot\mathrm{ch}\, w-3}\right|+C;$

d) $\arcsin\left(\dfrac{4\cdot\mathrm{sh}\, v-1}{2}\right)+C.$

4. GRUPA ZADATAKA

1. U sjecištima krivulje $K \ldots y = 8 - 2 \cdot x - x^2$ i osi apscisa povučene su tangente na krivulju *K*. Izračunajte površinu ravninskoga lika kojega omeđuju te tangente i krivulja *K*. Rješenje zadatka obavezno popratite odgovarajućom skicom.

Rezultat: $P = 18$ kv. jed.

2. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots y = 2 - x - x^2$ i $K_2 \ldots x + y + 2 = 0$. Rješenje zadatka obavezno popratite odgovarajućom skicom.

Rezultat: $P = \frac{32}{3}$ kv. jed.

3. Izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju os apscisa, krivulja $K \ldots y = 1 - \ln(x-1)$ i normala na krivulju *K* povučena u točki $T = (x_T, 1) \in K$. Rješenje zadatka obavezno popratite odgovarajućom skicom.

Rezultat: $P = e - \frac{3}{2}$ kv. jed.

4. Izračunajte prosječnu vrijednost realne funkcije $f(x) = 4 \cdot x \cdot e^{2-2 \cdot x}$ na segmentu [0, 1].

Rezultat: $\overline{f} = e^2 - 3$.

5. Izračunajte prosječnu vrijednost realne funkcije $g(y) = 4 \cdot \sqrt{2 \cdot y - y^2}$ na njezinoj prirodnoj domeni.

Rezultat: $\overline{g} = \pi$.

6. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = 4 \cdot \cos x,\ y = 0,\ x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$ oko osi:

a) apscisa;
b) ordinata.

Rezultati:

a) $V = 4 \cdot \pi^2$ kub. jed.;
b) $V = 4 \cdot \pi \cdot (\pi - 2)$ kub. jed.

7. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga vrtnjom krivocrtnoga trapeza omeđenoga krivuljama $y = 8 \cdot \operatorname{sh} x,\ y = 0,\ x = 0$ i $x = \ln 2$ oko osi:

a) apscisa;
b) ordinata.

Rezultati: **a**) $V = 2 \cdot (15 - 16 \cdot \ln 2) \cdot \pi$ kub. jed.; **b**) $V = 4 \cdot (5 \cdot \ln 2 - 3) \cdot \pi$ kub. jed.

5. GRUPA ZADATAKA

1. Isključivo deriviranjem pokažite da je funkcija $F(x)=(\ln^3 x-3\cdot\ln^2 x+6\cdot\ln x-6)\cdot x$ standardna antiderivacija funkcije $f(x)=\ln^3 x$.

Uputa: Treba provjeriti jednakost $F'=f$.

2. Riješite Cauchyjevu zadaću:

$$\begin{cases} y'=3\cdot\sin^5 t, \\ y(0)=-1. \end{cases}$$

Rezultat: $y=-\cos^3 t+3\cdot\cos^2 t-3\cdot\cos t.$

3. Izračunajte duljinu luka krivulje $y=\ln(\cos x)$ iznad segmenta $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$.

Rezultat: $l=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ jed. duljine.

4. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\dfrac{2}{\sqrt{\pi\cdot(x^3+2\cdot x)}}$, $y=0,\ x=1$ i $x=2$ oko osi apscisa.

Rezultat: $V=\ln 2$ kub. jed.

5. Izračunajte prosječnu vrijednost funkcije $g(u)=8\cdot u\cdot e^{2\cdot u}$ na segmentu $[0,2]$.

Rezultat: $\overline{g_{[0,2]}}=3\cdot e^4+1.$

6. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1\ldots\ y^2=-x$ i $K_2\ldots\ y=x^2$. Rješenje zadatka obavezno popratite odgovarajućom skicom.

Rezultat: $P=\frac{1}{3}$ kv. jed.

6. GRUPA ZADATAKA

Izračunajte sljedeće neprave integrale:

1. $I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{10 \cdot \mathrm{d}x}{25 \cdot x^2 + 1}$.

Rezultat: $I_1 = \pi$.

2. $I_2 = \int_{-\infty}^{-3} \frac{2}{(\ln 3) \cdot (t^2 + 2 \cdot t)} \cdot \mathrm{d}t$.

Rezultat: $I_2 = 1$.

3. $I_3 = \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln 2) \cdot (y^2 - y)} \cdot \mathrm{d}y$.

Rezultat: $I_2 = 1$.

4. $I_4 = \int_{2}^{+\infty} \frac{3}{(2 \cdot \ln 2) \cdot (w^2 + w - 2)} \cdot \mathrm{d}w$.

Rezultat: $I_2 = 1$.

Primjenom D'Alembertova kriterija ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^n}$.

Rezultat: Konvergira $\left(r = \frac{1}{2} \right)$.

6. $\sum \frac{n^2 + n}{3^n}$.

Rezultat: Konvergira $\left(r = \frac{1}{3} \right)$.

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - n}{5^n}$.

Rezultat: Konvergira $\left(r = \frac{1}{5} \right)$.

Primjenom Cauchyjeva kriterija ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

8. $\sum \frac{n \cdot 3^{2 \cdot n}}{2^{3 \cdot n}}$.

Rezultat: Divergira $\left(r = \frac{9}{8} \right)$.

9. $\sum \frac{n^2 \cdot 2018^n}{13^{3 \cdot n}}$.

Rezultat: Konvergira $\left(r = \frac{2018}{2197} \right)$.

10. $\sum \left[\frac{3 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 1}{(2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1)} \right]^n$

Rezultat: Konvergira $\left(r = \frac{3}{4} \right)$.

Riješite sljedeće linearne homogene rekurzije s konstantnim koeficijentima uz zadane početne uvjete:

11. $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 8 \cdot a_{n-2},\ a_1 = 2,\ a_2 = 20.$

Rezultat: $a_n = (-2)^n + 4^n$.

12. $b_n = 5 \cdot b_{n-1} + 6 \cdot b_{n-2},\ b_1 = 6,\ b_2 = 36.$

Rezultat: $b_n = 6^n$.

7. GRUPA ZADATAKA

Odredite intervale konvergencije sljedećih redova i precizno obrazložite sve svoje tvrdnje:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Rezultat: $I = [-1,\ 1]$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\cdot n}}{n}$.

Rezultat: $I = \langle -1,\ 1 \rangle$.

3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln x)^n}{n+1}$.

Rezultat: $I = \left[\frac{1}{e},\ e\right)$.

4. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^{2\cdot n\cdot x}}{n-2}$.

Rezultat: $I = \langle -\infty,\ 0 \rangle$.

Aproksimirajte sljedeće realne funkcije MacLaurinovim polinomom 3. stupnja:

5. $f(x) = 2\cdot\left(e^{2\cdot x} - \sin x\right)$.

Rezultat: $M_3(x) = 3\cdot x^3 + 4\cdot x^2 + 2\cdot x + 2$.

6. $g(y) = 6\cdot\left[e^y + \sin(2\cdot y)\right]$.

Rezultat: $M_3(y) = -7\cdot y^3 + 3\cdot y^2 + 18\cdot y + 6$.

7. $h(t) = 6\cdot\left[\sin(4\cdot t) + \cos(3\cdot t)\right]$.

Rezultat: $M_3(t) = -64\cdot t^3 - 27\cdot t^2 + 24\cdot t + 6$.

8. $p(w) = 6\cdot\left[\cos(6\cdot w) - \sin(5\cdot w)\right]$.

Rezultat: $M_3(w) = 125\cdot w^3 - 108\cdot w^2 - 30\cdot w + 6$.

Aproksimirajte sljedeće realne funkcije u okolini točke c Taylorovim polinomom 3. stupnja:

9. $f(x) = 3 \cdot e^{x^2-1}$, $c = 1$.

Rezultat: $T_3(x) = 10 \cdot (x-1)^3 + 9 \cdot (x-1)^2 + 6 \cdot (x-1) + 3$.

10. $g(y) = \ln^2 y$, $c = 1$.

Rezultat: $T_3(y) = -(y-1)^3 + (y-1)^2$.

11. $h(t) = \sin^3 t$, $c = \pi$.

Rezultat: $T_3(t) = -(t-\pi)^3$.

12. $p(w) = \cos^3 w$, $c = \dfrac{\pi}{2}$.

Rezultat: $T_3(w) = -\left(w - \dfrac{\pi}{2}\right)^3$.

8. GRUPA ZADATAKA

Grafički provjerite da sljedeće $(2\cdot\pi)$-periodične funkcije zadovoljavaju Dirichletove uvjete na segmentu $[-\pi,\pi]$, pa ih aproksimirajte Fourierovim polinomom 3. stupnja na tom segmentu:

1. $f(x)=\begin{cases}6\cdot\pi, \text{ za } x\in[-\pi,\ 0],\\ 12\cdot\pi, \text{ za } x\in\langle 0,\ \pi\rangle.\end{cases}$

Rezultat: f ima prekid u $x=0$ i $x=\pi$, a nema nijedan strogi ekstrem. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta. $F_3(x)=9\cdot\pi+12\cdot\sin x+4\cdot\sin(3\cdot x)$.

2. $g(t)=\begin{cases}0, \text{ za } t\in[-\pi,\ 0],\\ 36\cdot\pi\cdot t, \text{za } t\in\langle 0,\ \pi\rangle.\end{cases}$

Rezultat: f ima prekid u $t=\pi$, a nema nijedan strogi ekstrem. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta. $F_3(t)=9\cdot\pi^2-72\cdot\cos t+36\cdot\pi\cdot\sin t-18\cdot\pi\cdot\sin(2\cdot t)-8\cdot\cos(3\cdot t)+12\cdot\pi\cdot\sin(3\cdot t)$.

3. $h(y)=\begin{cases}\pi\cdot y, \text{ za } y\in\langle -\pi,0\rangle;\\ -\pi, \text{ za } y\in[0,\ \pi].\end{cases}$

Rezultat: f ima prekid u $y=-\pi$ i $y=0$, a nema nijedan strogi ekstrem. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta. $F_3(y)=\left(-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\right)+2\cdot\cos y+(\pi-2)\cdot\sin y-\frac{\pi}{2}\cdot\sin(2\cdot y)+\frac{2}{9}\cdot\cos(3\cdot y)+\left(\frac{\pi-2}{3}\right)\cdot\sin(3\cdot y)$.

Aproksimirajte sljedeće neparne $(2\cdot\pi)$-periodične funkcije Fourierovim polinomom 3. stupnja na segmentu $[-\pi,\pi]$:

4. $f(x)=3\cdot\pi, \text{ za } x\in\langle 0,\ \pi\rangle$.

Rezultat: $F_3(x)=12\cdot\sin x+4\cdot\sin(3\cdot x)$.

5. $g(t)=-6\cdot\pi, \text{ za } t\in\langle -\pi,0\rangle$.

Rezultat: $F_3(t)=24\cdot\sin t+8\cdot\sin(3\cdot t)$.

6. $h(y)=6\cdot\pi\cdot(y+1), \text{ za } y\in\langle 0,\ \pi\rangle$.

Rezultat: $F_3(y)=(12\cdot\pi+24)\cdot\sin y-6\cdot\pi\cdot\sin(2\cdot y)+(4\cdot\pi+8)\cdot\sin(3\cdot y)$.

Aproksimirajte sljedeće parne $(2\cdot\pi)$-periodične funkcije Fourierovim polinomom 3. stupnja na segmentu $[-\pi,\pi]$:

7. $f(x)=18\cdot\pi\cdot|x|$.

Rezultat: $F_3(x)=9\cdot\pi^2-72\cdot\cos x-8\cdot\cos(3\cdot x)$.

8. $g(t)=\pi\cdot t,\ \text{za } t\in[-\pi,\ 0]$.

Rezultat: $F_3(t)=-\dfrac{\pi^2}{2}+4\cdot\cos t+\dfrac{4}{9}\cdot\cos(3\cdot t)$.

9. $h(y)=-36\cdot\pi\cdot y,\ \text{za } y\in[0,\ \pi]$.

Rezultat: $F_3(y)=-18\cdot\pi^2+144\cdot\cos y+16\cdot\cos(3\cdot y)$

9. GRUPA ZADATAKA

1. Izračunajte nepravi integral $I = \int_{-\infty}^{-3} \frac{8}{(\ln 5)\cdot(4\cdot w^2 + 12\cdot w + 5)} \cdot \mathrm{d}w$.

Rezultat: $I = 1$.

2. Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 11\cdot n}{13^n}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultat: Konvergira prema D'Alembertovu kriteriju $\left(r = \frac{1}{13}\right)$.

3. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je zbroj reda $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \mathrm{ctg}^{2\cdot n} x$ jednak $\frac{3}{4}$.

Rezultat: $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{n^2 + n}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultat: $[-2,\ 0]$.

5. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^{n\cdot x+1}}{n}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultat: $\langle -\infty, 0\rangle$.

6. Aproksimirajte realnu funkciju $f(u) = 2\cdot\left[\sin(2\cdot u) - e^u\right]$ MacLaurinovim polinomom 3. stupnja.

Rezultat: $M_3(u) = -3\cdot u^3 - u^2 + 2\cdot u - 2$.

7. Aproksimirajte realnu funkciju $f(y) = 3\cdot\sin^2 y$ Taylorovim polinomom 4. stupnja oko točke $c = 2\cdot\pi$.

Rezultat: $T_4(y) = -(x - 2\cdot\pi)^4 + 3\cdot(x - 2\cdot\pi)^2$.

8. $(2\cdot\pi)$-periodična realna funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$g(t) = \begin{cases} 0, \text{ za } t \in [-\pi,\ 0], \\ -4\cdot\pi\cdot t, \text{za } t \in \langle 0,\ \pi\rangle. \end{cases}$$

a) <u>Isključivo grafički</u> provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na segmentu $[-\pi,\ \pi]$.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju Fourierovim polinomom 1. stupnja na segmentu $[-\pi,\ \pi]$.

Rezultati:

a) g ima prekid u $t=\pi$ i nema strogih lokalnih ekstrema. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $F(t)=-\pi^2+8\cdot\cos t-4\cdot\pi\cdot\sin t$.

9. Parna $(2\cdot\pi)$-periodična funkcija $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$h(t)=\frac{1}{\pi}\cdot t,\ \text{za } t\in[-\pi,0].$$

a) <u>Isključivo grafički</u> provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na segmentu $[-\pi,\ \pi]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju Fourierovim polinomom 3. stupnja na segmentu $[-\pi,\ \pi]$.

Rezultati:

a) f je neprekidna i ima jedinstveni strogi lokalni maksimum 0 za $t=0$. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) $F_3(t)=-\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\cdot\cos t+\frac{4}{9\cdot\pi^2}\cdot\cos(3\cdot t)$.

10. Riješite rekurziju: $a_n=5\cdot a_{n-1}+6\cdot a_{n-2}$ uz početne uvjete $a_1=5,\ a_2=37$.

Rezultat: $a_n=(-1)^n+6^n$.

11. Riješite rekurziju: $b_n-4\cdot b_{n-1}+4\cdot b_{n-2}=0$ uz početne uvjete $b_1=2,\ b_2=8$.

Rezultat: $b_n=n\cdot 2^n$.

10. GRUPA ZADATAKA

1. Izračunajte vrijednost nepravoga integrala

$$I = \int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} \cdot \mathrm{d}x .$$

Rezultat: $I = 1$.

2. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2 \cdot n^3 - n^2 + 7 \cdot n}{3 \cdot n^3 + 1} \right)^n .$$

Svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultat: Konvergira prema Cauchyjevu kriteriju $\left(r = \frac{2}{3} \right)$.

3. Odredite interval konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1} .$$

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultat: $[0, 2\rangle$.

4. Odredite MacLaurinov polinom $M_2(x)$ drugoga stupnja za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu pravilom:

$$f(x) = e^{\sin x}.$$

Rezultat: $M_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + x + 1$.

5. Odredite Taylorov polinom $T_3(t)$ trećega stupnja oko točke $c = -1$ za funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu pravilom:

$$g(t) = \ln^2(t+2).$$

Rezultat: $T_3(t) = -(t+1)^3 + (t+1)^2$

6. Neparna $(2 \cdot \pi)$-periodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$f(x) = \pi \cdot (1 + x), \text{ za } x \in \langle 0, \pi \rangle$$

a) Nacrtajte graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi,\pi]$, pa provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na tom segmentu. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju Fourierovim polinomom $F_3(x)$ trećega stupnja na segmentu $[-\pi,\pi]$.

Rezultati:

a) Vidjeti sliku 1. Zadana funkcija ima točno tri prekida (u $x=-\pi$, $x=0$ i $x=\pi$) i strogo je rastuća, tj. nema strogih lokalnih ekstrema.

Slika 1.

b) $F_3(x)=2\cdot(\pi+2)\cdot\sin x-\pi\cdot\sin(2\cdot x)+\dfrac{2\cdot(\pi+2)}{3}\cdot\sin(3\cdot x).$

11. GRUPA ZADATAKA

1. Isključivo deriviranjem provjerite da je skup S opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe J i navedite neko partikularno rješenje te jednadžbe ako je:

a) $S=\left\{\dfrac{C+t^2}{2\cdot e^t}: C\in\mathbb{R}\right\},\ J\ldots\ e^t\cdot\left(y'+y\right)=t;$

b) $S=\left\{C_1\cdot\sin t+C_2\cdot\cos t-\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot\cos t: C_1,C_2\in\mathbb{R}\right\},\ J\ldots\ y''+y=\sin t.$

2. Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases}(x^2+1)\cdot y\cdot \mathrm{d}y-\operatorname{arctg} x\cdot \mathrm{d}x=0,\\ y(0)=0.\end{cases}$

b) $\begin{cases}x\cdot \mathrm{d}y-y\cdot(x+1)\cdot \mathrm{d}x=0\\ y(1)=e.\end{cases}$

***Rezultati*:**

a) $y=\operatorname{arctg} x$;

b) $y=x\cdot e^x$.

3. Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases}x\cdot y'+y=\sin x,\\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0.\end{cases}$

b) $\begin{cases}(\operatorname{ctg} x)\cdot y'+2\cdot y=2,\\ y(0)=2.\end{cases}$

***Rezultati*:**

a) $y=-\dfrac{\cos x}{x}$;

b) $y=1+\cos^2 x$.

4. Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases}x\cdot\left(y'+y^2\right)=y,\\ y(1)=2.\end{cases}$

b) $\begin{cases} x\cdot\left(y' - y^2\right) + y = 0, \\ y(e) = -\dfrac{1}{e}. \end{cases}$

***Rezultati*:**

a) $y = \dfrac{2}{x}$;

b) $y = -\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$.

5. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (1, 1)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera tangente u svakoj točki te krivulje dvostruko veći od omjera ordinate i apscise te točke.

Rezultat: $y = x^2$.

6. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (1, 2)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera normale u svakoj točki te krivulje jednak umnošku obiju koordinata te točke.

Rezultat: $y = \sqrt{4 - 2\cdot\ln x}$.

12. GRUPA ZADATAKA

1. Odredite opće rješenje sljedećih običnih diferencijalnih jednadžbi uz pretpostavku da je $y = y(x)$:

a) $y'' + y' - 12 \cdot y = 0;$

b) $y'' + 16 \cdot y' + 64 \cdot y = 0;$

c) $y'' + 9 \cdot y = 0.$

Rezultati: U rezultatima svih podzadataka su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ konstante.

a) $y = C_1 \cdot e^{-4 \cdot x} + C_2 \cdot e^{3 \cdot x};$

b) $y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-8 \cdot x};$

c) $y = C_1 \cdot \cos(3 \cdot x) + C_2 \cdot \sin(3 \cdot x).$

2. Odredite neko partikularno rješenje svake od sljedećih jednadžbi:

a) $y'' - 4 \cdot y' + 3 \cdot y = 3 \cdot x - 7;$

b) $y'' + y' = 2 \cdot x;$

c) $y' - y'' = 3 \cdot x^2;$

d) $y'' - 3 \cdot y' + 2 \cdot y = e^{2 \cdot x}.$

Rezultati:

a) $y_p = x - 1;$

b) $y_p = x^2 - 2 \cdot x;$

c) $y_p = x^3 + 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x;$

d) $y_p = x \cdot e^{2 \cdot x}.$

3. Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases} y'' - 4 \cdot y' + 4 \cdot y = 8 \cdot x^3, \\ y(0) = 6, \\ y(1) = 23; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' + y = 2 \cdot \sin x, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1, \\ y(\pi) = \pi; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' + 4 \cdot y = 4 \cdot \cos(2 \cdot x), \\ y(0) = 1, \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} y'' - 9 \cdot y = 6 \cdot e^{3 \cdot x}, \\ y(0) = 1, \\ y(1) = 2 \cdot e^{3}. \end{cases}$

Rezultati:

a) $y = 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 6;$
b) $y = \sin x - x \cdot \cos x;$
c) $y = \cos(2 \cdot x) + x \cdot \sin(2 \cdot x);$
d) $y = (x+1) \cdot e^{3 \cdot x}.$

13. GRUPA ZADATAKA

1. Isključivo primjenom Laplaceove transformacije riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases} y'' + y' + y = x + 6, \\ y(0) = 5, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' + y' + x + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' + y' = 2 \cdot x + 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} y'' - y' = 2 \cdot (x - 1), \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} y'' - y' - 2 \cdot y = -2 \cdot e^x, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

f) $\begin{cases} y'' + y' - y + 5 \cdot \sin x = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

g) $\begin{cases} y'' + 2 \cdot y' + 2 \cdot y + 10 \cdot \sin(2 \cdot x) = 0, \\ y(0) = y'(0) = 2. \end{cases}$

h) $\begin{cases} y'' - y' = 2 \cdot e^x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

i) $\begin{cases} y'' + y = 8 \cdot \cos x, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

j) $\begin{cases} y'' + y + 6 \cdot \sin x = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$

k) $\begin{cases} y'' - 2 \cdot y' + 4 \cdot x = 2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

***Rezultati*:**

a) $y = x + 5;$

b) $y = -x + 1;$

c) $y = x^2 - x;$

d) $y = -x^2 + 2;$

e) $y = 2 \cdot \mathrm{ch}\, x = e^x + e^{-x};$

f) $y = 2 \cdot \sin x + \cos x;$;

g) $y = \sin(2 \cdot x) + 2 \cdot \cos(2 \cdot x);$

h) $y = 2 \cdot x \cdot e^x;$

i) $y = 4 \cdot x \cdot \sin x;$

j) $y = 3 \cdot x \cdot \cos x;$

k) $y = x^2 + e^{2 \cdot x}.$

14. GRUPA ZADATAKA

1. Pokažite da je funkcija $u=\left(x^3-6\cdot x^2+18\cdot x+2018\right)\cdot e^x$ partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$u'''-u''=3\cdot x^2\cdot e^x.$$

Uputa: $u''=(x^3+2042)\cdot e^x$, $u'''=(x^3+3\cdot x^2+2042)\cdot e^x \Rightarrow u'''-u''=3\cdot x^2\cdot e^x$.

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme i pojednostavnite dobivene izraze što više možete:

2. $\begin{cases} x\cdot y'-2\cdot y+2\cdot\sqrt{y}=0, \\ y(2)=9. \end{cases}$

Rezultat: $y=(x+1)^2=x^2+2\cdot x+1.$

3. $\begin{cases} y'-(\operatorname{ctg} x)\cdot y=0, \\ y\left(\dfrac{9}{2}\cdot\pi\right)=1. \end{cases}$

Rezultat: $y=\sin x.$

4. $\begin{cases} y''+8\cdot y'+17\cdot y=0, \\ y(0)=1, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0. \end{cases}$ (Pretpostavite da je $y=y(t)$.)

Rezultat: $y=e^{-4\cdot t}\cdot\cos t$.

5. <u>Isključivo pomoću Laplaceovih transformata</u> riješite sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y''+y=8\cdot\sin w, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=-4. \end{cases}$$

Rezultat: $y=-4\cdot w\cdot\cos w$.

6. Odredite jednadžbu ravninske krivulje koja prolazi točkom $T=(0,-3)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera tangente u bilo kojoj njezinoj točki za 3 veći od zbroja obiju koordinata te točke.

Rezultat: $y=e^x-x-4$.

15. GRUPA ZADATAKA

1. Odredite opće rješenje $y = y(x)$ obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 8 \cdot y' + 17 \cdot y = 0.$$

Rezultat: $y = (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x) \cdot e^{4 \cdot x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Pokažite da je funkcija $u = t^2 + t - e^{-\frac{1}{2} \cdot t} + 2018$ partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$2 \cdot u''' + u'' = 2.$$

Uputa: $u'' = 2 - \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t}$, $u''' = \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} \Rightarrow 2 \cdot u''' + u'' = 2.$

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme i pojednostavnite dobivene izraze što više možete:

3. $\begin{cases} x \cdot y' - y + x^2 \cdot \sin x = 0, \\ y(\pi) = -\pi. \end{cases}$

Rezultat: $y = x \cdot \cos x.$

4. $\begin{cases} y' + (\text{ctg}\, w) \cdot y = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Rezultat: $y = \cos x.$

5. <u>Isključivo pomoću Laplaceovih transformata</u> riješite sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} 2 \cdot y'' - 3 \cdot y' = 2 \cdot e^{2 \cdot t}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Rezultat: $y = e^{2 \cdot t}.$

6. Odredite eksplicitnu jednadžbu ravninske krivulje koja dodiruje pravac $p \ldots y = \frac{1}{2}$, a određena je običnom diferencijalnom jednadžbom $x^2 \cdot y' + x \cdot y = 2 \cdot y^2$. Pojednostavnite dobivenu jednadžbu što više možete.

Rezultat: $y = \frac{x}{x^2 + 1}.$

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. GRUPA ZADATAKA

1. U svim podzadacima treba provjeriti jednakost $F' = f$.

a) $F'(x) = \left(\frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}\right)' - (x)' + 2\cdot\left(\sqrt{x}\right)' - 2\cdot\left[\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right]' - (2018^{2017})' =$

$$= \left(\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right)' - 1 + 2\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)' - 0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}-1} - 1 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)' =$$

$$= x^{\frac{1}{2}} - 1 + x^{-\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}} - 1 + x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right) - \left(\sqrt{x}+1\right) + x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right) - x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{x} + x^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x} - 1 + x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{x} + x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}+1} =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - 1 + x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}+1} = \frac{x^1 - 1 + x^0}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x}{\sqrt{x}+1} = f(x).$$

b) $F'(t) = \frac{1}{2}\cdot\left[\ln(t^2+1)\right]' - (\operatorname{arctg} t)' + (2017^{2018})' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\cdot(t^2+1)' - \frac{1}{t^2+1} + 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\cdot 2\cdot t - \frac{1}{t^2+1} =$

$$= \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} = \frac{t-1}{t^2+1} = f(t).$$

2. Koristeći formule za kvadrat razlike i razliku kvadrata, svaki od zadanih neodređenih integrala treba svesti na zbroj tabličnih integrala.

a) Najprije imamo:

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}} + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2}\cdot 2} - 2\cdot x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}\cdot 2} = x^1 - 2\cdot x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}}.$$

Stoga je:

$$I = \int x^1\cdot\mathrm{d}x - 2\cdot\int x^{\frac{5}{6}}\cdot\mathrm{d}x - \int x^{\frac{2}{3}}\cdot\mathrm{d}x = \frac{1}{1+1}\cdot x^{1+1} - 2\cdot\frac{1}{\frac{5}{6}+1}\cdot x^{\frac{5}{6}+1} + \frac{1}{\frac{2}{3}+1}\cdot x^{\frac{2}{3}+1} = \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{12}{11}\cdot x^{\frac{11}{6}} + \frac{3}{5}\cdot x^{\frac{5}{3}} + C.$$

b) Najprije imamo:

$$\left(t^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}} - t^2\right) = \left(t^2 + t^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(t^{-\frac{1}{3}} - t^2\right) = \left(t^{-\frac{1}{3}} - t^2\right)\cdot\left(t^{-\frac{1}{3}} + t^2\right) = \left(t^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(t^2\right)^2 = t^{-\frac{2}{3}} - t^4.$$

Stoga je:

$$I = \int t^{-\frac{2}{3}}\cdot\mathrm{d}t - \int t^4\cdot\mathrm{d}t = \frac{1}{-\frac{2}{3}+1}\cdot t^{-\frac{2}{3}+1} - \frac{1}{4+1}\cdot t^{4+1} = 3\cdot t^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}\cdot t^5 + C.$$

c) Najprije imamo:

$$\left(\sqrt[3]{u}-\frac{1}{\sqrt[4]{u}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{u}}+\sqrt[3]{u}\right)=\left(u^{\frac{1}{3}}-u^{-\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(u^{-\frac{1}{4}}+u^{\frac{1}{3}}\right)=\left(u^{\frac{1}{3}}-u^{-\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(u^{\frac{1}{3}}+u^{-\frac{1}{4}}\right)=$$

$$=\left(u^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(u^{-\frac{1}{4}}\right)^2=u^{\frac{2}{3}}-u^{-\frac{1}{2}}.$$

Stoga je:

$$I=\int u^{\frac{2}{3}}\cdot\mathrm{d}u-\int u^{-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{d}u=\frac{1}{\frac{2}{3}+1}\cdot u^{\frac{2}{3}+1}-\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\cdot u^{-\frac{1}{2}+1}=\frac{3}{5}\cdot u^{\frac{5}{3}}-2\cdot u^{\frac{1}{2}}+C.$$

3.

a) $$\int x\cdot(4\cdot x-1)^{10}\cdot\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l} t=4\cdot x-1\\ x=\frac{1}{4}\cdot(t+1)\\ \mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot\mathrm{d}t\end{array}\right\}=\int\frac{1}{4}\cdot(t+1)\cdot t^{10}\cdot\frac{1}{4}\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{16}\cdot\int(t^{11}+t^{10})\cdot\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left[\int t^{11}\cdot\mathrm{d}t+\int t^{10}\cdot\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{16}\cdot\left[\frac{1}{11+1}\cdot t^{11+1}+\frac{1}{10+1}\cdot t^{10+1}\right]=\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{12}\cdot t^{12}+\frac{1}{11}\cdot t^{11}\right)=$$

$$=\frac{1}{192}\cdot t^{12}+\frac{1}{176}\cdot t^{11}=\frac{1}{192}\cdot(4\cdot x-1)^{12}+\frac{1}{176}\cdot(4\cdot x-1)^{11}+C.$$

b) $$\int\frac{\ln^3(t+1)}{2\cdot t+2}\cdot\mathrm{d}t=\int\frac{\ln^3(t+1)}{2\cdot(t+1)}\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{\ln^3(t+1)}{t+1}\cdot\mathrm{d}t=\left\{\begin{array}{l} x=\ln(t+1)\\ \mathrm{d}x=\frac{1}{t+1}\cdot\mathrm{d}t\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\int x^3\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+1}\cdot x^{3+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot x^4=\frac{1}{8}\cdot x^4=\frac{1}{8}\cdot\ln^4(t+1)+C.$$

c) $$\int\frac{6\cdot e^{2\cdot w}}{e^{2\cdot w}+2018}\cdot\mathrm{d}w=3\cdot\int\frac{2\cdot e^{2\cdot w}}{e^{2\cdot w}+2018}\cdot\mathrm{d}w=\left\{\begin{array}{l} t=e^{2\cdot w}+2018\\ \mathrm{d}t=2\cdot e^{2\cdot w}\cdot\mathrm{d}w\end{array}\right\}=3\cdot\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=3\cdot\ln|t|=$$

$$=3\cdot\ln\left|\underbrace{e^{2\cdot w}+2018}_{>0}\right|=3\cdot\ln\left(e^{2\cdot w}+2018\right)+C.$$

4.

a) $$\int(1-x)\cdot\cos x\cdot\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} u=1-x & v=\int\cos x\cdot\mathrm{d}x=\sin x\\ \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=\cos x\cdot\mathrm{d}x\end{array}\right|=(1-x)\cdot\sin x-\int\sin x\cdot(-\mathrm{d}x)=$$

$$=(1-x)\cdot\sin x-\int-\sin x\cdot\mathrm{d}x=(1-x)\cdot\sin x-\cos x+C.$$

b) $\int 50\cdot\sqrt[3]{u^2}\cdot\ln\left(\sqrt{u}\right)\cdot du=\int 50\cdot u^{\frac{2}{3}}\cdot\ln\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot du=\int 50\cdot u^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln u\cdot du=\int 25\cdot u^{\frac{2}{3}}\cdot\ln u\cdot du=$

$$=\left|\begin{matrix} x=25\cdot\ln u & y=\int u^{\frac{2}{3}}\cdot du=\frac{1}{\frac{2}{3}+1}\cdot u^{\frac{2}{3}+1}=\frac{3}{5}\cdot u^{\frac{5}{3}} \\ dx=25\cdot\frac{1}{u}\cdot du=\frac{25}{u}\cdot du & dy=u^{\frac{2}{3}}\cdot du \end{matrix}\right|=25\cdot\ln u\cdot\frac{3}{5}\cdot u^{\frac{5}{3}}-\int\frac{3}{5}\cdot u^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{25}{u}\cdot du=$$

$$=15\cdot u^{\frac{5}{3}}\cdot\ln u-15\cdot\int\frac{u^{\frac{5}{3}}}{u}\cdot du=15\cdot u^{\frac{5}{3}}\cdot\ln u-15\cdot\int u^{\frac{2}{3}}\cdot du=15\cdot u^{\frac{5}{3}}\cdot\ln u-15\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}+1}\cdot u^{\frac{2}{3}+1}=15\cdot u^{\frac{5}{3}}\cdot\ln u-9\cdot u^{\frac{5}{3}}+C.$$

c) $\int 4\cdot t\cdot\operatorname{arcctg} t\cdot dt=\left|\begin{matrix} u=\operatorname{arcctg} t & v=\int 4\cdot t\cdot dt=4\cdot\int t^1\cdot dt=4\cdot\frac{1}{1+1}\cdot t^{1+1}=2\cdot t^2 \\ du=-\frac{1}{t^2+1}\cdot dt & dv=4\cdot t\cdot dt \end{matrix}\right|=$

$$=2\cdot t^2\cdot\operatorname{arcctg} t-\int 2\cdot t^2\cdot\left(-\frac{1}{t^2+1}\right)\cdot dt=2\cdot t^2\cdot\operatorname{arcctg} t+2\cdot\int\frac{t^2}{t^2+1}\cdot dt=2\cdot t^2\cdot\operatorname{arcctg} t+2\cdot\int\left(\frac{t^2+1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)\cdot dt=$$

$$=2\cdot t^2\cdot\operatorname{arcctg} t+2\cdot\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\cdot dt=2\cdot t^2\cdot\operatorname{arcctg} t+2\cdot\left(\int dt-\int\frac{1}{t^2+1}\cdot dt\right)=2\cdot t^2\cdot\operatorname{arcctg} t+2\cdot\left(t-\operatorname{arctg} t\right)=$$

$$=\text{ (koristimo: } \operatorname{arctg} t=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} t)=2\cdot t^2\cdot\operatorname{arcctg} t+2\cdot t-2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} t\right)+C=2\cdot t^2\cdot\operatorname{arcctg} t+2\cdot t-\pi+$$

$$+2\cdot\operatorname{arcctg} t+C=2\cdot t^2\cdot\operatorname{arcctg} t+2\cdot t+2\cdot\operatorname{arcctg} t+\underbrace{C-\pi}_{=C_1}=2\cdot t^2\cdot\operatorname{arcctg} t+2\cdot t+2\cdot\operatorname{arcctg} t+C_1.$$

5.

a) $\int 4034\cdot x^{4033}\cdot e^{x^{2017}}\cdot dx=\left\{\begin{matrix} \text{zamjena: } t=x^{2017}, \\ dt=2017\cdot x^{2016}\cdot dx \\ 4034\cdot x^{4033}\cdot dx=2\cdot 2017\cdot x^{2017}\cdot x^{2016}\cdot dx=2\cdot x^{2017}\cdot(2017\cdot x^{2016}\cdot dx)=2\cdot t\cdot dt \end{matrix}\right\}$

$$=\int 2\cdot t\cdot e^t\cdot dt=\left|\begin{matrix} u=2\cdot t & v=\int e^t\cdot dt=e^t \\ du=2\cdot dt & dv=e^t\cdot dt \end{matrix}\right|=2\cdot t\cdot e^t-\int 2\cdot e^t\cdot dt=2\cdot t\cdot e^t-2\cdot e^t=2\cdot e^t\cdot(t-1)=$$

$$=2\cdot e^{x^{2017}}\cdot\left(x^{2017}-1\right)+C.$$

b) $\int\cos\sqrt{t}\cdot dt=\left\{\begin{matrix} \text{zamjena: } x=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}, \\ dx=\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\cdot dt=\frac{1}{2\cdot\sqrt{t}}\cdot dt=\frac{1}{2\cdot x}\cdot dt\Rightarrow dt=2\cdot x\cdot dx \end{matrix}\right\}=\int 2\cdot x\cdot\cos x\cdot dx=$

$$=\left|\begin{matrix} u=2\cdot x & v=\int\cos x\cdot dx=\sin x \\ du=2\cdot dx & dv=\cos x\cdot dx \end{matrix}\right|=2\cdot x\cdot\sin x-\int 2\cdot\sin x\cdot dx=2\cdot x\cdot\sin x+2\cdot\cos x=2\cdot\sqrt{t}\cdot\sin\sqrt{t}+2\cdot\cos\sqrt{t}+C.$$

6.

a) $$\int \sqrt[3]{x}\cdot \ln x\cdot dx=\int x^{\frac{1}{3}}\cdot \ln x\cdot \mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} u=\ln x & v=\int x^{\frac{1}{3}}\cdot \mathrm{d}x=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}} \\ \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v=x^{\frac{1}{3}}\cdot \mathrm{d}x \end{matrix}\right|=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot \ln x-\int \frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot \ln x-\frac{3}{4}\cdot \int x^{\frac{1}{3}}\cdot \mathrm{d}x=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot \ln x-\frac{3}{4}\cdot \frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot \ln x-\frac{9}{16}\cdot x^{\frac{4}{3}}+C.$$

$$F(1)=\frac{7}{16}\Rightarrow \frac{7}{16}=\frac{3}{4}\cdot 1^{\frac{4}{3}}\cdot \ln 1-\frac{9}{16}\cdot 1^{\frac{4}{3}}+C\Rightarrow \frac{7}{16}=C-\frac{9}{16}\Rightarrow C=1\Rightarrow$$

$$F(x)=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot \ln x-\frac{9}{16}\cdot x^{\frac{4}{3}}+1.$$

b) $$\int \arccos\left(\frac{u}{2}\right)\cdot \mathrm{d}u=\left|\begin{matrix} x=\arccos\left(\frac{u}{2}\right) & v=\int \mathrm{d}u=u \\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}}\cdot \mathrm{d}u=-\frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\cdot \mathrm{d}u & \mathrm{d}v=\mathrm{d}u \end{matrix}\right|=$$

$$=u\cdot \arccos\left(\frac{u}{2}\right)-\int -\frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\cdot \mathrm{d}u=\left\{\begin{matrix} \text{zamjena: } t=4-u^2 \\ \mathrm{d}t=-2\cdot u\cdot \mathrm{d}u \\ -u\cdot \mathrm{d}u=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}t \end{matrix}\right\}=u\cdot \arccos\left(\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot \mathrm{d}t=$$

$$=u\cdot \arccos\left(\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot \int t^{-\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{d}t=u\cdot \arccos\left(\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot t^{\frac{1}{2}}=u\cdot \arccos\left(\frac{u}{2}\right)-\sqrt{4-u^2}+C.$$

$$G(-2)=-2\cdot \pi\Rightarrow -2\cdot \pi=(-2)\cdot \arccos\left(-\frac{2}{2}\right)-\sqrt{4-(-2)^2}+C\Rightarrow -2\cdot \pi=(-2)\cdot \pi+0+C\Rightarrow C=0\Rightarrow$$

$$G(u)=u\cdot \arccos\left(\frac{u}{2}\right)-\sqrt{4-u^2}.$$

2. GRUPA ZADATAKA

1. **a)** Riješimo jednadžbu $x^3 - x^2 - 2\cdot x = 0$. Ona je ekvivalentna jednadžbi $x\cdot(x^2 - x - 2) = 0$. Sva rješenja te jednadžbe su $x_1 = -1,\ x_2 = 0$ i $x_3 = 2$. Koristeći Osnovni poučak algebre, zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$x^3 - x^2 - 2\cdot x = x\cdot(x+1)\cdot(x-2).$$

Dakle, pripadni rastav na parcijalne razlomke ima oblik:

$$\frac{6}{x^3 - x^2 - 2\cdot x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Množenjem ove jednakosti s $x\cdot(x+1)\cdot(x-2)$ dobijemo:

$$6 = A\cdot(x+1)\cdot(x-2) + B\cdot x\cdot(x-2) + C\cdot x\cdot(x+1).$$

Ovamo zasebno uvrstimo $x = -1,\ x = 0$ i $x = 2$, pa dobijemo $(A,B,C) = (-3,2,1)$. Stoga je polazni integral jednak:

$$I = (-3)\cdot\int\frac{1}{x}\cdot\mathrm{d}x + 2\cdot\int\frac{1}{x+1}\cdot\mathrm{d}x + \int\frac{1}{x-2}\cdot\mathrm{d}x = \ln|x-2| + 2\cdot\ln|x+1| - 3\cdot\ln|x| + C.$$

b) Rastavimo najprije nazivnik podintegralne funkcije na faktore. Imamo redom:

$$t^3 - 2\cdot t^2 - 4\cdot t + 8 = t^2\cdot(t-2) - 4\cdot(t-2) = (t-2)\cdot(t^2-4) = (t-2)\cdot(t-2)\cdot(t+2) = (t-2)^2\cdot(t+2).$$

Odatle lagano slijedi da su nultočke toga izraza $t_1 = -2,\ t_2 = 2$. Dakle, pripadni rastav na parcijalne razlomke ima oblik:

$$\frac{16}{t^3 - 2\cdot t^2 - 4\cdot t + 8} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{(t-2)^2} + \frac{C}{t+2}.$$

Množenjem te jednakosti s $(t-2)^2\cdot(t+2)$ dobivamo:

$$16 = A\cdot(t-2)\cdot(t+2) + B\cdot(t+2) + C\cdot(t-2)^2.$$

Ovamo zasebno uvrstimo $t = -2,\ t = 0$ i $t = 2$, pa dobijemo $(A,B,C) = (-1,4,1)$. Stoga je polazni integral jednak:

$$I = -\int\frac{1}{t-2}\cdot\mathrm{d}t + 4\cdot\int\frac{1}{(t-2)^2}\cdot\mathrm{d}t + \int\frac{1}{t+2}\cdot\mathrm{d}t = -\ln|t-2| - \frac{4}{t-2} + \ln|t+2| + C.$$

c) Rastavimo najprije izraz $u^3 + u^2 + u + 1$ na faktore. Imamo redom:

$$u^3 + u^2 + u + 1 = u^2\cdot(u+1) + (u+1) = (u+1)\cdot(u^2+1).$$

Dakle, pripadni rastav na parcijalne razlomke ima oblik:

$$\frac{4}{u^3 + u^2 + u + 1} = \frac{A}{u+1} + \frac{B\cdot u + D}{u^2+1}.$$

Množenjem te jednakosti izrazom $(u+1)\cdot(u^2+1)$ dobivamo:

$$4 = A\cdot(u^2+1)+(B\cdot u+D)\cdot(u+1).$$

Ovamo zasebno uvrstimo $u=-1$, $u=0$ i $u=1$, pa dobijemo $(A,B,C)=(2,-2,2)$. Stoga je polazni integral jednak:

$$I = 2\cdot\int\frac{1}{u+1}\cdot\mathrm{d}u+\int\frac{-2\cdot u+2}{u^2+1}\cdot\mathrm{d}u = 2\cdot\int\frac{1}{u+1}\cdot\mathrm{d}u-\int\frac{2\cdot u}{u^2+1}\cdot\mathrm{d}u+2\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\cdot\mathrm{d}u.$$

Treći integral je tablični integral, pa odredimo prva dva integrala koristeći metodu zamjene:

$$\int\frac{1}{u+1}\cdot\mathrm{d}u=\left\{\begin{matrix}\text{zamjena:}\\ t=u+1,\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}u\end{matrix}\right\}=\int\frac{1}{t}\cdot\mathrm{d}t=\ln|t|=\ln|u+1|,$$

$$\int\frac{2\cdot u}{u^2+1}\cdot\mathrm{d}u=\left\{\begin{matrix}\text{zamjena:}\\ t=u^2+1,\\ \mathrm{d}t=2\cdot u\cdot\mathrm{d}u\end{matrix}\right\}=\int\frac{1}{t}\cdot\mathrm{d}t=\ln|t|=\ln\left|\underbrace{u^2+1}_{>0}\right|=\ln(u^2+1).$$

Dakle, rješenje zadatka je:

$$I = 2\cdot\ln|u+1|-\ln(u^2+1)+2\cdot\operatorname{arctg}u+C.$$

2. **a)** Najprije odredimo $A,B\in\mathbb{R}$ takve da vrijedi jednakost:

$$2\cdot\sqrt{3}\cdot y = A\cdot(y^2+y+1)'+B.$$

Imamo redom:

$$2\cdot\sqrt{3}\cdot y = A\cdot(2\cdot y+1)+B,$$
$$2\cdot\sqrt{3}\cdot y = 2\cdot A\cdot y+A+B,$$
$$\begin{cases}2\cdot A=2\cdot\sqrt{3},\\ A+B=0\end{cases}\Leftrightarrow(A,B)=\left(\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$$

Zbog toga je:

$$I=\sqrt{3}\cdot\ln\left(y^2+y+1\right)-\sqrt{3}\cdot\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2+y+1}=\sqrt{3}\cdot\ln\left(y^2+y+1\right)-\sqrt{3}\cdot\int\frac{\mathrm{d}y}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\left\{\begin{matrix}\text{zamjena:}\\ t:=y+\frac{1}{2}\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}y\end{matrix}\right\}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot y+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow I=\sqrt{3}\cdot\ln\left(y^2+y+1\right)-2\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot y+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

b) Postupimo analogno kao u **a)** podzadatku. Odredimo $A,B\in\mathbb{R}$ takve da vrijedi jednakost:

$$3\cdot w-2=\check{S}\cdot(w^2+3\cdot w+4)'+\acute{C}.$$

Imamo redom:

$$3\cdot w-2=A\cdot(2\cdot w+3)+B,$$
$$3\cdot w-2=2\cdot A\cdot w+3\cdot A+B,$$
$$\begin{cases}2\cdot A=3,\\ 3\cdot A+B=-2\end{cases}\Leftrightarrow (A,B)=\left(\frac{3}{2},-\frac{13}{2}\right)$$

Zbog toga je:

$$I=\frac{3}{2}\cdot\ln\left(w^2+3\cdot w+4\right)-\frac{13}{2}\cdot\int\frac{\mathrm{d}w}{w^2+3\cdot w+4}=\frac{3}{2}\cdot\ln\left(w^2+3\cdot w+4\right)-\frac{13}{2}\cdot\int\frac{\mathrm{d}w}{\left(w+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}.$$

$$\int\frac{\mathrm{d}w}{\left(w+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\begin{Bmatrix}\text{zamjena:}\\ t:=w+\frac{3}{2}\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}w\end{Bmatrix}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{7}{4}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot w+3}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\Rightarrow I=\frac{3}{2}\cdot\ln\left(w^2+3\cdot w+4\right)-\frac{13}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot w+3}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

3. **a)** Budući da je $\alpha^2+\alpha=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, zamijenimo $\begin{cases}t:=\alpha+\frac{1}{2},\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}\alpha\end{cases}$. Dobiva se:

$$8\cdot\int\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\cdot\mathrm{d}t=8\cdot\left[\frac{t}{2}\cdot\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}-\frac{1}{8}\cdot\ln\left(t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right)\right]=4\cdot t\cdot\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}-\ln\left(t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right)$$

pa konačno dobijemo:

$$\begin{aligned}I&=4\cdot\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha}-\ln\left(\alpha+\frac{1}{2}+\sqrt{\alpha^2+\alpha}\right)=\\&=2\cdot(2\cdot\alpha+1)\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha}-\ln\left[\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot\alpha+1+2\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha}\right)\right]=\\&=2\cdot(2\cdot\alpha+1)\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(2\cdot\alpha+1+2\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha}\right)=\\&=2\cdot(2\cdot\alpha+1)\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha}-\ln\left(2\cdot\alpha+1+2\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha}\right)+C.\end{aligned}$$

Napomena: Ovdje smo skratili postupak tako da smo umjesto konstante $C_1:=C+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ odmah pisali rješenje koristeći konstantu C, a ne konstantu C_1. To je dozvoljeno kad god se u sređenom izrazu pojavi konstanta kao zaseban pribrojnik.

b) Radikand u podintegralnoj funkciji transformirajmo ovako:

$$12-\beta-\beta^2=(-1)\cdot(\beta^2+\beta-12)=(-1)\cdot\left[\left(\beta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right]=\frac{49}{4}-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Zamjenom

$$\begin{cases} t := \beta + \dfrac{1}{2}, \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\beta \end{cases}$$

dobivamo:

$$I = 8\cdot\int\sqrt{\frac{49}{4}-t^2}\cdot\mathrm{d}t = 8\cdot\int\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-t^2}\cdot\mathrm{d}t = 8\cdot\frac{t}{2}\cdot\sqrt{\frac{49}{4}-t^2}+8\cdot\frac{\frac{49}{4}}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{t}{\frac{7}{2}}\right) = 4\cdot t\cdot\sqrt{\frac{49}{4}-t^2}+49\cdot\arcsin\left(\frac{2\cdot t}{7}\right),$$

pa vraćanjem zamjene slijedi:

$$I = 2\cdot(2\cdot\beta+1)\cdot\sqrt{12-\beta-\beta^2}+49\cdot\arcsin\left(\frac{2\cdot\beta+1}{7}\right)+C.$$

c) U ovom slučaju vrijedi identitet:

$$\gamma^2-6\cdot\gamma = (\gamma-3)^2-9\,.$$

Zamjenom $\begin{cases} t := \gamma-3, \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\gamma \end{cases}$ dobivamo:

$$I = \int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-9}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-9}\right| = \ln\left|\gamma-3+\sqrt{\gamma^2-6\cdot\gamma}\right|+C.$$

d) Radikand u podintegralnoj funkciji transformirajmo ovako:

$$4\cdot\varepsilon-\varepsilon^2 = (-1)\cdot(\varepsilon^2-4\cdot\varepsilon) = (-1)\cdot\left[(\varepsilon-2)^2-4\right] = 4-(\varepsilon-2)^2\,.$$

Zamijenimo $\begin{cases} t := \varepsilon-2, \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\varepsilon \end{cases}$, pa dobijemo:

$$I = \int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}} = \int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2^2-t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{\varepsilon-2}{2}\right)+C.$$

4. **a)** Dijeljenjem brojnika racionalne funkcije nazivnikom te funkcije dobijemo:

$$\frac{\lambda^2}{\lambda+1} = \lambda-1+\frac{1}{\lambda+1}\,.$$

Stoga je

$$I = \int\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\cdot\mathrm{d}\lambda = \int\lambda\cdot\mathrm{d}\lambda-\int 1\cdot\mathrm{d}\lambda+\int\frac{1}{\lambda+1}\cdot\mathrm{d}\lambda \overset{1.c)}{=} \frac{1}{2}\cdot\lambda^2-\lambda+\ln|\lambda+1|+C..$$

Ovamo uvrstimo $\lambda = 0$ i $I = 1$, pa dobijemo jednadžbu $1 = 0-0+0+C$, a odatle je $C = 1$. Dakle, rješenje zadatka je funkcija:

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\cdot\lambda^2-\lambda+1+\ln|\lambda+1|\,.$$

b) Nazivnik podintegralne funkcije rastavimo na parcijalne razlomke. Imamo:

$$\frac{\mu+1}{\mu^2-\mu}=\frac{A}{\mu}+\frac{B}{\mu-1}\Rightarrow \mu+1=A\cdot(\mu-1)+B\cdot\mu\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{uvrstimo:}\\ \mu=0 \text{ i } \mu=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow (A,B)=(-1,2)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu+1}{\mu^2-\mu}=-\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\mu-1}\Rightarrow I=\int\frac{\mu+1}{\mu^2-\mu}\cdot \mathrm{d}\mu=-\int\frac{1}{\mu}\cdot\mathrm{d}\mu+2\cdot\int\frac{1}{\mu-1}\cdot\mathrm{d}\mu=-\ln|\mu|+2\cdot\ln|\mu-1|+C$$

Uvrstimo $\mu=\frac{1}{2}$ i $I=\ln 2$, pa dobijemo:

$$\begin{aligned}
&-\ln 2=-\ln\left|\frac{1}{2}\right|+2\cdot\ln\left|\frac{1}{2}-1\right|+C,\\
&-\ln 2=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+2\cdot\ln\left|-\frac{1}{2}\right|+C,\\
&-\ln 2=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+2\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)+C,\\
&-\ln 2=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+C,\\
&-\ln 2=\ln 1-\ln 2+C,\\
&0=0+C,\\
&C=0.
\end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$G(\mu)=-\ln|\mu|+2\cdot\ln|\mu-1|=\ln\left|\frac{(\mu-1)^2}{\mu}\right|=\ln\left|\frac{\mu^2-2\cdot\mu+1}{\mu}\right|=\ln\left|\mu-2+\frac{1}{\mu}\right|.$$

Napomena: Integral $I=\int\frac{\mu+1}{\mu^2-\mu}\cdot\mathrm{d}\mu$ se može odrediti i postupkom opisanim u zadatku 2. U tom slučaju se dobije:

$$I=\frac{1}{2}\cdot\ln|\mu^2-\mu|+\frac{3}{2}\cdot\int\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^2-\mu}=\frac{1}{2}\cdot\ln|\mu^2-\mu|+\frac{3}{2}\cdot\int\frac{\mathrm{d}\mu}{\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\ln|\mu^2-\mu|+\frac{3}{2}\cdot\ln\left|\frac{\mu-1}{\mu}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ln|\mu\cdot(\mu-1)|+\frac{3}{2}\cdot\ln\left|\frac{\mu-1}{\mu}\right|=\frac{1}{2}\cdot\ln|\mu|+\frac{1}{2}\cdot\ln|\mu-1|+\frac{3}{2}\cdot\ln|\mu-1|-\frac{3}{2}\cdot\ln|\mu|=2\cdot\ln|\mu-1|-\ln|\mu|+C,$$

pa se dalje rješavanje nastavlja kao i gore.

3. GRUPA ZADATAKA

1.

a) $\int \sin^5 x \cdot \cos^8 x \cdot \mathrm{d}x = \int \sin^4 x \cdot \sin x \cdot \cos^8 x \cdot \mathrm{d}x = \int (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x \cdot \cos^8 x \cdot \mathrm{d}x =$

$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x \cdot \cos^8 x \cdot \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena: } t := \cos x, \\ \mathrm{d}t = -\sin x \cdot \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int (1-t^2)^2 \cdot t^8 \cdot (-\mathrm{d}t) =$$

$$= -\int (1-2\cdot t^2 + t^4) \cdot t^8 \cdot \mathrm{d}t = -\int t^8 \cdot \mathrm{d}t + 2 \cdot \int t^{10} \cdot \mathrm{d}t - \int t^{12} \cdot \mathrm{d}t = -\frac{1}{9} \cdot t^9 + \frac{2}{11} \cdot t^{11} - \frac{1}{13} \cdot t^{13} =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \cos^9 x + \frac{2}{11} \cdot \cos^{11} x - \frac{1}{13} \cdot \cos^{13} x + C;$$

b) $\int \sin^6 y \cdot \cos^5 y \cdot \mathrm{d}y = \int \sin^6 y \cdot \cos^4 y \cdot \cos y \cdot \mathrm{d}y = \int \sin^6 y \cdot (\cos^2 y)^2 \cdot \cos y \cdot \mathrm{d}y =$

$$= \int \sin^6 y \cdot (1-\sin^2 y)^2 \cdot \cos y \cdot \mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena: } t := \sin y, \\ \mathrm{d}t = \cos y \cdot \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \int t^6 \cdot (1-t^2)^2 \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \int t^6 \cdot (1-2\cdot t^2 + t^4) \cdot \mathrm{d}t = \int t^6 \cdot \mathrm{d}t - 2 \cdot \int t^8 \cdot \mathrm{d}t + \int t^{10} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{7} \cdot t^7 - \frac{2}{9} \cdot t^9 + \frac{1}{11} \cdot t^{11} =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \sin^7 y - \frac{2}{9} \cdot \sin^9 y + \frac{1}{11} \cdot \sin^{11} y + C;$$

c) $\int \mathrm{ctg}^3 t \cdot \mathrm{d}t = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^3 t} \cdot \mathrm{d}t = \int \cos^3 t \cdot (\sin t)^{-3} \cdot \mathrm{d}t = \int \cos t \cdot \cos^2 t \cdot (\sin t)^{-3} \cdot \mathrm{d}t =$

$$= \int \cos t \cdot (1-\sin^2 t) \cdot (\sin t)^{-3} \cdot \mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena: } x = \sin t, \\ \mathrm{d}x = \cos t \cdot \mathrm{d}t \end{array} \right\} = \int (1-x^2) \cdot x^{-3} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \int x^{-3} \cdot \mathrm{d}x - \int x^{-1} \cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot x^{-2} - \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{2 \cdot x^2} - \ln|x| = -\frac{1}{2 \cdot \sin^2 t} - \ln|\sin t| + C.$$

2. U svim zadacima treba primijeniti osnovni hiperbolni identitet $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

a) $\int \mathrm{sh}^5 x \cdot \mathrm{ch}^{12} x \cdot \mathrm{d}x = \int \mathrm{sh}^4 x \cdot \mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{ch}^{12} x \cdot \mathrm{d}x = \int (\mathrm{sh}^2 x)^2 \cdot \mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{ch}^{12} x \cdot \mathrm{d}x =$

$$= \int (\mathrm{ch}^2 x - 1)^2 \cdot \mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{ch}^{12} x \cdot \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena: } t := \mathrm{ch}\, x, \\ \mathrm{d}t = \mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int (t^2 - 1)^2 \cdot t^{12} \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \int (t^4 - 2\cdot t^2 + 1) \cdot t^{12} \cdot \mathrm{d}t = \int t^{16} \cdot \mathrm{d}t - 2 \cdot \int t^{14} \cdot \mathrm{d}t + \int t^{12} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{17} \cdot t^9 - \frac{2}{15} \cdot t^{15} + \frac{1}{13} \cdot t^{13} =$$

$$= \frac{1}{17} \cdot \mathrm{ch}^9 x - \frac{2}{11} \cdot \mathrm{ch}^{15} x + \frac{1}{13} \cdot \mathrm{ch}^{13} x + C;$$

b) $\int \mathrm{sh}^{10} w \cdot \mathrm{ch}^5 w \cdot \mathrm{d}w = \int \mathrm{sh}^{10} w \cdot \mathrm{ch}^4 w \cdot \mathrm{ch}\, w \cdot \mathrm{d}w = \int \mathrm{sh}^{10} w \cdot (\mathrm{ch}^2 w)^2 \cdot \mathrm{ch}\, w \cdot \mathrm{d}w =$

$$= \int \mathrm{sh}^{10} w \cdot (1 + \mathrm{sh}^2 w)^2 \cdot \mathrm{ch}\, w \cdot \mathrm{d}w = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena: } t := \mathrm{sh}\, w, \\ \mathrm{d}t = \mathrm{ch}\, w \cdot \mathrm{d}w \end{array} \right\} = \int t^{10} \cdot (t^2 + 1)^2 \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \int t^{10} \cdot (t^4 + 2\cdot t^2 + 1) \cdot \mathrm{d}t = \int t^{14} \cdot \mathrm{d}t + 2 \cdot \int t^{12} \cdot \mathrm{d}t + \int t^{10} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{15} \cdot t^{15} + \frac{2}{13} \cdot t^{13} + \frac{1}{11} \cdot t^{11} =$$

$$= \frac{1}{15} \cdot \mathrm{sh}^{15} w + \frac{2}{13} \cdot \mathrm{sh}^{13} w + \frac{1}{11} \cdot \mathrm{sh}^{11} w + C;$$

c) $\int \mathrm{cth}^3 u \cdot \mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{ch}^3 u}{\mathrm{sh}^3 u} \cdot \mathrm{d}u = \int \mathrm{ch}^3 u \cdot (\mathrm{sh}\, u)^{-3} \cdot \mathrm{d}u = \int \mathrm{ch}\, u \cdot \mathrm{ch}^2 u \cdot (\mathrm{sh}\, u)^{-3} \cdot \mathrm{d}u =$

$$= \int \mathrm{ch}\, u \cdot (1+\mathrm{sh}^2 u) \cdot (\mathrm{sh}\, u)^{-3} \cdot \mathrm{d}u = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena: } x = \mathrm{sh}\, u, \\ \mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, u \cdot \mathrm{d}u \end{array} \right\} = \int (1+x^2) \cdot x^{-3} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \int x^{-3} \cdot \mathrm{d}x + \int x^{-1} \cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot x^{-2} + \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{2 \cdot x^2} + \ln|x| = -\ln|\mathrm{sh}\, u| - \frac{1}{2 \cdot \mathrm{sh}^2 u} + C.$$

3.

a) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x} \cdot \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena: } t := \sin x, \\ \mathrm{d}t = \cos x \cdot \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t^2 + t} \cdot \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \cdot \mathrm{d}t =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena: } u := t + \frac{1}{2}, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \end{array} \right\} = \int \frac{1}{u^2 - \frac{1}{4}} \cdot \mathrm{d}u = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \ln\left| \frac{u - \frac{1}{2}}{u + \frac{1}{2}} \right| = \ln\left| \frac{2 \cdot u - 1}{2 \cdot u + 1} \right| =$$

$$= \ln\left| \frac{2 \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) - 1}{2 \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) + 1} \right| = \ln\left| \frac{2 \cdot t}{2 \cdot t + 2} \right| = \ln\left| \frac{t}{t+1} \right| = \ln\left| \frac{\sin x}{1 + \sin x} \right| + C.$$

b) $\int \frac{2 \cdot \sin y}{2 \cdot \cos y - \cos^2 y} \cdot \mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena: } t := \cos y, \\ \mathrm{d}t = -\sin y \cdot \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \int \frac{-2}{2 \cdot t - t^2} \cdot \mathrm{d}t = 2 \cdot \int \frac{1}{t^2 - 2 \cdot t} \cdot \mathrm{d}t =$

$$= 2 \cdot \int \frac{1}{(t-1)^2 - 1} \cdot \mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena: } u := t - 1, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \end{array} \right\} = 2 \cdot \int \frac{1}{u^2 - 1} \cdot \mathrm{d}u = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot \ln\left| \frac{u-1}{u+1} \right| =$$

$$= \ln\left| \frac{(t-1)-1}{(t-1)+1} \right| = \ln\left| \frac{t-2}{t} \right| = \ln\left| \frac{\cos y - 2}{\cos y} \right| + C;$$

c) Primijenimo identitet $\sin(2 \cdot t) = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$.

$$\int \frac{4 \cdot \sin(2 \cdot t)}{\sin^2 t - 6 \cdot \sin t - 7} \cdot \mathrm{d}t = \int \frac{4 \cdot 2 \cdot \sin t \cdot \cos t}{\sin^2 t - 6 \cdot \sin t - 7} \cdot \mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena: } x := \sin t, \\ \mathrm{d}x = \cos t \cdot \mathrm{d}t \end{array} \right\} = \int \frac{8 \cdot x}{x^2 - 6 \cdot x - 7} \cdot \mathrm{d}x.$$

Rastavimo podintegralnu funkciju na parcijalne razlomke. Iz $x^2 - 6 \cdot x - 7 = 0$ slijedi $x_1 = -1,\ x_2 = 7.$ Dakle, vrijedi rastav:

$$x^2 - 6 \cdot x - 7 = 1 \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 7) = (x+1) \cdot (x-7).$$

Zbog toga tražimo $A, B \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi jednakost:

$$\frac{8 \cdot x}{x^2 - 6 \cdot x - 7} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-7}.$$

Imamo redom:

$$8\cdot x = A\cdot(x-7)+B\cdot(x+1)$$
$$x=-1 \Rightarrow -8\cdot A=-8 \Leftrightarrow A=1,$$
$$x=7 \Rightarrow 56=8\cdot B \Leftrightarrow B=7.$$

Tako sada imamo:

$$\int \frac{8\cdot x}{x^2-6\cdot x-7}\cdot \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+1}\cdot \mathrm{d}x + 7\cdot \int \frac{1}{x-7}\cdot \mathrm{d}x.$$

Primijetimo da za svaki $a\in\mathbb{R}$ vrijedi jednakost:

$$\int \frac{1}{x+a}\cdot \mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix}\text{zamjena: } y:=x+a,\\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}x\end{matrix}\right\} = \int \frac{1}{y}\cdot \mathrm{d}y = \ln|y| = \ln|x+a|.$$

Prema tome je:

$$\int \frac{8\cdot x}{x^2-6\cdot x-7}\cdot \mathrm{d}x = \ln|x+1| + 7\cdot \ln|x-7|.$$

Primijetimo da iz nejednakosti $-1\le \sin t\le 1$ slijede nejednakosti:

$$0\le \sin t+1\le 2 \Rightarrow |\sin t+1| = \sin t+1,+$$
$$-8\le \sin t-7\le -6 \Rightarrow |\sin t-7| = -(\sin t-7) = 7-\sin t.$$

Stoga je polazni integral jednak:

$$\int \frac{4\cdot \sin(2\cdot t)}{\sin^2 t-6\cdot \sin t-7}\cdot \mathrm{d}t = \ln|\sin t+1| + 7\cdot \ln|\sin t-7| = \ln(\sin t+1)+7\cdot \ln(7-\sin t)+C.$$

4.

a) $$\int 2\cdot\sqrt{1+\mathrm{ch}^2 q}\cdot \mathrm{sh}\, q\cdot \mathrm{d}q = \left\{\begin{matrix}\text{zamjena: } x:=\mathrm{ch}\, q,\\ \mathrm{d}x=\mathrm{sh}\, q\cdot \mathrm{d}q\end{matrix}\right\} = \int 2\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int\sqrt{1+x^2}\cdot \mathrm{d}x =$$
$$= 2\cdot\left(\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) = x\cdot\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) =$$
$$= \mathrm{ch}\, q\cdot\sqrt{1+\mathrm{ch}^2 q}+\ln\left(\mathrm{ch}\, q+\sqrt{1+\mathrm{ch}^2 q}\right)+C.$$

b) $$2\cdot\int\sqrt{10\cdot \mathrm{sh}\, u-\mathrm{sh}^2 u}\cdot \mathrm{ch}\, u\cdot \mathrm{d}u = \left\{\begin{matrix}\text{zamjena: } x:=\mathrm{sh}\, u,\\ \mathrm{d}x=\mathrm{ch}\, u\cdot \mathrm{d}u\end{matrix}\right\} = 2\cdot\int\sqrt{10\cdot x-x^2}\cdot \mathrm{d}x =$$
$$= 2\cdot\int\sqrt{(-1)\cdot(x^2-10\cdot x)}\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int\sqrt{(-1)\cdot\left[(x-5)^2-25\right]}\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int\sqrt{25-(x-5)^2}\cdot \mathrm{d}x =$$
$$= \left\{\begin{matrix}\text{zamjena: } t:=x-5,\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x\end{matrix}\right\} = 2\cdot\int\sqrt{25-t^2}\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot\left(\frac{t}{2}\cdot\sqrt{25-t^2}+\frac{25}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{t}{5}\right)\right) =$$
$$= t\cdot\sqrt{25-t^2}+25\cdot\arcsin\left(\frac{t}{5}\right) = (x-5)\cdot\sqrt{10\cdot x-x^2}+25\cdot\arcsin\left(\frac{x-5}{5}\right) =$$
$$= (\mathrm{sh}\, u-5)\cdot\sqrt{10\cdot \mathrm{sh}\, u-\mathrm{sh}^2 u}+25\cdot\arcsin\left(\frac{\mathrm{sh}\, u-5}{5}\right)+C.$$

c) $$\int \frac{2\cdot \operatorname{sh} w}{\sqrt{4\cdot \operatorname{ch}^2 w+4\cdot \operatorname{ch} w-3}}\cdot \mathrm{d}w=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena: } x:=\operatorname{ch} w,\\ \mathrm{d}x=\operatorname{sh} w\cdot \mathrm{d}w\end{array}\right\}=\int \frac{2}{\sqrt{4\cdot x^2+4\cdot x-3}}\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=2\cdot \int \frac{1}{\sqrt{(2\cdot x+1)^2-4}}\cdot \mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena: } t:=2\cdot x-1,\\ \mathrm{d}t=2\cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}t\end{array}\right\}=2\cdot \frac{1}{2}\cdot \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2-4}}\cdot \mathrm{d}t=$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{t^2-4}}\cdot \mathrm{d}t=\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|=\ln\left|2\cdot x-1+\sqrt{4\cdot x^2+4\cdot x-3}\right|=$$

$$=\ln\left|2\cdot \operatorname{ch} w-1+\sqrt{4\cdot \operatorname{ch} w^2+4\cdot \operatorname{ch} w-3}\right|+C.$$

d) $$\int \frac{4\cdot \operatorname{ch} v}{\sqrt{8\cdot \operatorname{sh} v-3-16\cdot \operatorname{sh}^2 v}}\cdot \mathrm{d}v=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena: } x:=\operatorname{sh} v,\\ \mathrm{d}x=\operatorname{ch} v\cdot \mathrm{d}v\end{array}\right\}=\int \frac{4}{\sqrt{8\cdot x-3-16\cdot x^2}}\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=\int \frac{4}{\sqrt{(-1)\cdot(16\cdot x^2-8\cdot x-3)}}\cdot \mathrm{d}x=\int \frac{4}{\sqrt{(-1)\cdot\left[(4\cdot x-1)^2-4\right]}}\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{4-(4\cdot x-1)^2}}\cdot \mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena: } t:=4\cdot x-1,\\ \mathrm{d}t=4\cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot \mathrm{d}t\end{array}\right\}=4\cdot \frac{1}{4}\cdot \int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\cdot \mathrm{d}t=$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\cdot \mathrm{d}t=\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)=\arcsin\left(\frac{4\cdot x-1}{2}\right)=\arcsin\left(\frac{4\cdot \operatorname{sh} v-1}{2}\right)+C.$$

4. GRUPA ZADATAKA

1. Odredimo najprije sjecišta krivulje K i osi apscisa:

$$8-2\cdot x-x^2=0 \Rightarrow x_1=-4,\ x_2=2 \Rightarrow S_1=(-4,0),\ S_2=(2,0).$$

Koeficijent smjera tangente povučene na krivulju K u *bilo kojoj* točki jednak je:

$$k_t=(8-2\cdot x-x^2)'=0-2-2\cdot x=-2-2\cdot x.$$

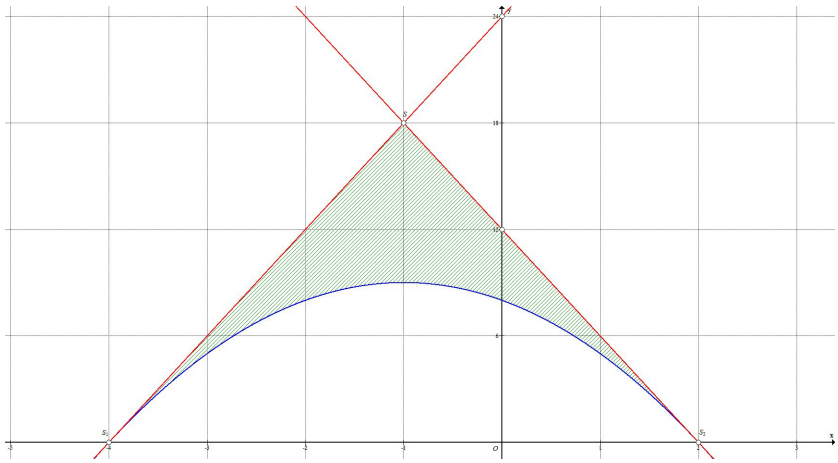
Stoga koeficijenti smjerova tangenata povučenih na krivulju K u točkama S_1 i S_2 iznose redom:

$$k_1=-2-2\cdot(-4)=6,$$
$$k_2=-2-2\cdot 2=-6.$$

Jednadžbe tih tangenata zapisane u segmentnom obliku su:

$$\begin{array}{ll} t_1 \ldots y=6\cdot(x-(-4)) & t_2 \ldots y=(-6)\cdot(x-2) \\ y=6\cdot x+24 & y=-6\cdot x+12 \\ -6\cdot x+y=24 & 6\cdot x+y=12, \\ \dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{24}=1 & \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{12}=1. \end{array}$$

Sada možemo nacrtati odgovarajuću sliku. Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

Odredimo sjecište povučenih tangenata. Iz sustava

$$\begin{cases} y=6\cdot x+24 \\ y=-6\cdot x+12 \end{cases}$$

lagano slijedi $(x,y)=(-1,18)$. Dakle, $S=(-1,18)$.

Zaključujemo da je tražena površina jednaka razlici površine trokuta s vrhovima S_1, S_2 i S i površine koju krivulja K zatvara s osi apscisa i pravcima $x=-4$ i $x=2$. Stoga je:

$$P = P_\Delta - P_1 = \frac{(4+2)\cdot 18}{2} - \int_{-4}^{2} (8 - 2\cdot x - x^2)\cdot \mathrm{d}x = 54 - \left[8\cdot x - x^2 - \frac{1}{3}\cdot x^3\right]_{-4}^{2} =$$

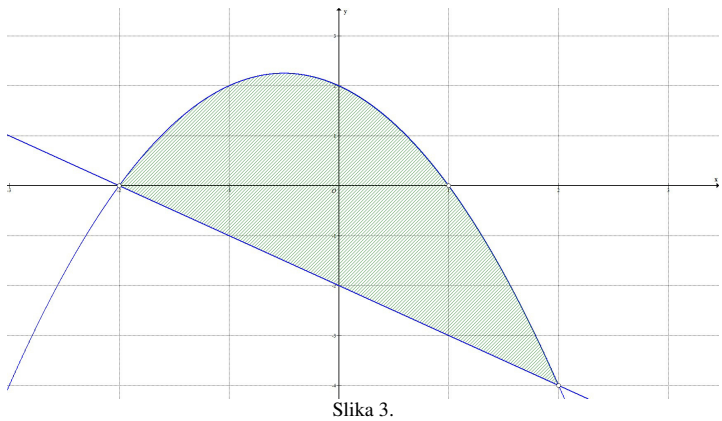
$$= 54 - \left[8\cdot 2 - 2^2 - \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \left(8\cdot(-4) - (-4)^2 - \frac{1}{3}\cdot(-4)^3\right)\right] = 54 - \left(16 - 4 - \frac{8}{3} + 32 + 16 - \frac{64}{3}\right) = 18 \text{ kv. jed.}$$

2. Odredimo najprije sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sustav:

$$\begin{cases} y = 2 - x - x^2 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe u drugu jednadžbu dobivamo $x + 2 - x - x^2 + 2 = 0$, odnosno $x^2 = 4$. Odatle je $x_1 = -2,\ x_2 = 2$. Uvrštavanjem tih vrijednosti u prvu jednadžbu sustava lagano izračunamo $y_1 = 0,\ y_2 = -4$. Dakle, sjecišta zadanih krivulja su točke $S_1 = (-2, 0)$ i $S_2 = (2, -4)$.

Nacrtajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 3.



Slika 3.

Vidimo da se tražena površina može izračunati tako da se od površine ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = 2 - x - x^2$, $y = 0$, $x = -2$ i $x = 2$ oduzme površina trokuta kojemu su vrhovi (u koordinatnom sustavu na slici 2.) S_1, S_2 i $(-2, -4)$. Stoga odmah imamo:

$$P = \int_{-2}^{2} \left[(2 - x - x^2) - (-x - 2)\right]\cdot \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\cdot \mathrm{d}x = \left[4\cdot x - \frac{1}{3}\cdot x^3\right]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ kv. jed.}$$

3. Odredimo najprije prvu koordinatu točke *T*. Ta točka pripada krivulji *K*, pa njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje. Tako redom dobivamo:

$$1 = 1 - \ln(x_T - 1) \Leftrightarrow \ln(x_T - 1) = 0 \Leftrightarrow x_T - 1 = e^0 \Leftrightarrow x_T - 1 = 1 \Leftrightarrow x_T = 2.$$

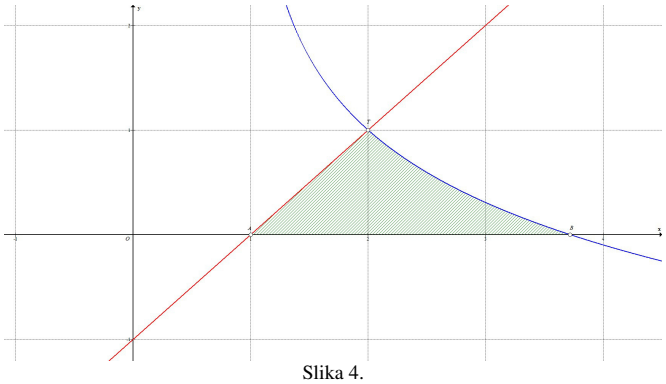
Dakle, $T = (2, 1)$. Nadalje, odredimo jednadžbu normale povučene na krivulju *K* u točki *T*. Koeficijent smjera te normale jednak je:

$$k = -\frac{1}{\left[\left(1 - \ln(x-1)\right)'\right]_{x=2}} = -\frac{1}{\left[0 - \frac{1}{x-1}\cdot(x-1)'\right]_{x=2}} = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{x-1}\cdot 1\right)_{x=2}} = (x-1)_{x=2} = 2 - 1 = 1.$$

Zbog toga je jednadžba povučene normale zapisana u segmentnom obliku:

$$n\ldots\ y-1=1\cdot(x-2)$$
$$y=x-1$$
$$-x+y=-1,$$
$$\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1.$$

Nacrtajmo odgovarajuću sliku. Dobivamo sliku 4.



Slika 4.

Primjećujemo da je lik čiju površinu tražimo zapravo krivocrtni trokut čiji su vrhovi točka *T*, sjecište normale i osi apscisa, te sjecište krivulje *K* i osi apscisa.

Sjecište normale i osi apscisa očitamo iz segmentnoga oblika jednadžbe normale. To je točka $A=(1,0)$.

Sjecište krivulje *K* i osi apscisa dobijemo iz jednadžbe $1-\ln(x-1)=0$. Imamo:

$$1-\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow \ln(x-1)=1 \Leftrightarrow x-1=e^1 \Leftrightarrow x=e+1.$$

Dakle, $B=(e+1,0)$.

Traženu površinu najlakše i najbrže ćemo izračunati tako da gornji lik podijelimo na dva dijela. Prvi dio je trokut omeđen točkama *T*, *A* i (2, 0), dok je drugi dio krivocrtni trokut omeđen krivuljom *K*, pravcima $x=2,\ x=e+1$ i osi apscisa. Stoga je tražena površina jednaka:

$$P=P_1+P_2=\frac{1\cdot 1}{2}+\int_2^{e+1}\left[1-\ln(x-1)\right]\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\int_2^{e+1}1\cdot \mathrm{d}x-\int_2^{e+1}\ln(x-1)\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\left[x\right]_2^{e+1}-$$
$$-\int_2^{e+1}\ln(x-1)\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{2}+(e+1)-2-\int_2^{e+1}\ln(x-1)\cdot \mathrm{d}x=e-\frac{1}{2}-\int_2^{e+1}\ln(x-1)\cdot \mathrm{d}x.$$

Odredimo standardnu antiderivaciju funkcije $f(x)=\ln(x-1)$. Zamijenimo: $\begin{cases} t=x-1, \\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x \end{cases}$ pa dobijemo:

$$\int \ln(x-1)\cdot \mathrm{d}x=\int \ln t\cdot \mathrm{d}t=t\cdot \ln t-t=(x-1)\cdot \ln(x-1)-(x-1).$$

Tako konačno dobijemo:

$$P = e - \frac{1}{2} - \left[(e+1-1)\cdot\ln(e+1-1) - (e+1-1) - (2-1)\cdot\ln(2-1) + (2-1)\right] =$$
$$= e - \frac{1}{2} - \left[e\cdot\ln e - e - 2\cdot\ln 1 + 1\right] = e - \frac{1}{2} - e\cdot 1 + e - 0 - 1 = e - \frac{3}{2} \text{ kv. jed.}$$

4. Tražena prosječna vrijednost jednaka je:

$$\overline{f} = \frac{1}{1-0}\cdot\int_0^1 4\cdot x\cdot e^{2-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \int_0^1 4\cdot x\cdot e^{2-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x.$$

Odredimo standardnu antiderivaciju podintegralne funkcije. Imamo redom:

$$\int e^{2-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} \text{zamjena: } t := 2-2\cdot x \\ \mathrm{d}t = -2\cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}t \end{matrix}\right\} = \int e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cdot\int e^t\cdot \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cdot e^t = -\frac{1}{2}\cdot e^{2-2\cdot x},$$

$$\int 4\cdot x\cdot e^{2-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = 4\cdot x & v = \int e^{2-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot e^{2-2\cdot x} \\ \mathrm{d}u = 4\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = e^{2-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x \end{matrix}\right| = 4\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2-2\cdot x} - \int 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x =$$
$$= -2\cdot x\cdot e^{2-2\cdot x} + 2\cdot\int e^{2-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = -2\cdot x\cdot e^{2-2\cdot x} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2-2\cdot x} = -2\cdot x\cdot e^{2-2\cdot x} - e^{2-2\cdot x}.$$

Tako konačno dobijemo:

$$\overline{f} = -2\cdot 1\cdot e^{2-2\cdot 1} - e^{2-2\cdot 1} - (-2\cdot 0\cdot e^{2-2\cdot 0} - e^{2-2\cdot 0}) = -2 - 1 + e^2 = e^2 - 3.$$

5. Odredimo najprije prirodnu domenu zadane funkcije. Izraz pod drugim korijenom treba biti nenegativan, pa iz nejednadžbe

$$2\cdot y - y^2 \geq 0$$

slijedi $y \in [0,2]$. Dakle, $D_g = [0,2]$.

Tako dobivamo da je tražena prosječna vrijednost jednaka:

$$\overline{g} = \frac{1}{2-0}\cdot\int_0^2 4\cdot\sqrt{2\cdot y - y^2}\cdot \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\int_0^2\sqrt{(-1)\cdot(y^2 - 2\cdot y)}\cdot \mathrm{d}y = 2\cdot\int_0^2\sqrt{(-1)\cdot\left[(y-1)^2 - 1\right]}\cdot \mathrm{d}y =$$
$$= 2\cdot\int_0^2\sqrt{1-(y-1)^2}\cdot \mathrm{d}y = \left\{\begin{matrix} \text{zamjena: } t := y-1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}y \\ [0,2] \to [0-1, 2-1] = [-1,1] \end{matrix}\right\} = 2\cdot\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\cdot \mathrm{d}t =$$
$$= 2\cdot\left[\frac{t}{2}\cdot\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\cdot\arcsin t\right]_{-1}^1 = 2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-1^2} + \frac{1}{2}\cdot\arcsin(1) - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{1-(-1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\arcsin(-1)\right] =$$
$$= 2\cdot\left[0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{4} = \pi.$$

6. **a)** Primijenimo identitet $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cdot\left[1+\cos(2\cdot x)\right]$. Traženi volumen je jednak:

$$V=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cdot\cos x)^2\cdot\mathrm{d}x=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\cdot\cos^2 x\cdot\mathrm{d}x=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[1+\cos(2\cdot x)\right]\cdot\mathrm{d}x=8\cdot\pi\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos(2\cdot x)\right]\cdot\mathrm{d}x\right)=$$

$$=8\cdot\pi\cdot\left(\left[x+\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=8\cdot\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}+0+-0-0\right)=4\cdot\pi^2 \text{ kub. jed.}$$

b) Traženi volumen je jednak:

$$V=2\cdot\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot 4\cdot\cos x\cdot\mathrm{d}x=8\cdot\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cos x\cdot\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} u=x & v=\int\cos x\cdot\mathrm{d}x=\sin x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=\cos x\cdot\mathrm{d}x\end{matrix}\right|=$$

$$=8\cdot\pi\cdot\left(\left[x\cdot\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\mathrm{d}x\right)=8\cdot\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-0\cdot\sin 0-\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=8\cdot\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1-0+\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=8\cdot\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos 0\right)=8\cdot\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}+0-1\right)=4\cdot\pi\cdot(\pi-2) \text{ kub. jed.}$$

7. **a)** Primijenimo identitete:

$$\mathrm{sh}^2 x=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2\cdot x}-2\cdot\overbrace{e^x\cdot e^{-x}}^{=e^0=1}+e^{-2\cdot x}}{4}=\frac{1}{4}\cdot e^{2\cdot x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot e^{-2\cdot x},$$

$$\int e^{a\cdot x+b}\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot x+b}+C,\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ C\in\mathbb{R}.$$

Traženi volumen je jednak:

$$V=\pi\cdot\int_0^{\ln 2}(8\cdot\mathrm{sh}\,x)^2\cdot\mathrm{d}x=\pi\cdot\int_0^{\ln 2}64\cdot\mathrm{sh}^2 x\cdot\mathrm{d}x=\pi\cdot\int_0^{\ln 2}64\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot e^{2\cdot x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot e^{-2\cdot x}\right)\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=64\cdot\pi\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2\cdot x}\right]_0^{\ln 2}=8\cdot\pi\cdot\left[e^{2\cdot x}-4\cdot x-e^{-2\cdot x}\right]_0^{\ln 2}=$$

$$=8\cdot\pi\cdot\left[e^{2\cdot\ln 2}-4\cdot\ln 2-e^{-2\cdot\ln 2}-(1-0-1)\right]=8\cdot\pi\cdot\left(4-4\cdot\ln 2-\frac{1}{4}-0\right)=2\cdot(15-16\cdot\ln 2)\cdot\pi \text{ kub. jed.}$$

b) Traženi volumen je jednak:

$$V=2\cdot\pi\cdot\int_0^{\ln 2}x\cdot 8\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{d}x=16\cdot\pi\cdot\int_0^{\ln 2}x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} u=x & v=\int\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{d}x=\mathrm{ch}\,x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{d}x\end{matrix}\right|=$$

$$=16\cdot\pi\cdot\left(\left[x\cdot\mathrm{ch}\,x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{d}x\right)=16\cdot\pi\cdot\left(\ln(2)\cdot\mathrm{ch}\left(\ln 2\right)-0\cdot\mathrm{ch}\,0-\left[\mathrm{sh}\,x\right]_0^{\ln 2}\right)=$$

$$=16\cdot\pi\cdot\left(\ln 2\cdot\frac{5}{4}-0-\mathrm{sh}(\ln 2)+\mathrm{sh}\,0\right)=16\cdot\pi\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\ln 2-\frac{3}{4}+0\right)=4\cdot\pi\cdot\left(5\cdot\ln 2-3\right) \text{ kub. jed.}$$

5. GRUPA ZADATAKA

1. Prirodna domena obiju zadanih funkcija je skup $\langle 0,+\infty\rangle$. Zbog toga treba pokazati da za sve $x>0$ vrijedi jednakost $F'(x)=f(x)$. Primjenjujući pravilo deriviranja umnoška dviju funkcija i pravilo za deriviranje složene funkcije dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (\ln^3 x-3\cdot\ln^2 x+6\cdot\ln x-6)'\cdot x+(\ln^3 x-3\cdot\ln^2 x+6\cdot\ln x-6)\cdot(x)' = \\
&= \left(3\cdot\ln^{3-1} x\cdot(\ln x)'-3\cdot 2\cdot\ln^{2-1} x\cdot(\ln x)'+6\cdot\frac{1}{x}-0\right)\cdot x+\left(\ln^3 x-3\cdot\ln^2 x+6\cdot\ln x-6\right)\cdot 1 = \\
&= \left(3\cdot\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}-6\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}+6\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x+\ln^3 x-3\cdot\ln^2 x+6\cdot\ln x-6 = \\
&= 3\cdot\ln^2 x-6\cdot\ln x+6+\ln^3 x-3\cdot\ln^2 x+6\cdot\ln x-6=\ln^3 x=f(x).
\end{aligned}$$

2. Odredimo najprije sve funkcije $y=y(t)$ takve da je $y'=3\cdot\sin^5 t$. One su očito primitivne funkcije za funkciju $f(t)=3\cdot\sin^5 t$, pa tvore neodređeni integral te funkcije. Odredimo taj integral. Koristimo osnovni trigonometrijski identitet $\cos^2 t+\sin^2 t=1$, formulu za kvadrat razlike $(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$ i jednakost $(\cos t)'=-\sin t$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\int 3\cdot\sin^5 t\cdot\mathrm{d}t=\int 3\cdot\sin^4 t\cdot\sin t\cdot\mathrm{d}t=\int 3\cdot(\sin^2 t)^2\cdot\sin t\cdot\mathrm{d}t=\int 3\cdot(1-\cos^2 t)^2\cdot\sin t\cdot\mathrm{d}t= \\
&=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ x=\cos t,\\ \mathrm{d}x=-\sin t\cdot\mathrm{d}t\Rightarrow\sin t\cdot\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\int 3\cdot(1-x)^2\cdot(-\mathrm{d}x)=\int 3\cdot(1-2\cdot x+x^2)\cdot(-\mathrm{d}x)= \\
&=-3\cdot\int 1\cdot\mathrm{d}x+6\cdot\int x\cdot\mathrm{d}x-3\cdot\int x^2\cdot\mathrm{d}x=-3\cdot x+6\cdot\frac{1}{1+1}\cdot x^{1+1}-3\cdot\frac{1}{2+1}\cdot x^{2+1}= \\
&=-3\cdot x+3\cdot x^2-x^3=-3\cdot\cos t+3\cdot\cos^2 t-\cos^3 t+C,\ C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tražimo onu funkciju iz toga skupa za koju je $y(0)=-1$. U gornji izraz uvrstimo $t=0$, pa dobiveni izraz izjednačimo s –1:

$$\begin{aligned}
&-3\cdot\underbrace{\cos 0}_{=1}+3\cdot\underbrace{\cos^2 0}_{=1}-\underbrace{\cos^3 0}_{=1}+C=-1, \\
&-3+3-1+C=-1, \\
&C=0.
\end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $y=-\cos^3 t+3\cdot\cos^2 t-3\cdot\cos t$

3. Tražena duljina je jednaka:

$$l=\int_2^4\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\cdot\mathrm{d}x\,.$$

Odredimo podintegralnu funkciju i pojednostavnimo njezino pravilo najviše što možemo. Koristimo osnovni trigonometrijski identitet $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, jednakost $\sqrt{x^2}=|x|$ koja vrijedi za sve $x\in\mathbb{R}$ i jednakost $\mathrm{tg}\left(\frac{3}{8}\cdot\pi\right)=\sqrt{2}+1$. (Potonja jednakost se lako dokaže koristeći adicijski poučak za funkciju tangens.) Imamo redom:

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot \underbrace{(\cos x)'}_{=-\sin x} = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\sqrt{1+\left(y'\right)^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|}.$$

Za $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ vrijedi jednakost $|\cos x| = \cos x$, pa je zbog toga tražena duljina jednaka:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\left(y'\right)^2} \cdot \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \cdot \mathrm{d}x = \left[\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| =$$

$$= \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{3}{8}\cdot\pi\right)\right| - \ln\left|\underbrace{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=1}\right| = \ln\left|\underbrace{\sqrt{2}+1}_{>0}\right| - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln\left(\sqrt{2}+1\right) \text{ jed. duljine.}$$

4. Traženi volumen je jednak:

$$V = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{2}{\sqrt{\pi \cdot (x^3+2\cdot x)}}\right)^2 \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_1^2 \frac{4}{\pi \cdot (x^3+2\cdot x)} \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_1^2 \frac{4}{x^3+2\cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{4}{x^3+2\cdot x} \cdot \mathrm{d}x.$$

Da bismo izračunali taj određeni integral, podintegralnu funkciju moramo rastaviti na parcijalne razlomke. Očito vrijedi identitet $x^3+2\cdot x = x\cdot(x^2+2)$, pa rastav tražimo u obliku:

$$\frac{4}{x^3+2\cdot x} = \frac{A}{x} + \frac{B\cdot x + C}{x^2+2}.$$

Pomnožimo tu jednakost s $x\cdot(x^2+2)$:

$$4 = A\cdot(x^2+2) + (B\cdot x + C)\cdot x.$$

U ovu jednakost uvrstimo zasebno $x=-1$, $x=0$ i $x=1$, pa dobijemo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} 3\cdot A + B - C = 4, \\ 2\cdot A = 4, \\ 3\cdot A + B + C = 4. \end{cases}$$

Rješenje toga sustava je $(A,B,C) = (2,-2,0)$. Dakle,

$$\frac{4}{x^3+2\cdot x} = \frac{2}{x} + \frac{-2\cdot x + 0}{x^2+2} = \frac{2}{x} - \frac{2\cdot x}{x^2+2}.$$

Standardna antiderivacija prvoga pribrojnika jednaka je

$$\int \frac{2}{x} \cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \ln|x|.$$

Standardna antiderivacija drugoga pribrojnika jednaka je

$$\int \frac{2\cdot x}{x^2+2}\cdot \mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix}\text{zamjena:}\\ t = x^2+2,\\ \mathrm{d}t = 2\cdot x\cdot \mathrm{d}x\end{matrix}\right\} = \int \frac{1}{t}\cdot \mathrm{d}t = \ln|t| = \ln\left|\underbrace{x^2+2}_{>0}\right| = \ln(x^2+2).$$

Tako konačno dobivamo da je traženi volumen jednak:

$$V = \int_1^2 \frac{4}{x^3+2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \left[2\cdot \ln|x| - \ln\left(x^2+2\right)\right]_1^2 = \left(2\cdot \ln 2 - \ln 6\right) - \left(2\cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 3\right) =$$

$$= 2\cdot \ln 2 - \ln 6 + \ln 3 = \ln\left(\frac{2^2\cdot 3}{6}\right) = \ln 2 \text{ kub. jed.}$$

5. Tražena prosječna vrijednost je jednaka:

$$\overline{g_{[0,2]}} = \frac{1}{2-0}\cdot \int_0^2 8\cdot u\cdot e^{2\cdot u}\cdot \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot \int_0^2 u\cdot e^{2\cdot u}\cdot \mathrm{d}u = 4\cdot \int_0^2 u\cdot e^{2\cdot u}\cdot \mathrm{d}u.$$

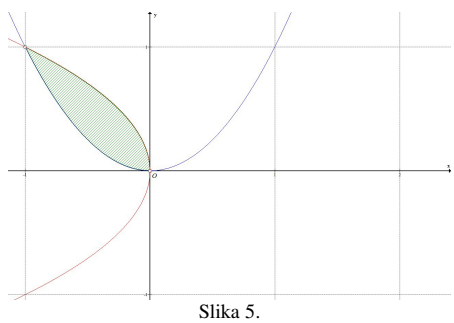
Taj određeni integral možemo izračunati metodom djelomične integracije. Pritom koristimo identitet $\int e^{2\cdot u}\cdot \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot u} + C,\ C\in\mathbb{R}.$ Dobivamo:

$$\overline{g_{[0,2]}} = 4\cdot \int_0^2 u\cdot e^{2\cdot u}\cdot \mathrm{d}u = \left|\begin{matrix} x = u & y = \int e^{2\cdot u}\cdot \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot u}\\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u & \mathrm{d}y = e^{2\cdot u}\cdot \mathrm{d}u\end{matrix}\right| = 4\cdot\left(\left[\frac{1}{2}\cdot u\cdot e^{2\cdot u}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot u}\cdot \mathrm{d}u\right) =$$

$$= 4\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot e^{2\cdot 2} - \frac{1}{2}\cdot 0\cdot e^{2\cdot 0}\right) - \frac{1}{2}\cdot \int_0^2 e^{2\cdot u}\cdot \mathrm{d}u\right) = 4\cdot\left(e^4 - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot u}\right]_0^2\right) = 4\cdot\left(e^4 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot 2} - \frac{1}{2}\cdot \underbrace{e^{2\cdot 0}}_{=1}\right)\right) =$$

$$= 4\cdot\left(e^4 - \frac{1}{4}\cdot e^4 + \frac{1}{4}\right) = 4\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot e^4 + \frac{1}{4}\right) = 3\cdot e^4 + 1.$$

6. Skicirajmo najprije zadane krivulje. Dobivamo sliku 5.



Slika 5.

Odredimo sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y^2 = -x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Uvrstimo drugu jednadžbu sustava u prvu jednadžbu sustava i primijenimo formulu za rastav zbroja kubova u faktore $a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - a\cdot b + b^2)$. Dobivamo:

$$(x^2)^2 = -x \Leftrightarrow x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x^3+1) = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x+1)\cdot(x^2-x+1) = 0.$$

Izjednačavanjem prvih dvaju faktora s nulom dobivamo $x_1 = 0$ i $x_2 = -1$, dok izjednačavanje trećega faktora s nulom daje kompleksna rješenja. Dakle, $x_1 = 0$ i $x_2 = -1$, pa su pripadne vrijednosti nepoznanice y jednake $y_1 = 0$ i $y_2 = 1$. Prema tome, zadane krivulje se sijeku u točkama $S_1 = (0,0) = O$ (ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini) i $S_2 = (-1,1)$. Lik čiju površinu tražimo je osjenčan na slici 1.

Traženu površinu možemo izračunati na dva načina promatrajući lik u odnosu na svaku koordinatnu os.

1. način: Površinu računamo promatrajući lik u odnosu na os apscisa. Jednadžba dijela krivulje K_1 iznad osi apscisa je $y = \sqrt{-x}$. Lik se nalazi iznad osi apscisa, pa ne trebamo koristiti apsolutnu vrijednost. Njegovu površinu izračunat ćemo kao razliku površine lika omeđenoga krivuljama $y = \sqrt{-x},\ y = 0,\ x = -1$ i $x = 0$ i površine lika omeđenoga krivuljama $y = x^2,\ y = 0,\ x = -1$ i $x = 0$. Pritom koristimo:

$$\int \sqrt{-x}\cdot \mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t = -x,\\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t\end{array}\right\} = \int \sqrt{t}\cdot(-\mathrm{d}t) = -\int t^{\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{d}t = -\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot t^{\frac{1}{2}+1} = -\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\cdot(-x)^{\frac{3}{2}} + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Dobivamo:

$$P = \int_{-1}^{0}\sqrt{-x}\cdot \mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} x^2\cdot \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(\sqrt{-x} - x^2\right)\cdot \mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}\cdot(-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\cdot x^3\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\cdot \underbrace{0^{\frac{3}{2}}}_{=0} - \frac{1}{3}\cdot \underbrace{0^3}_{=0}\right) - \left(-\frac{2}{3}\cdot \underbrace{(-(-1))^{\frac{3}{2}}}_{=1} - \frac{1}{3}\cdot \underbrace{(-1)^3}_{=-1}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ kv. jed.}$$

2. način: Površinu računamo promatrajući lik u odnosu na os ordinata. Jednadžba dijela krivulje K_2 iznad osi apscisa je $x = -\sqrt{y}$. Lik se nalazi ispod osi ordinata, pa trebamo koristiti apsolutnu vrijednost. Površinu lika izračunat ćemo kao razliku površine lika omeđenoga krivuljama $x = -\sqrt{y},\ x = 0,\ y = 0$ i $y = 1$ i površine lika omeđenoga krivuljama $x = -y^2,\ x = 0,\ y = 0$ i $y = 1$. Pritom koristimo:

$$\int \sqrt{y}\cdot \mathrm{d}y = \int y^{\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{d}y = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot y^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}\cdot y^{\frac{3}{2}} + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Dobivamo:

$$P = \left|\int_0^1 -\sqrt{y}\cdot \mathrm{d}y - \int_0^1\left(-y^2\right)\cdot \mathrm{d}y\right| = \left|\int_0^1\left(-\sqrt{y} + y^2\right)\cdot \mathrm{d}y\right| = \left|\left[-\frac{2}{3}\cdot y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\cdot y^3\right]_0^1\right| =$$

$$= \left|\left(-\frac{2}{3}\cdot \underbrace{1^{\frac{3}{2}}}_{=1} + \frac{1}{3}\cdot \underbrace{1^3}_{=1}\right) - \left(-\frac{2}{3}\cdot \underbrace{0^{\frac{3}{2}}}_{=0} + \frac{1}{3}\cdot \underbrace{0^3}_{=0}\right)\right| = \left|-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} \text{ kv. jed.}$$

6. GRUPA ZADATAKA

1. Odredimo najprije standardnu antiderivaciju. Podijelimo brojnik i nazivnik s 25:

$$I=\int\frac{\frac{10}{25}}{x^2+\frac{1}{25}}\cdot\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{2}{5}}{x^2+\frac{1}{25}}\cdot\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\cdot\int\frac{1}{x^2+\frac{1}{25}}\cdot\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{5}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\frac{1}{5}}\right)=2\cdot\operatorname{arctg}(5\cdot x)+C.$$

Odaberemo $C=0$, pa dobijemo:

$$F(x)=2\cdot\operatorname{arctg}(5\cdot x)\ .$$

Tako sada imamo:

$$I_1=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{10}{25\cdot x^2+1}\cdot\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\left[F(0)-F(a)\right]=\lim_{a\to-\infty}\left[0-2\cdot\operatorname{arctg}(5\cdot a)\right]=-2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi\ .$$

2. Odredimo najprije standardnu antiderivaciju. Imamo redom:

$$I=\int\frac{2}{(\ln 3)\cdot(t^2+2\cdot t)}\cdot\mathrm{d}t=\frac{2}{\ln 3}\cdot\int\frac{1}{t^2+2\cdot t}\cdot\mathrm{d}t=\frac{2}{\ln 3}\cdot\int\frac{1}{(t+1)^2-1}\cdot\mathrm{d}t=\left\{\begin{matrix}\text{zamjena:}\\ x=t+1\\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\ln 3}\cdot\int\frac{1}{x^2-1}\cdot\mathrm{d}x=\frac{2}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln\left|\frac{t+1-1}{t+1+1}\right|=\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|+C.$$

Odaberemo $C=0$, pa dobijemo:

$$F(t)=\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|.$$

Tako sada imamo:

$$I_2=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-3}\frac{2}{(\ln 3)\cdot(t^2+2\cdot t)}\cdot\mathrm{d}t=\lim_{a\to-\infty}\left[F(-3)-F(a)\right]=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln 3-\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln\underbrace{\left|\frac{a}{a+2}\right|}_{\to 1}\right]=$$

$$=1-\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln 1=1-\frac{1}{\ln 3}\cdot 0=1.$$

3. Odredimo najprije standardnu antiderivaciju. Imamo redom:

$$I=\int\frac{1}{(\ln 2)\cdot(y^2-y)}\cdot\mathrm{d}y=\frac{1}{\ln 2}\cdot\int\frac{1}{y^2-y}\cdot\mathrm{d}y=\frac{1}{\ln 2}\cdot\int\frac{1}{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\cdot\mathrm{d}t=\left\{\begin{matrix}\text{zamjena:}\\ t=y-\frac{1}{2}\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}y\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\cdot\int\frac{1}{t^2-\frac{1}{4}}\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\left|\frac{y-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|+C.$$

Odaberemo $C = 0$, pa dobijemo:

$$F(y) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|.$$

Tako sada imamo:

$$I_3 = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{(\ln 2)\cdot(y^2 - y)} \cdot \mathrm{d}y = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b) - F(2)\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\underbrace{\left|\frac{y-1}{y}\right|}_{\to 1} - \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln 1 - \frac{1}{\ln 2}\cdot(\ln 1 - \ln 2) = 0 - \frac{1}{\ln 2}\cdot(0 - \ln 2) = 1.$$

4. Odredimo najprije standardnu antiderivaciju. Imamo redom:

$$I = \int \frac{3}{(2\cdot\ln 2)\cdot(w^2 + w - 2)} \cdot \mathrm{d}w = \frac{3}{2\cdot\ln 2}\cdot\int\frac{1}{w^2+w-2}\cdot\mathrm{d}w = \frac{3}{2\cdot\ln 2}\cdot\int\frac{1}{\left(w+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}\cdot\mathrm{d}w = \left\{\begin{matrix}\text{zamjena:}\\ t = w + \frac{1}{2}\\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}w\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{3}{2\cdot\ln 2}\cdot\int\frac{1}{t^2 - \frac{9}{4}}\cdot\mathrm{d}t = \frac{3}{2\cdot\ln 2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\cdot\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right| = \frac{1}{2\cdot\ln 2}\cdot\ln\left|\frac{w+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{w+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right| = \frac{1}{2\cdot\ln 2}\cdot\ln\left|\frac{w-1}{w+2}\right| + C.$$

Odaberemo $C = 0$, pa dobijemo:

$$F(w) = \frac{1}{2\cdot\ln 2}\cdot\ln\left|\frac{w-1}{w+2}\right|.$$

Tako sada imamo:

$$I_4 = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{3}{(2\cdot\ln 2)\cdot(w^2+w-w)}\cdot\mathrm{d}w = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b) - F(2)\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2\cdot\ln 2}\cdot\ln\underbrace{\left|\frac{w-1}{w+2}\right|}_{\to 1} - \frac{1}{2\cdot\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{1}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\ln 2}\cdot\ln 1 - \frac{1}{2\cdot\ln 2}\cdot(\ln 1 - \ln 4) = 0 - \frac{1}{2\cdot\ln 2}\cdot(0 - 2\cdot\ln 2) = 1.$$

5. Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $\frac{n-1}{2^n} \geq 0$. Naime, brojnik razlomka je nenegativan kad je $n \geq 1$, a nazivnik razlomka je uvijek strogo pozitivan. Zbog toga prigodom primjene D'Alembertova kriterija ne moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Tako imamo redom:

$$r = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)-1}{2^{n+1}}}{\frac{n-1}{2^n}} = \lim_n \frac{\frac{n}{2^n\cdot 2}}{\frac{n-1}{2^n}} = \lim_n \frac{n}{2\cdot n - 2} = \lim_n \frac{1}{2 - \frac{2}{n}} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} < 1$$

Dakle, zadani red konvergira.

6. Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $\frac{n^2+n}{3^n} > 0$. Naime, brojnik razlomka je strogo pozitivan kad je $n \geq 1$, a nazivnik razlomka je uvijek strogo pozitivan. Zbog toga prigodom primjene D'Alembertova kriterija ne moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Tako imamo redom:

$$r = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+n}{3^n}} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{3^n \cdot 3}}{\frac{(n+1)\cdot n}{3^n}} = \lim_n \frac{n+2}{3\cdot n} = \lim_n \frac{1+\frac{2}{n}}{3} = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Dakle, zadani red konvergira.

7. Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $\frac{n^2-n}{5^n} \geq 0$. Naime, brojnik razlomka je nenegativan kad je $n \geq 1$, a nazivnik razlomka je uvijek strogo pozitivan. Zbog toga prigodom primjene D'Alembertova kriterija ne moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Tako imamo redom:

$$r = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^2-(n+1)}{5^{n+1}}}{\frac{n^2-n}{5^n}} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)\cdot n}{5^n \cdot 5}}{\frac{(n-1)\cdot n}{5^n}} = \lim_n \frac{n+1}{5\cdot n-5} = \lim_n \frac{1+\frac{1}{n}}{5-\frac{5}{n}} = \frac{1+0}{5-0} = \frac{1}{5} < 1$$

Dakle, zadani red konvergira.

8. Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $\frac{n\cdot 3^{2\cdot n}}{2^{3\cdot n}} > 0$ jer su svi članovi razlomka uvijek strogo pozitivni. Zbog toga prigodom primjene Cauchyjeva kriterija ne moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Tako imamo redom:

$$r = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n\cdot 3^{2\cdot n}}{2^{3\cdot n}}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{3^{2\cdot n}}}{\sqrt[n]{2^{3\cdot n}}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n}\cdot 3^2}{2^3} = \frac{1\cdot 9}{8} = \frac{9}{8} > 1$$

Dakle, zadani red divergira.

9. Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $\frac{n^2\cdot 2018^n}{13^{3\cdot n}} > 0$ jer su svi članovi razlomka uvijek strogo pozitivni. Zbog toga prigodom primjene Cauchyjeva kriterija ne moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Tako imamo redom:

$$r = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n^2\cdot 2018^n}{13^{3\cdot n}}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n^2}\cdot\sqrt[n]{2018^n}}{\sqrt[n]{13^{3\cdot n}}} = \lim_n \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\cdot 2018}{13^3} = \frac{1\cdot 2018}{2197} = \frac{2018}{2197} < 1$$

Dakle, zadani red konvergira.

10. Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $\frac{3\cdot n^2+2\cdot n+1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)} > 0$ jer su svi članovi razlomka uvijek strogo pozitivni. Zbog toga prigodom primjene Cauchyjeva kriterija ne moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Tako imamo redom:

$$r=\lim_n \sqrt[n]{a_n}=\lim_n \sqrt[n]{\left[\frac{3\cdot n^2+2\cdot n+1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}\right]^n}=\lim_n \frac{3\cdot n^2+2\cdot n+1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}=\lim_n \frac{3\cdot n^2+2\cdot n+1}{4\cdot n^2-1}=$$

$$=\lim_n \frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0+0}{4-0}=\frac{3}{4}<1$$

Dakle, zadani red konvergira.

11. Pretpostavimo da je $a_n=x^n$, za neki $x\in\mathbb{R}$. Tada su $a_{n-1}=x^{n-1}$ i $a_{n-2}=x^{n-2}$. Uvrštavanjem tih triju izraza u rekurziju i dijeljenjem dobivene jednakosti s x^{n-2} dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2=2\cdot x+8$. Njezina rješenja su $x_1=-2$ i $x_2=4$. Stoga je rješenje zadane rekurzije $a_n=A\cdot(-2)^n+B\cdot 4^n$, gdje su $A,B\in\mathbb{R}$ konstante.

Budući da imamo dva početna uvjeta, zadatak mora imati točno jedno rješenje. Uvrštavanjem $n=1$ u izraz $a_n=A\cdot(-2)^n+B\cdot 4^n$ dobijemo $a_1=A\cdot(-2)^1+B\cdot 4^1$, odnosno, zbog $a_1=2$, jednakost $-2\cdot A+4\cdot B=2$, tj. $-A+2\cdot B=1$.

Analogno, uvrštavanjem $n=2$ u izraz $a_n=A\cdot(-2)^n+B\cdot 4^n$ dobijemo $a_2=A\cdot(-2)^2+B\cdot 4^2$, odnosno, zbog $a_2=20$, jednakost $4\cdot A+16\cdot B=20$, tj. $A+4\cdot B=5$.

Tako iz sustava $\begin{cases}-A+2\cdot B=1,\\ A+4\cdot B=5\end{cases}$ lagano slijedi $(A,B)=(1,1)$. Dakle, rješenje zadatka je niz $a_n=(-2)^n+4^n$.

12. Pretpostavimo da je $b_n=x^n$, za neki $x\in\mathbb{R}$. Tada su $b_{n-1}=x^{n-1}$ i $b_{n-2}=x^{n-2}$. Uvrštavanjem tih triju izraza u rekurziju i dijeljenjem dobivene jednakosti s x^{n-2} dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2=5\cdot x+6$. Njezina rješenja su $x_1=-1$ i $x_2=6$. Stoga je rješenje zadane rekurzije $b_n=A\cdot(-1)^n+B\cdot 6^n$, gdje su $A,B\in\mathbb{R}$ konstante.

Budući da imamo dva početna uvjeta, zadatak mora imati točno jedno rješenje. Uvrštavanjem $n=1$ u izraz $b_n=A\cdot(-1)^n+B\cdot 6^n$ dobijemo $b_1=A\cdot(-1)^1+B\cdot 6^1$, odnosno, zbog $b_1=6$, jednakost $-A+6\cdot B=6$.

Analogno, uvrštavanjem $n=2$ u izraz $b_n=A\cdot(-1)^n+B\cdot 6^n$ dobijemo $b_2=A\cdot(-1)^2+B\cdot 6^2$, odnosno, zbog $b_2=36$, jednakost $A+36\cdot B=36$.

Tako iz sustava $\begin{cases}-A+6\cdot B=6,\\ A+36\cdot B=36\end{cases}$ lagano slijedi $(A,B)=(0,1)$. Dakle, rješenje zadatka je niz $b_n=6^n$.

7. GRUPA ZADATAKA

1. Za određivanje intervala konvergencije primijenit ćemo Cauchyjev kriterij. Izračunat ćemo $r=\lim\limits_{n}\sqrt[n]{|a_n|}$ i riješiti nejednadžbu $r<1$ po nepoznanici *x*. Potom ćemo posebno razmotriti slučaj $r=1$ za koji Cauchyjev kriterij ne daje odluku. Imamo redom:

$$r=\lim_{n}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^2}\right|}=\lim_{n}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^2}}=\lim_{n}\frac{\sqrt[n]{|x|^n}}{\sqrt[n]{n^2}}=\lim_{n}\frac{|x|}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}=\frac{|x|}{1^2}=|x|.$$

Nejednadžba $|x|<1$ ekvivalentna je nejednadžbi $-1<x<1$, a odatle je $x\in\langle -1,\ 1\rangle$.

Preostaje razmotriti slučaj $r=1$, odnosno $|x|=1$. Iz ove jednadžbe slijedi $x\in\{-1,\ 1\}$, pa razmotrimo zasebno svaki slučaj.

Za $x=1$ polazni red glasi: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. To je Dirichletov ili hiperharmonijski red za $p=2$. Znamo da Dirichletov red konvergira ako i samo ako je $p>1$, pa zaključujemo da dobiveni red konvergira.

Za $x=-1$ polazni red glasi: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Taj red je alternirajući, pa primijenimo Leibnizov kriterij. Niz $\frac{1}{n^2}$ je strogo pozitivan i padajući, te vrijedi $\lim\limits_{n}\frac{1}{n^2}=0$. Zbog toga red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergira.

Iz navedenoga zaključujemo da zadani red konvergira za $x\in[-1,\ 1]$. Dakle, traženi interval konvergencije je segment $[-1,\ 1]$.

2. Za određivanje intervala konvergencije primijenit ćemo Cauchyjev kriterij. Izračunat ćemo $r=\lim\limits_{n}\sqrt[n]{|a_n|}$ i riješiti nejednadžbu $r<1$ po nepoznanici *x*. Potom ćemo posebno razmotriti slučaj $r=1$ za koji Cauchyjev kriterij ne daje odluku. Imamo redom:

$$r=\lim_{n}\sqrt[n]{\left|\frac{x^{2\cdot n}}{n}\right|}=\lim_{n}\sqrt[n]{\frac{\left|x^2\right|^n}{n}}=\lim_{n}\frac{\sqrt[n]{\left|x^2\right|^n}}{\sqrt[n]{n}}=\lim_{n}\frac{\left|\overbrace{x^2}^{\geq 0}\right|}{\sqrt[n]{n}}=\frac{x^2}{1^2}=x^2.$$

Iz nejednadžbe $x^2<1$ slijedi $x\in\langle -1,\ 1\rangle$.

Preostaje razmotriti slučaj $r=1$, odnosno $x^2=1$. Iz ove jednadžbe slijedi $x=\pm 1$.

Za $x=\pm 1$ polazni red glasi: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(\pm 1)^{2\cdot n}}{n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[(\pm 1)^2\right]^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. To je harmonijski red. Znamo da je taj red divergentan, pa zaključujemo da zadani red divergira za $x=\pm 1$.

Dakle, traženi interval konvergencije je $\langle -1,\ 1\rangle$.

3. Za određivanje intervala konvergencije primijenit ćemo D'Alembertov kriterij. Izračunat ćemo $r=\lim\limits_{n}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ i riješiti nejednadžbu $r<1$ po nepoznanici *x*. Potom ćemo posebno razmotriti slučaj $r=1$ za koji D'Alembertov kriterij ne daje odluku. Imamo redom:

$$r=\lim_{n}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n}\left|\frac{\frac{(\ln x)^{n+1}}{(n+1)+1}}{\frac{(\ln x)^{n}}{n+1}}\right|=\lim_{n}\left|\frac{\frac{(\ln x)^{n}\cdot(\ln x)}{n+2}}{\frac{(\ln x)^{n}}{n+1}}\right|=\lim_{n}\left|\underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\to 1}\cdot(\ln x)\right|=\left|1\cdot\ln x\right|=\left|\ln x\right|.$$

Iz nejednadžbe $\left|\ln x\right|<1$ slijedi $-1<\ln x<1$, odnosno $e^{-1}<x<e$, pa je $x\in\left\langle\frac{1}{e},\ e\right\rangle$.

Preostaje razmotriti slučaj $r=1$, odnosno $\left|\ln x\right|=1$. Iz ove jednadžbe slijedi $\ln x=1$ ili $\ln x=-1$. Iz tih logaritamskih jednadžbi slijedi $x_1=\frac{1}{e}$ i $x_2=e$.

Za $x=\frac{1}{e}$ polazni red glasi: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\ln\frac{1}{e}\right)^n}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. Taj red je alternirajući, pa primijenimo Leibnizov kriterij. Niz $\frac{1}{n+1}$ je strogo pozitivan i strogo padajući, te vrijedi $\lim\limits_{n}\frac{1}{n+1}=0$. Zbog toga red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergira.

Za $x=e$ polazni red glasi: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(\ln e)^n}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1^n}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. To je harmonijski red. Taj red je divergentan. Zaključujemo da zadani red divergira za $x=e$.

Dakle, traženi interval konvergencije je interval $\left[\frac{1}{e},e\right)$.

4. Za određivanje intervala konvergencije primijenit ćemo D'Alembertov kriterij. Izračunat ćemo $r=\lim\limits_{n}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ i riješiti nejednadžbu $r<1$ po nepoznanici *x*. Potom ćemo posebno razmotriti slučaj $r=1$ za koji D'Alembertov kriterij ne daje odluku. Imamo redom:

$$r=\lim_{n}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n}\left|\frac{\frac{e^{2\cdot(n+1)\cdot x}}{(n+1)-2}}{\frac{e^{2\cdot n\cdot x}}{n-2}}\right|=\lim_{n}\left|\frac{\frac{e^{2\cdot n\cdot x}\cdot e^{2\cdot x}}{n-1}}{\frac{e^{2\cdot n\cdot x}}{n-2}}\right|=\lim_{n}\left|\underbrace{\frac{n-2}{n-1}}_{\to 1}\cdot e^{2\cdot x}\right|=\left|1\cdot\underbrace{e^{2\cdot x}}_{>0}\right|=e^{2\cdot x}.$$

Iz nejednadžbe $e^{2\cdot x}<1$ slijedi $2\cdot x<0$, odnosno $x<0$, pa je $x\in\left\langle-\infty,\ 0\right\rangle$.

Preostaje razmotriti slučaj $r=1$, odnosno $e^{2\cdot x}=1$. Iz ove jednadžbe slijedi $x=0$.

Za $x=0$ polazni red glasi: $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{e^{2\cdot n\cdot 0}}{n-2}=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n-2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. To je harmonijski red. Taj red divergira. Stoga zaključujemo da zadani red divergira za $x=0$.

Dakle, traženi interval konvergencije je interval $\langle -\infty,\ 0\rangle$.

5. Računamo vrijednosti zadane funkcije i njezinih prvih triju derivacija u točki $c=0$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} f(x)&=2\cdot\left(e^{2\cdot x}-\sin x\right), & f(0)&=2,\\ f'(x)&=2\cdot\left(2\cdot e^{2\cdot x}-\cos x\right), & f'(0)&=2,\\ f''(x)&=2\cdot\left(4\cdot e^{2\cdot x}+\sin x\right), & f''(0)&=8,\\ f'''(x)&=2\cdot\left(8\cdot e^{2\cdot x}+\cos x\right), & f'''(0)&=18. \end{aligned}$$

Stoga je traženi MacLaurinov polinom jednak:

$$M_3(x)=2+\frac{2}{1!}\cdot x^1+\frac{8}{2!}\cdot x^2+\frac{18}{3!}\cdot x^3=2+2\cdot x+4\cdot x^2+3\cdot x^3=3\cdot x^3+4\cdot x^2+2\cdot x+2.$$

6. Računamo vrijednosti zadane funkcije i njezinih prvih triju derivacija u točki $c=0$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} g(y)&=6\cdot\left[e^{y}+\sin(2\cdot y)\right], & g(0)&=6,\\ g'(y)&=6\cdot\left[e^{y}+2\cdot\cos(2\cdot y)\right], & g'(0)&=18,\\ g''(y)&=6\cdot\left[e^{y}-4\cdot\sin(2\cdot y)\right], & g''(0)&=6,\\ g'''(y)&=6\cdot\left[e^{y}-8\cdot\cos(2\cdot y)\right], & g'''(0)&=-42. \end{aligned}$$

Stoga je traženi MacLaurinov polinom jednak:

$$M_3(y)=6+\frac{18}{1!}\cdot y^1+\frac{6}{2!}\cdot y^2-\frac{42}{3!}\cdot y^3=6+18\cdot y+3\cdot y^2-7\cdot y^3=-7\cdot y^3+3\cdot y^2+18\cdot y+6.$$

7. Računamo vrijednosti zadane funkcije i njezinih prvih triju derivacija u točki $c=0$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} h(t)&=6\cdot\left[\sin(4\cdot t)+\cos(3\cdot t)\right], & g(0)&=6,\\ h'(t)&=6\cdot\left[4\cdot\cos(4\cdot t)-3\cdot\sin(3\cdot t)\right], & g'(0)&=24,\\ h''(t)&=6\cdot\left[-16\cdot\sin(4\cdot t)-9\cdot\cos(3\cdot t)\right], & g''(0)&=-54,\\ h'''(t)&=6\cdot\left[-64\cdot\cos(4\cdot t)+27\cdot\sin(3\cdot t)\right], & g'''(0)&=-384. \end{aligned}$$

Stoga je traženi MacLaurinov polinom jednak:

$$M_3(t)=6+\frac{24}{1!}\cdot t^1-\frac{54}{2!}\cdot t^2-\frac{384}{3!}\cdot t^3=6+24\cdot t-27\cdot t^2-64\cdot t^3=-64\cdot t^3-27\cdot t^2+24\cdot t+6.$$

8. Računamo vrijednosti zadane funkcije i njezinih prvih triju derivacija u točki $c=0$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
p(w) &= 6\cdot\left[\cos(6\cdot w)-\sin(5\cdot w)\right], & p(0)&=6,\\
p'(w) &= 6\cdot\left[-6\cdot\sin(6\cdot w)-5\cdot\cos(5\cdot w)\right], & p'(0)&=-30,\\
p''(w) &= 6\cdot\left[-36\cdot\cos(6\cdot w)+25\cdot\sin(5\cdot w)\right], & p''(0)&=-216,\\
p'''(w) &= 6\cdot\left[-216\cdot\sin(6\cdot w)+125\cdot\cos(5\cdot w)\right], & p'''(0)&=750.
\end{aligned}$$

Stoga je traženi MacLaurinov polinom jednak:

$$M_3(w)=6-\frac{30}{1!}\cdot w^1-\frac{216}{2!}\cdot w^2+\frac{750}{3!}\cdot w^3=6-30\cdot w-108\cdot w^2+125\cdot w^3=125\cdot w^3-108\cdot w^2-30\cdot w+6.$$

9. Računamo vrijednosti zadane funkcije i njezinih prvih triju derivacija u točki $c=1$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3\cdot e^{x^2-1}, & f(1)&=3,\\
f'(x) &= 3\cdot e^{x^2-1}\cdot(2\cdot x)=6\cdot x\cdot e^{x^2-1}, & f'(1)&=6,\\
f''(x) &= 6\cdot e^{x^2-1}+6\cdot x\cdot e^{x^2-1}\cdot(2\cdot x)=(12\cdot x^2+6)\cdot e^{x^2-1}, & f''(1)&=18,\\
f'''(x) &= 24\cdot x\cdot e^{x^2-1}+(12\cdot x^2+6)\cdot e^{x^2-1}\cdot 2\cdot x, & f'''(1)&=60.
\end{aligned}$$

Stoga je traženi Taylorov polinom jednak:

$$T_3(x)=3+\frac{6}{1!}\cdot(x-1)^1+\frac{18}{2!}\cdot(x-1)^2+\frac{60}{3!}\cdot(x-1)^3=10\cdot(x-1)^3+9\cdot(x-1)^2+6\cdot(x-1)+3.$$

10. Računamo vrijednosti zadane funkcije i njezinih prvih triju derivacija u točki $c=1$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
g(y) &= \ln^2 y, & g(1)&=0,\\
g'(y) &= 2\cdot\ln y\cdot\frac{1}{y}=2\cdot\frac{\ln y}{y}, & g'(1)&=0,\\
g''(y) &= 2\cdot\frac{\frac{1}{y}\cdot y-(\ln y)\cdot 1}{y^2}=2\cdot\frac{1-\ln y}{y^2}, & g''(1)&=2,\\
g'''(y) &= 2\cdot\frac{-\frac{1}{y}\cdot y^2-(1-\ln y)\cdot(2\cdot y)}{y^4}, & g'''(1)&=-6.
\end{aligned}$$

Stoga je traženi Taylorov polinom jednak:

$$T_3(x)=0+\frac{0}{1!}\cdot(y-1)^1+\frac{2}{2!}\cdot(y-1)^2-\frac{6}{3!}\cdot(y-1)^3=-(y-1)^3+(y-1)^2.$$

11. Računamo vrijednosti zadane funkcije i njezinih prvih triju derivacija u točki $c=\pi$. Pritom koristimo osnovne trigonometrijske identitete $\cos^2 t=1-\sin^2 t$ i $\sin^2 t=1-\cos^2 t$. Imamo redom:

$$h(t)=\sin^3 t, \qquad h(\pi)=0,$$
$$h'(t)=3\cdot\sin^2 t\cdot\cos t=3\cdot(1-\cos^2 t)\cdot\cos t=3\cdot\cos t-3\cdot\cos^3 t, \qquad h'(\pi)=0,$$
$$h''(t)=-3\cdot\sin t+3\cdot 3\cdot\cos^2 t\cdot\sin t=-3\cdot\sin t+9\cdot(1-\sin^2 t)\cdot\sin t=6\cdot\sin t-9\cdot\sin^3 t, \qquad g''(\pi)=0,$$
$$g'''(t)=6\cdot\cos t-9\cdot 3\cdot\sin^2 t\cdot\cos t, \qquad g'''(\pi)=-1.$$

Stoga je traženi Taylorov polinom jednak:

$$T_3(t)=0+\frac{0}{1!}\cdot(t-\pi)^1+\frac{0}{2!}\cdot(t-\pi)^2-\frac{6}{3!}\cdot(t-\pi)^3=-(t-\pi)^3.$$

12. Računamo vrijednosti zadane funkcije i njezinih prvih triju derivacija u točki $c=\frac{\pi}{2}$. Pritom koristimo osnovne trigonometrijske identitete $\cos^2 w=1-\sin^2 w$ i $\sin^2 t=1-\cos^2 w$. Imamo redom:

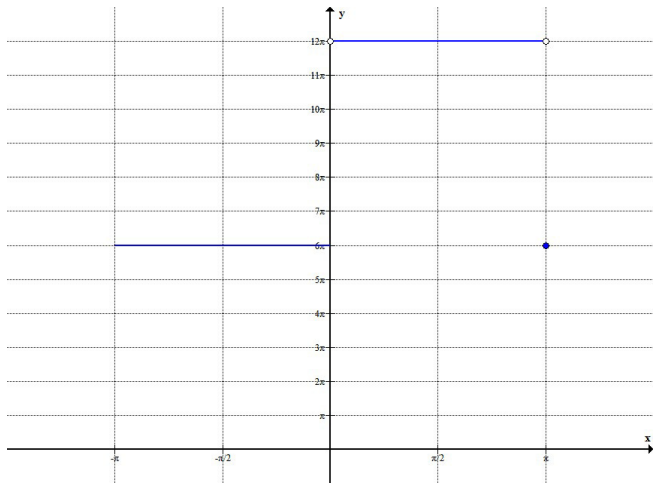
$$h(w)=\cos^3 w, \qquad h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$
$$h'(w)=-3\cdot\cos^2 w\cdot\sin w=-3\cdot(1-\sin^2 w)\cdot\sin w=3\cdot\sin^3 w-3\cdot\sin w, \qquad h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$
$$h''(w)=3\cdot 3\cdot\sin^2 w\cdot\cos w-3\cdot\cos w=9\cdot(1-\cos^2 w)\cdot\cos w-3\cdot\cos w=6\cdot\cos w-9\cdot\cos^3 w, \qquad h''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$
$$h'''(w)=-6\cdot\sin w+9\cdot 3\cdot\cos^2 w\cdot\sin w, \qquad h'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

Stoga je traženi Taylorov polinom jednak:

$$T_3(w)=0+\frac{0}{1!}\cdot\left(w-\frac{\pi}{2}\right)^1+\frac{0}{2!}\cdot\left(w-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{6}{3!}\cdot\left(w-\frac{\pi}{2}\right)^3=-\left(w-\frac{\pi}{2}\right)^3.$$

8. GRUPA ZADATAKA

1. Nacrtamo graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi,\pi]$. Dobivamo sliku 6.



Slika 6.

Uočavamo da zadana funkcija na navedenom segmentu nema nijedan strogi ekstrem, ali zato ima dvije točke prekida prve vrste ($x = 0$ i $x = \pi$). Stoga vrijede svi Dirichletovi uvjeti.

Vrijednosti Fourierovih koeficijenata računamo prema formulama iz *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike*, str. 53. Koristimo i parnost funkcije kosinus, tj. trigonometrijski identitet $\cos(-n\cdot\pi)=\cos(n\cdot\pi),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Imamo redom:

$$a_0=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0}6\cdot\pi\cdot\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}12\cdot\pi\cdot\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\left[6\cdot\pi\cdot x\right]_{-\pi}^{0}+\left[12\cdot\pi\cdot x\right]_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left[0-6\cdot\pi\cdot(-\pi)+12\cdot\pi\cdot\pi-0\right]=9\cdot\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0}6\cdot\pi\cdot\cos(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}12\cdot\pi\cdot\cos(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\left[\frac{6\cdot\pi}{n}\cdot\sin(n\cdot x)\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{12\cdot\pi}{n}\cdot\sin(n\cdot x)\right]_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=(\text{zbog }\sin(n\cdot 0)=\sin(n\cdot\pi)=0,\forall n\in\mathbb{Z})=0,\forall n\in\mathbb{Z}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0}6\cdot\pi\cdot\sin(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}12\cdot\pi\cdot\sin(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\left[-\frac{6\cdot\pi}{n}\cdot\cos(n\cdot x)\right]_{-\pi}^{0}+\left[-\frac{12\cdot\pi}{n}\cdot\cos(n\cdot x)\right]_{0}^{\pi}\right)=$$

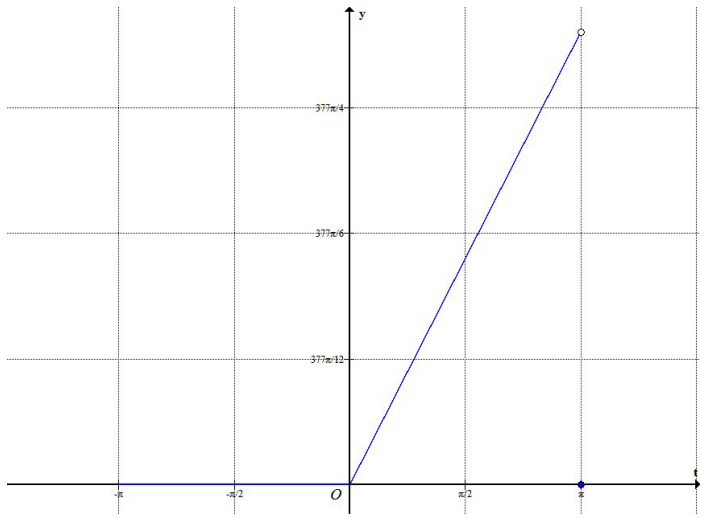
$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left[-\frac{6\cdot\pi}{n}+\frac{6\cdot\pi}{n}\cdot\cos(n\cdot\pi)-\frac{12\cdot\pi}{n}\cdot\cos(n\cdot\pi)+\frac{12\cdot\pi}{n}\right]=\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{6\cdot\pi}{n}-\frac{6\cdot\pi}{n}\cdot\cos(n\cdot\pi)\right]=\frac{6}{n}\cdot\left[1-\cos(n\cdot\pi)\right]$$

$$\Rightarrow b_1=\frac{6}{1}\cdot\left[1-\cos(1\cdot\pi)\right]=12,\ b_2=\frac{6}{2}\cdot\left[1-\cos(2\cdot\pi)\right]=0,\ b_3=\frac{6}{3}\cdot\left[1-\cos(3\cdot\pi)\right]=4.$$

Dakle, traženi polinom je jednak:

$$F_3(x)=9\cdot\pi+12\cdot\sin x+4\cdot\sin(3\cdot x).$$

2. Nacrtamo graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi,\pi]$. Dobivamo sliku 7.



Slika 7.

Uočavamo da zadana funkcija na navedenom segmentu nema nijedan strogi ekstrem, ali zato ima jednu točku prekida prve vrste ($t=\pi$). Stoga vrijede Dirichletovi uvjeti.

Vrijednosti Fourierovih koeficijenata računamo prema formulama iz *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike*, str. 53. i 55. Budući da je funkcija g identički jednaka nuli na segmentu $[-\pi,\ 0]$, i pripadni određeni integrali na tom segmentu su jednaki nuli. Stoga određene integrale računamo na segmentu $[0,\ \pi]$. Koristimo i parnost funkcije kosinus, tj. trigonometrijski identitet $\cos(-n\cdot\pi)=\cos(n\cdot\pi),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Imamo redom:

$$a_0=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{\pi}36\cdot\pi\cdot t\cdot \mathrm{d}t=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left[18\cdot\pi\cdot t^2\right]_0^{\pi}=9\cdot\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}36\cdot\pi\cdot t\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t=36\cdot\left[\frac{1}{n^2}\cdot\left[\cos(n\cdot t)+n\cdot t\cdot\sin(n\cdot t)\right]\right]_0^{\pi}=$$

$$=(\text{zbog } \sin(n\cdot 0)=\sin(n\cdot\pi)=0,\forall n\in\mathbb{Z})=\frac{36}{n^2}\cdot\left[\cos(n\cdot\pi)-1\right]\Rightarrow a_1=-72,\ a_2=0,\ a_3=-8.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}36\cdot\pi\cdot t\cdot\sin(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t=36\cdot\left[\frac{1}{n^2}\cdot\left[\sin(n\cdot t)-n\cdot t\cdot\cos(n\cdot t)\right]\right]_0^{\pi}=$$

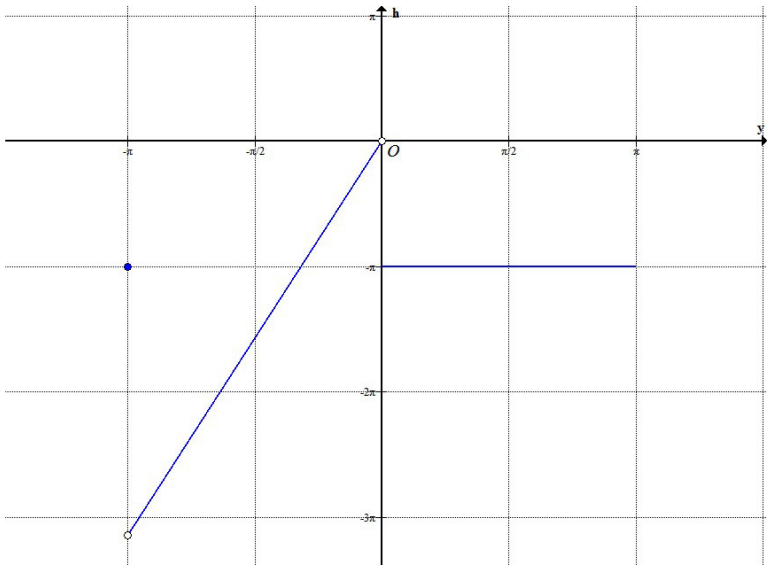
$$=(\text{zbog } \sin(n\cdot 0)=\sin(n\cdot\pi)=0,\forall n\in\mathbb{Z})=\frac{36}{n^2}\cdot\left[-n\cdot\pi\cdot\cos(n\cdot\pi)\right]=-\frac{36\cdot\pi}{n}\cdot\cos(n\cdot\pi)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1=36\cdot\pi,\ b_2=-18\cdot\pi,\ b_3=12\cdot\pi.$$

Dakle, traženi polinom je jednak:

$$F_3(t)=9\cdot\pi^2-72\cdot\cos t+36\cdot\pi\cdot\sin t-18\cdot\pi\cdot\sin(2\cdot t)-8\cdot\cos(3\cdot t)+12\cdot\pi\cdot\sin(3\cdot t).$$

3. Nacrtamo graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi,\pi]$. Dobivamo sliku 8. Uočavamo da zadana funkcija na navedenom segmentu nema nijedan strogi ekstrem, ali zato ima dvije točke prekida prve vrste ($y=-\pi$ i $y=0$). Stoga vrijede svi Dirichletovi uvjeti.



Slika 8.

Vrijednosti Fourierovih koeficijenata računamo prema formulama iz *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike*, str. 53. i 55. Koristimo i parnost funkcije kosinus, tj. trigonometrijski identitet $\cos(-n\cdot\pi)=\cos(n\cdot\pi),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Imamo redom:

$$a_0=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cdot y\cdot \mathrm{d}y+\int_{0}^{\pi}-\pi\cdot \mathrm{d}y\right)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\left[\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot y^2\right]_{-\pi}^{0}-\left[\pi\cdot y\right]_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left[-\frac{\pi^3}{2}-\pi^2\right]=-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cdot y\cdot\cos(n\cdot y)\cdot \mathrm{d}y+\int_{0}^{\pi}-\pi\cdot\cos(n\cdot y)\cdot \mathrm{d}y\right)=\int_{-\pi}^{0}y\cdot\cos(n\cdot y)\cdot \mathrm{d}y-\int_{0}^{\pi}\cos(n\cdot y)\cdot \mathrm{d}y=$$

$$=\left[\frac{1}{n^2}\cdot(\cos(n\cdot y)+n\cdot y\cdot\sin(n\cdot y))\right]_{-\pi}^{0}-\left[\frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot y)\right]_0^{\pi}=(\text{zbog }\sin(n\cdot 0)=\sin(n\cdot\pi)=0,\forall n\in\mathbb{Z})$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot\left[1-\cos(n\cdot\pi)\right]\Rightarrow a_1=2,\ a_2=0,\ a_3=\frac{2}{9}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cdot y\cdot\sin(n\cdot y)\cdot \mathrm{d}y+\int_{0}^{\pi}-\pi\cdot\sin(n\cdot y)\cdot \mathrm{d}y\right)=\int_{-\pi}^{0}y\cdot\sin(n\cdot y)\cdot \mathrm{d}y-\int_{0}^{\pi}\sin(n\cdot y)\cdot \mathrm{d}y=$$

$$=\left[\frac{1}{n^2}\cdot\left(\sin(n\cdot y)-n\cdot y\cdot\cos(n\cdot y)\right)\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{1}{n}\cdot\cos(n\cdot y)\right]_0^{\pi}=(\text{zbog }\sin(n\cdot 0)=\sin(n\cdot\pi)=0,\forall n\in\mathbb{Z})$$

$$=-\frac{\pi}{n}\cdot\cos(n\cdot\pi)+\frac{1}{n}\cdot\cos(n\cdot\pi)-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\left[(1-\pi)\cdot\cos(n\cdot\pi)-1\right]\Rightarrow b_1=\pi-2,\ b_2=-\frac{\pi}{2},\ b_3=\frac{\pi-2}{3}.$$

Dakle, traženi polinom je:

$$F_3(y)=\left(-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\right)+2\cdot\cos y+(\pi-2)\cdot\sin y-\frac{\pi}{2}\cdot\sin(2\cdot y)+\frac{2}{9}\cdot\cos(3\cdot y)+\left(\frac{\pi-2}{3}\right)\cdot\sin(3\cdot y).$$

4. Znamo: ako je f neparna $(2\cdot\pi)$-periodična funkcija, onda u razvoju funkcije u Fourierov red postoje samo članovi oblika $b_n\cdot\sin(n\cdot x)$. Te članove računamo prema formuli iz *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike* na str. 54. i 55. Imamo redom:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}3\cdot\pi\cdot\sin(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=6\cdot\int_0^{\pi}\sin(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\left[-\frac{6}{n}\cdot\cos(n\cdot x)\right]_0^{\pi}=$$
$$=\frac{6}{n}\cdot\left[1-\cos(n\cdot\pi)\right]\Rightarrow b_1=12,\ b_2=0,\ b_3=4.$$

Dakle, traženi polinom je $F_3(x)=12\cdot\sin x+4\cdot\sin(3\cdot x)$.

5. Znamo: ako je f neparna $(2\cdot\pi)$-periodična funkcija, onda u razvoju funkcije u Fourierov red postoje samo članovi oblika $b_n\cdot\sin(n\cdot t)$. Te članove računamo prema formuli iz *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike* na str. 54. i 55. Imamo redom:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}(-6)\cdot\pi\cdot\sin(n\cdot t)\cdot\mathrm{d}t=-12\cdot\int_{-\pi}^{0}\sin(n\cdot t)\cdot\mathrm{d}t=\left[\frac{12}{n}\cdot\cos(n\cdot t)\right]_{-\pi}^{0}=$$
$$=\frac{12}{n}\cdot\left[1-\cos(n\cdot\pi)\right]\Rightarrow b_1=24,\ b_2=0,\ b_3=8.$$

Dakle, traženi polinom je $F_3(t)=24\cdot\sin t+8\cdot\sin(3\cdot t)$.

6. Znamo: ako je f neparna $(2\cdot\pi)$-periodična funkcija, onda u razvoju funkcije u Fourierov red postoje samo članovi oblika $b_n\cdot\sin(n\cdot y)$. Te članove računamo prema formuli iz *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike* na str. 54. i 55. Imamo redom:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}6\cdot\pi\cdot(y+1)\cdot\sin(n\cdot y)\cdot\mathrm{d}y=12\cdot\int_0^{\pi}(y+1)\cdot\sin(n\cdot y)\cdot\mathrm{d}y=$$
$$=12\cdot\left[\frac{1}{n^2}\cdot\left(\sin(n\cdot y)-(n\cdot y+n)\cdot\cos(n\cdot y)\right)\right]_0^{\pi}=\frac{12}{n}\cdot\left[1-(\pi+1)\cdot\cos(n\cdot\pi)\right]$$
$$\Rightarrow b_1=12\cdot\pi+24,\ b_2=-6\cdot\pi,\ b_3=4\cdot\pi+8.$$

Dakle, traženi polinom je $F_3(y)=\left(12\cdot\pi+24\right)\cdot\sin y-6\cdot\pi\cdot\sin(2\cdot y)+\left(4\cdot\pi+8\right)\cdot\sin(3\cdot y)$.

7. Znamo: ako je f parna $(2\cdot\pi)$-periodična funkcija, onda u razvoju funkcije u Fourierov red postoje samo članovi oblika $a_n\cdot\cos(n\cdot x)$, pri čemu je $n\in\mathbb{N}_0$. Te članove računamo prema formuli iz *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike* na str. 54. i 55. No, najprije primijetimo da, prema definiciji funkcije apsolutne vrijednosti, vrijedi jednakost:

$$f(x)=\begin{cases}-18\cdot\pi\cdot x, & \text{za } -\pi<x<0,\\ 18\cdot\pi\cdot x, & \text{za } 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Napomenimo da zbog pretpostavljene $(2\cdot\pi)$-periodičnosti funkcije f vrijedi jednakost $f(-\pi)=f(\pi)=18\cdot\pi^2$, no, ona nam nije bitna za rješavanje zadatka. Tako imamo redom:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} 18\cdot\pi\cdot x\cdot \mathrm{d}x = 18\cdot\int_0^{\pi} x\cdot \mathrm{d}x = 18\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot x^2\right]_0^{\pi} = 9\cdot\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} 18\cdot\pi\cdot x\cdot\cos(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = 36\cdot\int_0^{\pi} x\cdot\cos(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = 36\cdot\left[\frac{1}{n^2}\cdot\big(\cos(n\cdot x)+n\cdot x\cdot\sin(n\cdot x)\big)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{36}{n^2}\cdot\big[\cos(n\cdot\pi)-1\big] \Rightarrow a_1 = -72,\ a_2 = 0,\ a_3 = -8.$$

Dakle, traženi polinom je $F_3(x) = 9\cdot\pi^2 - 72\cdot\cos x - 8\cdot\cos(3\cdot x)$.

8. Znamo: ako je *f* parna $(2\cdot\pi)$-periodična funkcija, onda u razvoju funkcije u Fourierov red postoje samo članovi oblika $a_n\cdot\cos(n\cdot t)$, pri čemu je $n\in\mathbb{N}_0$. Te članove računamo prema formuli iz *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike* na str. 54. i 55. Imamo redom:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} \pi\cdot t\cdot \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{0} t\cdot \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\cdot t^2\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi^2}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} \pi\cdot t\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot\int_{-\pi}^{0} t\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot\left[\frac{1}{n^2}\cdot\big(\cos(n\cdot t)+n\cdot t\cdot\sin(n\cdot t)\big)\right]_{-\pi}^{0} =$$

$$= \frac{2}{n^2}\cdot\big[1-\cos(n\cdot\pi)\big] \Rightarrow a_1 = 4,\ a_2 = 0,\ a_3 = \frac{4}{9}.$$

Dakle, traženi polinom je $F_3(t) = -\frac{\pi^2}{2} + 4\cdot\cos t + \frac{4}{9}\cdot\cos(3\cdot t)$.

9. Znamo: ako je *f* parna $(2\cdot\pi)$-periodična funkcija, onda u razvoju funkcije u Fourierov red postoje samo članovi oblika $a_n\cdot\cos(n\cdot y)$, pri čemu je $n\in\mathbb{N}_0$. Te članove računamo prema formuli iz *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike* na str. 54. i 55. Imamo redom:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} -36\cdot\pi\cdot y\cdot \mathrm{d}y = -36\cdot\int_0^{\pi} y\cdot \mathrm{d}y = -36\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot y^2\right]_0^{\pi} = -18\cdot\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} -36\cdot\pi\cdot y\cdot\cos(n\cdot y)\cdot \mathrm{d}y = -72\cdot\int_0^{\pi} y\cdot\cos(n\cdot y)\cdot \mathrm{d}y = -72\cdot\left[\frac{1}{n^2}\cdot\big(\cos(n\cdot y)+n\cdot x\cdot\sin(n\cdot y)\big)\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{72}{n^2}\cdot\big[\cos(n\cdot\pi)-1\big] \Rightarrow a_1 = 144,\ a_2 = 0,\ a_3 = 16.$$

Dakle, traženi polinom je $F_3(y) = -18\cdot\pi^2 + 144\cdot\cos y + 16\cdot\cos(3\cdot y)$.

9. GRUPA ZADATAKA

1. Odredimo najprije standardnu antiderivaciju funkcije $\frac{1}{4\cdot w^2+12\cdot w+5}$. Imamo redom:

$$\int\frac{1}{4\cdot w^2+12\cdot w+5}\cdot \mathrm{d}w=\int\frac{1}{(2\cdot w+3)^2-4}\cdot \mathrm{d}w=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=2\cdot w+3,\\ \mathrm{d}t=2\cdot \mathrm{d}w\Leftrightarrow \mathrm{d}w=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}t\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{t^2-4}\cdot \mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|=\frac{1}{8}\cdot\ln\left|\frac{2\cdot w+3-2}{2\cdot w+3+2}\right|=\frac{1}{8}\cdot\ln\left|\frac{2\cdot w+1}{2\cdot w+5}\right|=\frac{1}{8}\cdot\ln\left|1-\frac{4}{2\cdot w+5}\right|+C\Rightarrow$$

$$F(w)=\frac{1}{8}\cdot\ln\left|1-\frac{4}{2\cdot w+5}\right|.$$

Tako dobivamo:

$$I=\frac{8}{\ln 5}\cdot\lim_{a\to-\infty}\left[F(-3)-F(a)\right]=\frac{8}{\ln 5}\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{8}\cdot\ln\left|1-\frac{4}{2\cdot(-3)+5}\right|-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|1-\frac{2}{2\cdot a+5}\right|\right)=$$

$$=\frac{8}{\ln 5}\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot\ln|1+4|-\frac{1}{8}\cdot\ln|1-0|\right)=\frac{8}{\ln 5}\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot\ln 5-\frac{1}{2}\cdot\ln 1\right)=\frac{8}{\ln 5}\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot\ln 5-\frac{1}{2}\cdot 0\right)=1.$$

2. Uočimo da je baza potencije pod znakom zbrajanja strogo pozitivna jer je svaki član u dotičnom razlomku prirodan broj. To znači da nije potrebno ispitivati apsolutnu konvergenciju reda. Stoga primijenimo D'Alembertov kriterij. Označimo $a_n=\frac{n^2+11\cdot n}{13^n}$, pa je

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)^2+11\cdot(n+1)}{13^{n+1}}=\frac{n^2+13\cdot n+12}{13^{n+1}}.$$

Stoga dobivamo:

$$r=\lim_n\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_n\frac{\frac{n^2+13\cdot n+12}{13^{n+1}}}{\frac{n^2+11\cdot n}{13^n}}=\lim_n\left(\frac{n^2+13\cdot n+12}{n^2+11\cdot n}\cdot\frac{1}{13}\right)=1\cdot\frac{1}{13}=\frac{1}{13}<1.$$

Zaključujemo da zadani red konvergira.

3. Raspišimo zadani red:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\mathrm{ctg}^{2\cdot n}x=1-\mathrm{ctg}^2x+\mathrm{ctg}^4x-\mathrm{ctg}^6x+\ldots$$

Vidimo da je riječ o geometrijskom redu čiji je prvi član jednak 1, a količnik jednak $-\mathrm{ctg}^2x$. Zbroj toga reda jednak je:

$$S=\frac{1}{1-(-\mathrm{ctg}^2 x)}=\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 x}=\frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{1}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}}=\sin^2 x=\frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(2\cdot x)\right].$$

Iz jednadžbe $S=\frac{3}{4}$ slijedi $1-\cos(2\cdot x)=\frac{3}{2}$, odnosno $\cos(2\cdot x)=\frac{1}{2}$. Odatle je $2\cdot x=\pm\arccos\left(\frac{1}{2}\right)+2\cdot k\cdot\pi$, odnosno $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

4. Primijenimo D'Alembertov kriterij. Izračunamo:

$$L=\lim_n\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_n\left|\frac{\frac{(x+1)^{(n+1)+1}}{(n+1)^2+(n+1)}}{\frac{(x+1)^{n+1}}{n^2+n}}\right|=\lim_n\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2+(n+1)}}{\frac{1}{n^2+n}}\cdot(x+1)^{(n+1)+1-(n+1)}\right|=$$

$$=\lim_n\left|\frac{n^2+n}{(n+1)^2+(n+1)}\cdot(x+1)^1\right|=\lim_n\left|\frac{n\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot\left[(n+1)+1\right]}\cdot(x+1)\right|=\lim_n\left|\frac{n}{n+2}\cdot(x+1)\right|=1\cdot|x+1|=|x+1|.$$

Prema navedenu kriteriju, zadani red će konvergirati za $L<1$. Stoga iz $|x+1|<1$ slijedi $-1<x+1<1\Leftrightarrow -2<x<0\Leftrightarrow x\in\langle -2,0\rangle$. Preostaje ispitati konvergenciju reda u rubovima toga intervala.

Za $x=-2$ dobijemo alternirajući red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+n}$. Promotrimo niz $b_n=\frac{1}{n^2+n}$. Taj niz je strogo padajući i $\lim_n b_n=0$. Stoga navedeni red konvergira prema Leibnizovu kriteriju.

Za $x=0$ dobijemo red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1^n}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n}$. Primijetimo da vrijedi nejednakost

$$n^2+n>n^2>0\text{, za svaki } n\in\mathbb{N}.$$

Odatle slijedi

$$0<\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2}\text{, odnosno } 0<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n}<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ je Dirichletov red za $p=2$. Taj red konvergira i zbroj mu je jednak $\frac{\pi^2}{6}$ (što smo dokazali na vježbama). Dakle, zbroj reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n}$ pripada intervalu $\left\langle 0,\ \frac{1}{6}\cdot\pi^2\right\rangle$, pa je taj red konvergentan.

Štoviše, možemo točno izračunati njegov zbroj S koristeći rastav funkcije na parcijalne razlomke:

$$a_n=\frac{1}{n^2+n}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}\Rightarrow 1=A\cdot(n+1)+B\cdot n\Rightarrow\begin{cases}\text{za } n=0: A=1,\\ \text{za } n=-1: B=-1\end{cases}\Rightarrow (A,B)=(1,-1)\Rightarrow\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow S_1=a_1=1-\frac{1}{2},\ S_2=S_1+a_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3},\ S_3=S_2+a_3=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4},\ldots,$$

$$\overset{\text{indukcijom}}{\Rightarrow}\quad S_n=1-\frac{1}{n+1}\Rightarrow S=\lim_n S_n=\lim_n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.$$

Dakle, traženo područje konvergencije je segment $[-2,\ 0]$.

5. Primijetimo da vrijede nejednakost $\pi^{n\cdot x+1}>0$ i $n>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}$. To znači da nije potrebno ispitivati apsolutnu konvergenciju reda. Primijenimo Cauchyjev kriterij. Računamo:

$$r=\lim_n\sqrt[n]{\frac{\pi^{n\cdot x+1}}{n}}=\lim_n\frac{\sqrt[n]{\pi^{n\cdot x+1}}}{\sqrt[n]{n}}=\lim_n\frac{\pi^{\frac{n\cdot x+1}{n}}}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}}=\lim_n\pi^{x+\frac{1}{n}}=\pi^x.$$

Zadani red konvergira ako je $\pi^x<1$, odnosno $x<0$.

Preostaje ispitati konvergenciju zadanoga reda za $x=0$.

Za $x=0$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{n}=\pi\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Očito je $\pi\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}>\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Budući da red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ divergira (riječ je o harmonijskom redu), onda divergira i red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{n}$.

Zaključujemo da je traženo područje konvergencije interval $\langle-\infty,\ 0\rangle$.

6. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
f(u)&=2\cdot\left[\sin(2\cdot u)-e^u\right] & f(0)&=-2\\
f'(u)&=2\cdot\left[2\cdot\cos(2\cdot u)-e^u\right] & f'(0)&=2\\
f''(u)&=2\cdot\left[-4\cdot\sin(2\cdot u)-e^u\right] & f''(0)&=-2\\
f'''(u)&=2\cdot\left[-8\cdot\cos(2\cdot u)-e^u\right] & f'''(0)&=-18
\end{aligned}$$

Stoga je traženi polinom jednak

$$M_3(u)=-2+\frac{2}{1!}\cdot u^1-\frac{2}{2!}\cdot u^2-\frac{18}{3!}\cdot u^3=-2+2\cdot u-u^2-3\cdot u^3=-3\cdot u^3-u^2+2\cdot u-2.$$

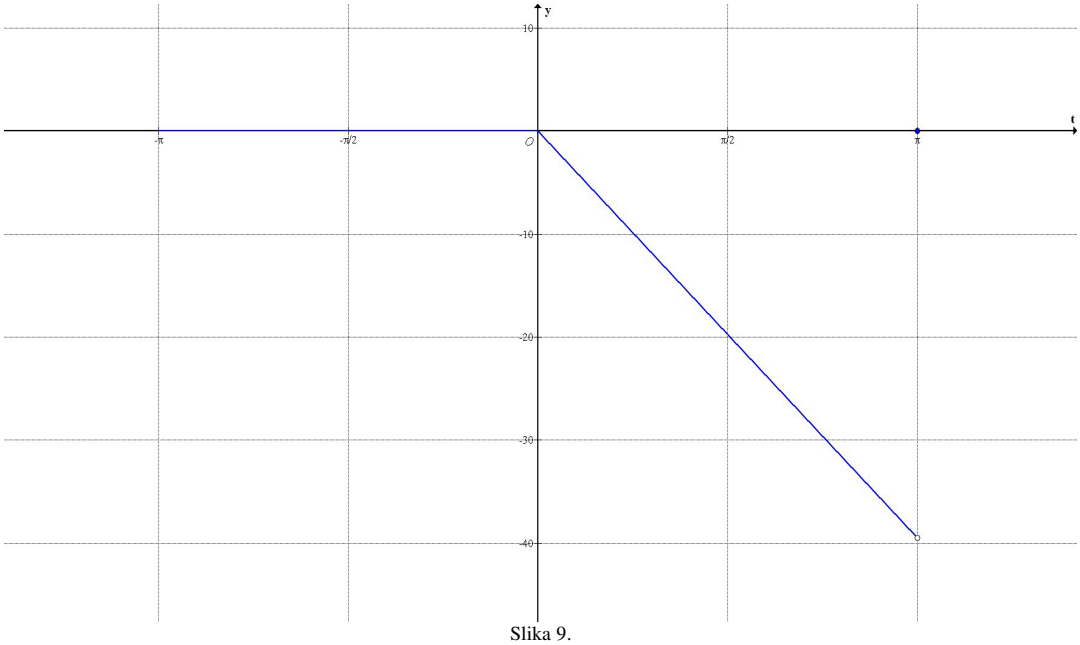
7. Primijenit ćemo trigonometrijski identitet $\sin(2\cdot y)=2\cdot\sin y\cdot\cos y$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
f(y)&=3\cdot\sin^2 y, & f(2\cdot\pi)&=0,\\
f'(y)&=3\cdot 2\cdot\sin y\cdot\cos y=3\cdot\sin(2\cdot y), & f'(2\cdot\pi)&=0,\\
f''(y)&=6\cdot\cos(2\cdot y), & f''(2\cdot\pi)&=6,\\
f'''(y)&=-12\cdot\sin(2\cdot y), & f'''(2\cdot\pi)&=0,\\
f^{\mathrm{IV}}(y)&=-24\cdot\cos(2\cdot y), & f^{\mathrm{IV}}(2\cdot\pi)&=-24.
\end{aligned}$$

Stoga je traženi polinom jednak

$$T_4(y) = \frac{6}{2!}\cdot(y-2\cdot\pi)^2 - \frac{24}{4!}\cdot(y-2\cdot\pi)^4 = -(y-2\cdot\pi)^4 + 3\cdot(y-2\cdot\pi)^2.$$

8. **a)** Vidjeti sliku 9. Funkcija g ima točno jedan prekid (u $t=\pi$) i nema strogih lokalnih ekstrema (rubne točke segmenta zanemarujemo jer nismo razmatrali funkciju izvan zadanoga segmenta). Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.



Slika 9.

b) g je identički jednaka nulfunkciji na segmentu $[-\pi,\ 0]$. Stoga pri izračunu Fourierovih koeficijenata računamo određene integrale u granicama od 0 do π. Imamo redom:

$$a_0 = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{\pi}(-4)\cdot\pi\cdot t\cdot \mathrm{d}t = (-2)\cdot\int_0^{\pi} t\cdot \mathrm{d}t = (-2)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot t^2\right]_0^{\pi} = -\pi^2,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(-4)\cdot\pi\cdot t\cdot\cos t\cdot \mathrm{d}t = (-4)\cdot\int_0^{\pi} t\cdot\cos t\cdot \mathrm{d}t = (-4)\cdot\left[\cos t + t\cdot\sin t\right]_0^{\pi} =$$

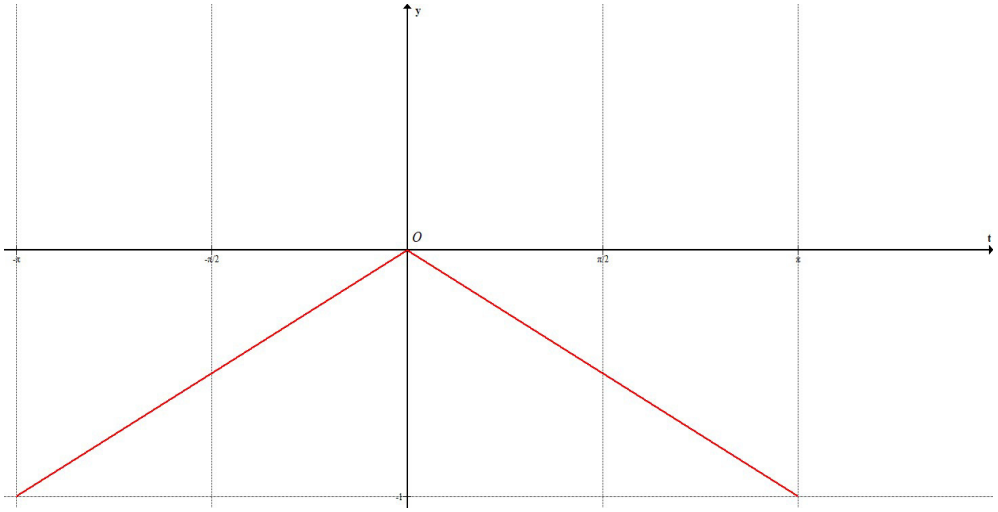
$$= (-4)\cdot\left[\cos\pi + \pi\cdot\sin\pi - \cos 0 - 0\cdot\sin 0\right] = (-4)\cdot(-1+0-1-0) = 8,$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(-4)\cdot\pi\cdot t\cdot\sin t\cdot \mathrm{d}t = (-4)\cdot\int_0^{\pi} t\cdot\sin t\cdot \mathrm{d}t = (-4)\cdot\left[\sin t - t\cdot\cos t\right]_0^{\pi} =$$

$$= (-4)\cdot\left[\sin\pi - \pi\cdot\cos\pi - \sin 0 + 0\cdot\cos 0\right] = (-4)\cdot(0+\pi+0-0) = -4\cdot\pi.$$

Dakle, traženi polinom je jednak $F(t) = -\pi^2 + 8\cdot\cos t - 4\cdot\pi\cdot\sin t$.

9. **a)** Vidjeti sliku 10. Zadana funkcija je neprekidna na segmentu $[-\pi,\pi]$ i da na tom segmentu ima jedinstveni strogi lokalni maksimum 0 za $t=0$. Stoga vrijede oba Dirichletova uvjeta.



Slika 10.

b) Prema pretpostavci, funkcija h je parna. To znači da njezin razvoj u Fourierov red sadrži samo članove oblika $a_n \cdot \cos(n \cdot t),\ n \in \mathbb{N}_0$. Odredimo izraze za te koeficijente:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} h(t) \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} t \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot t^2 \right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(0 - \frac{1}{2} \cdot \pi^2 \right) = -\frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} h(t) \cdot \cos(n \cdot t) \cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} \frac{t}{\pi} \cdot \cos(n \cdot t) \cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} t \cdot \cos(n \cdot t) \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \cdot \left[\frac{1}{n^2} \cdot \left(n \cdot t \cdot \sin t + \cos(n \cdot t) \right) \right]_{-\pi}^{0} = \frac{2}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \left[1 - \underbrace{\cos(n \cdot (-\pi))}_{=\cos(n \cdot \pi)} \right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2 \cdot \pi^2}, & \text{za neparne } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{za parne } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{4}{\pi^2},\ a_3 = \frac{4}{9 \cdot \pi^2}.$$

Dakle, traženi polinom je

$$F_3(t) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \cos t + \frac{4}{9 \cdot \pi^2} \cdot \cos(3 \cdot t).$$

10. Pretpostavimo da je $a_n = x^n$, za neki $x \in \mathbb{R}$. Zbog $a_1, a_2 \neq 0$ zaključujemo da vrijedi jednakost $x \neq 0$. Uvrstimo li jednakosti $a_n = x^n$, $a_{n-1} = x^{n-1}$ i $a_{n-2} = x^{n-2}$ u zadanu rekurziju, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} & x^n = 5 \cdot x^{n-1} + 6 \cdot x^{n-2},\ /: x^{n-2} \\ & x^2 = 5 \cdot x + 6, \\ & x^2 - 5 \cdot x - 6 = 0, \\ & x_1 = -1,\ x_2 = 6. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje zadane rekurzije je $a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 6^n$, pri čemu su $A, B \in \mathbb{R}$ konstante. Odredimo te konstante iz početnih uvjeta. U opće rješenje zadane rekurzije uvrstimo najprije $n = 1$:

$$a_1 = A\cdot(-1)^1 + B\cdot 6^1,$$
$$5 = -A + 6\cdot B,$$
$$-A + 6\cdot B = 5.$$

Potom u opće rješenje zadane rekurzije uvrstimo $n = 2$:

$$a_2 = A\cdot(-1)^2 + B\cdot 6^2,$$
$$37 = A + 36\cdot B,$$
$$A + 36\cdot B = 37.$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} -A + 6\cdot B = 5, \\ A + 36\cdot B = 37. \end{cases}$$

Njegovim rješavanjem dobijemo $(A, B) = (1,\ 1)$. Stoga je rješenje zadatka niz $a_n = (-1)^n + 6^n$.

11. Pretpostavimo da je $a_n = x^n$, za neki $x \in \mathbb{R}$. Zbog $a_1, a_2 \neq 0$ zaključujemo da vrijedi jednakost $x \neq 0$. Uvrstimo li jednakosti $a_n = x^n$, $a_{n-1} = x^{n-1}$ i $a_{n-2} = x^{n-2}$ u zadanu rekurziju, dobit ćemo:

$$x^n - 4\cdot x^{n-1} + 4\cdot x^{n-2} = 0,\ /: x^{n-2}$$
$$x^2 - 4\cdot x + 4 = 0,$$
$$x_1 = x_2 = 2.$$

Dakle, opće rješenje zadane rekurzije je $a_n = (A\cdot n + B)\cdot 2^n$ pri čemu su $A, B \in \mathbb{R}$ konstante. Odredimo te konstante iz početnih uvjeta. U opće rješenje zadane rekurzije uvrstimo najprije $n = 1$:

$$a_1 = (A\cdot 1 + B)\cdot 2^1,$$
$$2 = (A + B)\cdot 2,$$
$$A + B = 1.$$

Potom u opće rješenje zadane rekurzije uvrstimo $n = 2$:

$$a_2 = (A\cdot 2 + B)\cdot 2^2,$$
$$8 = (2\cdot A + B)\cdot 4,$$
$$2\cdot A + B = 2.$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ 2\cdot A + B = 2. \end{cases}$$

Njegovim rješavanjem dobijemo $(A, B) = (1,\ 0)$. Stoga je rješenje zadatka niz $a_n = n\cdot 2^n$.

10. GRUPA ZADATAKA

1. Označimo zadani integral s I. Prema definiciji je:

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_e^b \frac{1}{x\cdot\ln^2 x}\cdot \mathrm{d}x.$$

Odredimo standardnu antiderivaciju podintegralne funkcije. Primijenimo metodu zamjene. Imamo redom:

$$\int \frac{1}{x\cdot\ln^2 x}\cdot \mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t := \ln x,\\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x\end{array}\right\} = \int \frac{1}{t^2}\cdot \mathrm{d}t = \int t^{-2}\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{-2+1}\cdot t^{-2+1} = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x} + C \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{\ln x}.$$

Primjenom Newton-Leibnizove formule dobivamo:

$$I = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b)-F(e)\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\underbrace{\ln b}_{\to+\infty}} - \left(-\frac{1}{\ln e}\right)\right] = 0 + \frac{1}{1} = 1.$$

2. Primijetimo najprije da su svi članovi zadanoga reda strogo pozitivni. Naime, za svaki $n\in\mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $n\geq 1$, pa množenjem te nejednakosti s $n^2>0$ dobivamo $n^3\geq n^2$. Odatle slijedi da je $2\cdot n^3 > n^2$, odnosno $2\cdot n^3 - n^2 > 0$, odnosno $2\cdot n^3 - n^2 + 7\cdot n > 0$.. Stroga pozitivnost nazivnika slijedi iz stroge pozitivnosti svakoga člana nazivnika.

Sada primijenimo Cauchyjev kriterij, ali bez korištenja apsolutne vrijednosti (jer su, prema dokazanom, svi članovi reda strogo pozitivni realni brojevi). Imamo redom:

$$r = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{7\cdot n - n^2 + 2\cdot n^3}{3\cdot n^3+1}\right)^n} = \lim_n \left(\frac{7\cdot n - n^2 + 2\cdot n^3}{3\cdot n^3+1}\right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{\dfrac{7\cdot n - n^2 + 2\cdot n^3}{n^3}}{\dfrac{3\cdot n^3+1}{n^3}}\right) = \lim_n \left(\frac{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{7}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n^3}}\right) = \frac{2-0+0}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

Izračunata granična vrijednost je strogo manja od 1, pa primjenom Cauchyjeva kriterija zaključujemo da zadani red konvergira.

3. Primijenimo D'Alembertov kriterij, pri čemu ne smijemo izostaviti znak apsolutne vrijednosti jer ne znamo predznak izraza $x+1$. Označimo: $a_n := \dfrac{(x-1)^n}{n+1}$. Tada je

$$a_{n+1} = \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)+1} = \frac{(x-1)^{n+1}}{n+2}.$$

Stoga je:

$$r=\lim_n\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_n\left|\frac{\dfrac{(x-1)^{n+1}}{n+2}}{\dfrac{(x-1)^n}{n+1}}\right|=\lim_n\left|\frac{\dfrac{1}{n+2}}{\dfrac{1}{n+1}}\cdot(x-1)^{n+1-n}\right|=\lim_n\left|\frac{n+1}{n+2}\cdot(x-1)^1\right|=$$

$$=\lim_n\left|\frac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}\cdot(x-1)\right|=\left|\frac{1+0}{1+0}\cdot(x-1)\right|=\left|1\cdot(x-1)\right|=\left|x-1\right|.$$

Zadani red će sigurno biti konvergentan bude li $r<1$. Tako dobivamo nejednadžbu

$$\left|x-1\right|<1$$

koja je ekvivalentna nejednadžbi

$$-1<x-1<1,$$

odnosno nejednadžbi

$$-1+1<x-1+1<1+1.$$

Odatle slijedi $0<x<2$.

Preostaje analizirati konvergenciju polaznoga reda u rubovima ovoga intervala.

Za $x=0$ dobivamo alternirajući red $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. Taj red konvergira prema Leibnizovu kriteriju jer je niz $b_n=\frac{1}{n+1}$ strogo padajući na intervalu $\left[0,+\infty\right\rangle$, te vrijedi $\lim_n b_n=\lim_n\frac{1}{n+1}=0.$

Za $x=2$ dobivamo red $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, tj. harmonijski red koji je divergentan.

Dakle, traženi interval konvergencije je $\left[0,2\right\rangle$.

4. Budući da tražimo MacLaurinov polinom 2. stupnja, trebamo izračunati vrijednost funkcije i vrijednosti prvih dviju derivacija funkcije u točki $c=0$. Imamo redom:

$$f(x)=e^{\sin x},\qquad f(0)=e^{\sin 0}=e^0=1,$$

$$f'(x)=e^{\sin x}\cdot(\sin x)'=e^{\sin x}\cdot\cos x,\qquad f'(0)=e^{\sin 0}\cdot\cos 0=e^0\cdot 1=1\cdot 1=1,$$

$$f''(x)=(e^{\sin x})'\cdot\cos x+e^{\sin x}\cdot(\cos x)'=$$
$$=e^{\sin x}\cdot\cos x-e^{\sin x}\cdot\sin x\qquad f''(0)=e^{\sin 0}\cdot\cos 0-e^{\sin 0}\cdot\sin 0=1-1\cdot 0=1.$$

Tako dobivamo da je traženi MacLaurinov polinom jednak:

$$M_2(x)=1+\frac{1}{1!}\cdot x^1+\frac{1}{2!}\cdot x^2=1+\frac{1}{1}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot x^2=\frac{1}{2}\cdot x^2+x+1.$$

5. Budući da tražimo Taylorov polinom 3. stupnja, trebamo izračunati vrijednost funkcije i vrijednosti prvih dviju derivacija funkcije u točki $c=-1$. Imamo redom:

$$g(t)=\ln^2(t+2), \qquad g(-1)=0$$
$$g'(t)=2\cdot\frac{\ln(t+1)}{t+1}, \qquad g'(-1)=0,$$
$$g''(t)=(-2)\cdot\frac{\ln(t+1)-1}{(t+1)^2}, \qquad g''(-1)=2,$$
$$g'''(t)=2\cdot\frac{2\cdot\ln(t+1)-3}{(t+1)^3}, \qquad g'''(-1)=-6.$$

Tako dobivamo da je traženi Taylorov polinom jednak:

$$T_3(t)=\frac{2}{2!}\cdot(t+1)^2+\frac{-6}{3!}\cdot(t+1)^3=\frac{2}{2}\cdot(t+1)^2-\frac{6}{6}\cdot(t+1)^3=-(t+1)^3+(t+1)^2.$$

6. **a)** Zadana funkcija je neparna i $(2\cdot\pi)$-periodična, pa, prema rezultatu s predavanja, vrijedi jednakost $f(-\pi)=f(0)=f(\pi)=0$. Dakle, graf zadane funkcije nužno sadrži točke $(-\pi,0)$, $(0,0)$ i $(\pi,0)$.

Graf funkcije f na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ je dužina čije su krajnje točke $(0,\pi)$ i $(\pi,\pi^2+\pi)$, ali bez tih krajnjih točaka.

Zbog neparnosti, graf funkcije f na intervalu $\langle -\pi,0\rangle$ je dužina čije su krajnje točke $(0,-\pi)$ i $(-\pi,-\pi^2+\pi)$, ali bez tih krajnjih točaka.

Ucrtamo navedene točke i navedene dužine u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa dobijemo sliku 1.

Vidimo da zadana funkcija na segmentu $[-\pi,\pi]$ ima točno tri prekida (u $x=-\pi$, $x=0$ i $x=\pi$) i da je strogo rastuća, pa nema nijedan strogi lokalni ekstrem. Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) Zadana funkcija je neparna, pa vrijedi jednakost:

$$a_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Dakle, razvoj funkcije u Fourierov red sadrži samo članove oblika $b_n\cdot\sin(n\cdot x)$.

Odredimo formulu za opći član niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Koristimo identitete:

$$\int\sin(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\cdot\cos(n\cdot x)+C,$$
$$\int\cos(n\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot x)+C,$$

za svaki $n\in\mathbb{N}$ i svaki $C\in\mathbb{R}$. Imamo redom:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\pi\cdot(1+x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\pi\cdot\int_0^{\pi}(1+x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= 2\cdot\int_0^{\pi}(1+x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = 1+x & v = \int \sin(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\cdot\cos(n\cdot x) \\ \mathrm{d}u = 1\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = \sin(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$= 2\cdot\left[-\frac{1}{n}\cdot(1+x)\cdot\cos(n\cdot x)\right]_0^{\pi} - 2\cdot\int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cdot\cos(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2}{n}\cdot\left[(1+\pi)\cdot\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n} - (1+0)\cdot\cos(n\cdot 0)\right] + \frac{2}{n}\cdot\int_0^{\pi}\cos(n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2}{n}\cdot\left[(1+\pi)\cdot(-1)^n - 1\right] + \frac{2}{n}\cdot\left[\frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot x)\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{n}\cdot\left[(1+\pi)\cdot(-1)^n - 1\right] + \frac{2}{n^2}\cdot\left[\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(n\cdot 0)}_{=0}\right] = -\frac{2}{n}\cdot\left[(1+\pi)\cdot(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{n}\cdot(\pi+2), & \text{za neparne } n, \\ -\frac{2}{n}\cdot\pi, & \text{za parne } n. \end{cases}$$

Sada lako izračunamo:

$$b_1 = \frac{2}{1}\cdot(\pi+2) = 2\cdot(\pi+2),\ b_2 = -\frac{2}{2}\cdot\pi = -\pi,\ b_3 = \frac{2}{3}\cdot(\pi+2) = \frac{2\cdot(\pi+2)}{3},$$

pa je traženi Fourierov polinom stupnja 3 jednak:

$$F_3(x) = 2\cdot(\pi+2)\cdot\sin x - \pi\cdot\sin(2\cdot x) + \frac{2\cdot(\pi+2)}{3}\cdot\sin(3\cdot x).$$

11. GRUPA ZADATAKA

1. **a)** Označimo $y=\dfrac{C+t^2}{2\cdot e^t}$. Tada imamo:

$$y'=\frac{\left(C+t^2\right)'\cdot 2\cdot e^t-\left(C+t^2\right)\cdot(2\cdot e^t)'}{(2\cdot e^t)^2}=\frac{2\cdot t\cdot 2\cdot e^t-\left(C+t^2\right)\cdot 2\cdot e^t}{(2\cdot e^t)^2}=\frac{2\cdot e^t\cdot\left(2\cdot t-C-t^2\right)}{(2\cdot e^t)^2}=\frac{2\cdot t-C-t^2}{2\cdot e^t}\Rightarrow$$

$$e^t\cdot\left(y'+y\right)=e^t\cdot\left(\frac{2\cdot t-C-t^2}{2\cdot e^t}+\frac{C+t^2}{2\cdot e^t}\right)=e^t\cdot\frac{2\cdot t}{2\cdot e^t}=t,$$

što dokazuje tvrdnju.

b) Analogno kao u **a)** zadatku, označimo $y=C_1\cdot\sin t+C_2\cdot\cos t-\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot\cos t$. Tada imamo:

$$y'=C_1\cdot(\sin t)'+C_2\cdot(\cos t)'-\frac{1}{2}\cdot(t\cdot\cos t)'=C_1\cdot\cos t-C_2\cdot\sin t-\frac{1}{2}\cdot\cos t+\frac{1}{2}\cdot t\cdot\sin t,$$

$$y''=-C_1\cdot\sin t-C_2\cdot\cos t+\frac{1}{2}\cdot\sin t+\frac{1}{2}\cdot\sin t+\frac{1}{2}\cdot t\cdot\cos t=-C_1\cdot\sin t-C_2\cdot\cos t+\sin t+\frac{1}{2}\cdot t\cdot\cos t,$$

$$y''+y=-C_1\cdot\sin t-C_2\cdot\cos t+\sin t+\frac{1}{2}\cdot t\cdot\cos t+C_1\cdot\sin t+C_2\cdot\cos t-\frac{1}{2}\cdot t\cdot\cos t=\sin t,$$

što dokazuje tvrdnju.

2. Obje obične diferencijalne jednadžbe su obične diferencijalne jednadžbe sa razdvojenim (separiranim) varijablama.

a) Zadanu jednadžbu najprije transformiramo na sljedeći način:

$$(x^2+1)\cdot y\cdot\mathrm{d}y-\operatorname{arctg}x\cdot\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow(x^2+1)\cdot y\cdot\mathrm{d}y=\operatorname{arctg}x\cdot\mathrm{d}x\Leftrightarrow y\cdot\mathrm{d}y=\frac{\operatorname{arctg}x\cdot\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

Integriramo lijevu stranu jednadžbe, pa dobijemo:

$$\int y\cdot\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot y^2.$$

Desnu stranu jednadžbe integriramo koristeći zamjenu $\left\{\begin{array}{l} t=\operatorname{arctg}x,\\ \mathrm{d}t=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\mathrm{d}x\end{array}\right\}$. Dobijemo:

$$\int t\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot t^2=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}^2x+C.$$

Izjednačavanjem dobivenih integrala slijedi:

$$\frac{1}{2}\cdot y^2=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}^2x+C.$$

Nepoznatu konstantu C odredimo koristeći početni uvjet $y(0)=0$. Uvrstimo $x=0$ i $y=0$ u gornju jednakost, pa dobijemo jednadžbu $0=0+C$. Odatle je $C=0$.

Dakle, rješenje zadatka je:

$$\frac{1}{2}\cdot y^2=\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}^2 x \Leftrightarrow y^2=\operatorname{arctg}^2 x \Rightarrow y=\operatorname{arctg} x.$$

b) Postupimo analogno kao u **a)** podzadatku. Imamo:

$$x\cdot \mathrm{d}y - y\cdot(x+1)\cdot \mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow x\cdot \mathrm{d}y = y\cdot(x+1)\cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{x+1}{x}\cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y}=\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot \mathrm{d}x\,.$$

Integriramo lijevu stranu jednadžbe: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln y$.

Integriramo desnu stranu jednadžbe:

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot \mathrm{d}x=\int 1\cdot \mathrm{d}x+\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x = x+\ln x=\ln(e^x)+\ln x + C.$$

Izjednačavanjem dobivenih izraza dobijemo:

$$\ln y=\ln(e^x)+\ln x + C.$$

Nepoznatu konstantu C odredimo koristeći početni uvjet $y(1) = e$. U gornju jednakost uvrstimo $x = 1$ i $y = e$, pa dobijemo:

$$\ln e=\ln(e^1)+\ln 1 + C \Leftrightarrow 1=1+0+C \Leftrightarrow C=0.$$

Tako konačno dobivamo:

$$\ln y=\ln(e^x)+\ln x \Leftrightarrow \ln y=\ln(x\cdot e^x) \Leftrightarrow y=x\cdot e^x.$$

3. Obje zadane obične diferencijalne jednadžbe su nehomogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 1. reda. U njihovu rješavanju koristimo identitete:

$$e^{\ln x}=x,\ e^{-\ln x}=\frac{1}{x},\ \forall x>0.$$

a) Podijelimo jednadžbu s x. Dobivamo:

$$y'+\frac{1}{x}\cdot y=\frac{\sin x}{x}.$$

Očitamo $P(x)=\frac{1}{x}$, $Q(x)=\frac{\sin x}{x}$, pa uvrstimo te funkcije u formulu za opće rješenje navedenoga tipa običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$y=e^{-\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x}\cdot\left(\int e^{\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x}\cdot \frac{\sin x}{x}\cdot \mathrm{d}x + C\right)=e^{-\ln x}\cdot\left(\int e^{\ln x}\cdot \frac{\sin x}{x}\cdot \mathrm{d}x + C\right)=\frac{1}{x}\cdot\left(\int x\cdot \frac{\sin x}{x}\cdot \mathrm{d}x + C\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left(\int \sin x\cdot \mathrm{d}x + C\right)=\frac{1}{x}\cdot(-\cos x + C).$$

Nepoznatu konstantu C odredimo koristeći početni uvjet $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. U gornju jednakost uvrstimo $x=\frac{\pi}{2}$ i $y = 0$, pa dobijemo:

$$0=\frac{2}{\pi}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{2}+C\right)\Rightarrow -0+C=0\Rightarrow C=0.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $y=-\frac{\cos x}{x}$.

b) Podijelimo običnu diferencijalnu jednadžbu s ctg x, pri čemu primijenimo jednakost $\frac{1}{\operatorname{ctg} x}=\operatorname{tg} x,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$. Dobijemo jednadžbu:

$$y'+(2\cdot\operatorname{tg} x)\cdot y=2\cdot\operatorname{tg} x.$$

Očitamo: $P(x)=Q(x)=2\cdot\operatorname{tg} x$, pa uvrštavanjem u formulu za opće rješenje navedenoga tipa običnih diferencijalnih jednadžbi dobijemo:

$$y=e^{-\int 2\cdot\operatorname{tg}x\cdot dx}\cdot\left(\int e^{\int 2\cdot\operatorname{tg}x\cdot dx}\cdot 2\cdot\operatorname{tg}x\cdot dx+C\right)=e^{2\cdot\ln(\cos x)}\cdot\left(2\cdot\int e^{-2\cdot\ln(\cos x)}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx+C\right)=$$

$$=(\cos x)^2\cdot\left(2\cdot\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx+C\right)=\cos^2 x\cdot\left(2\cdot\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot dx+C\right)=\left\{\begin{matrix}\text{zamjena: } t=\cos x\\ dt=-\sin x\cdot dx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\cos^2 x\cdot\left(-2\cdot\int\frac{1}{t^3}\cdot dt+C\right)=\cos^2 x\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{-3+1}\cdot t^{-3+1}+C\right)=\cos^2 x\cdot\left(t^{-2}+C\right)=\cos^2 x\cdot\left(\cos^{-2}x+C\right)=C\cdot\cos^2 x+1.$$

Nepoznatu konstantu C odredimo koristeći početni uvjet $y(0) = 2$. U gornju jednakost uvrstimo $x = 0$ i $y = 2$, pa dobijemo:

$$2=C\cdot(\cos 0)^2+1\Leftrightarrow 2=C+1\Leftrightarrow C=1.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $y=1+\cos^2 x$.

4. Obje zadane obične diferencijalne jednadžbe su Bernoullijeve obične diferencijalne jednadžbe.

a) Zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu najprije transformiramo na sljedeći način:

$$x\cdot\left(y'+y^2\right)=y,\quad /:x$$

$$y'+y^2=\frac{1}{x}\cdot y,$$

$$y'-\frac{1}{x}\cdot y=-y^2.$$

Odatle očitamo:

$$P(x)=-\frac{1}{x},\ Q(x)=-1,\ k=2.$$

Uvrštavanjem u formulu za rješenje navedenoga tipa običnih diferencijalnih jednadžbi dobivamo redom:

$$g(x)=e^{(1-2)\cdot\int -\frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x}=e^{\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x}=e^{\ln x}=x,$$

$$y^{2-1}=\frac{x}{(1-2)\cdot\int x\cdot(-1)\cdot \mathrm{d}x+C}=\frac{x}{\int x\cdot \mathrm{d}x+C}=\frac{x}{\frac{1}{2}\cdot x^2+C}=\frac{2\cdot x}{x^2+2\cdot C}\Leftrightarrow y=\frac{2\cdot x}{x^2+2\cdot C}.$$

Nepoznatu konstantu C odredimo koristeći početni uvjet $y(1) = 2$. U gornju jednakost uvrstimo $x = 1$ i $y = 2$, pa dobijemo:

$$2=\frac{2\cdot 1}{1^2+2\cdot C}\Leftrightarrow 2=\frac{2}{1+2\cdot C}\Leftrightarrow 2+4\cdot C=2\Leftrightarrow 4\cdot C=0\Leftrightarrow C=0.$$

Stoga je rješenje zadatka funkcija $y=\frac{2\cdot x}{x^2}=\frac{2}{x}$.

b) Zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu najprije transformiramo na sljedeći način:

$$x\cdot\left(y'-y^2\right)+y=0,\ \ /:x$$

$$y'-y^2+\frac{1}{x}\cdot y=0,$$

$$y'+\frac{1}{x}\cdot y=y^2.$$

Odatle očitamo:

$$P(x)=\frac{1}{x},\ Q(x)=1,\ k=2.$$

Uvrštavanjem u formulu za rješenje navedenoga tipa jednadžbe dobivamo redom:

$$g(x)=e^{(1-2)\cdot\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x}=e^{-\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x},$$

$$y^{2-1}=\frac{\frac{1}{x}}{(1-2)\cdot\int \frac{1}{x}\cdot 1\cdot \mathrm{d}x+C}=\frac{\frac{1}{x}}{-\ln x+C}=\frac{1}{C\cdot x-x\cdot\ln x}\Leftrightarrow y=\frac{1}{C\cdot x-x\cdot\ln x}.$$

Nepoznatu konstantu C odredimo koristeći početni uvjet $y(e)=-\frac{1}{e}$. U gornju jednakost uvrstimo $x=e$ i $y=-\frac{1}{e}$, pa dobijemo:

$$-\frac{1}{e}=\frac{1}{C\cdot e-e\cdot\ln e}\Leftrightarrow -e=C\cdot e-e\cdot 1\Leftrightarrow C\cdot e=0\Leftrightarrow C=0.$$

Stoga je rješenje zadatka funkcija $y=-\frac{1}{x\cdot\ln x}$.

5. Pretpostavimo da je $y = y(x)$ tražena krivulja. Iz podatka da tražena krivulja prolazi točkom *A* zaključujemo da mora vrijediti jednakost $y(1) = 1$. Nadalje, neka je $T = (x_T, y_T)$ bilo koja točka tražene krivulje. Koeficijent smjera tangente povučene na traženu krivulju u točki *T* jednak je $k_t = y'(x_T)$. Prema uvjetu zadatka, taj koeficijent mora biti dvostruko veći od omjera ordinate i apscise točke *T*, pa zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$y'(x_T) = 2 \cdot \frac{y_T}{x_T} \ .$$

Ta jednakost vrijedi za svaku točku *T*, pa „brisanjem“ indeksa dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$y' = 2 \cdot \frac{y}{x},$$

odnosno Cauchyjev problem u kojemu se pojavljuje homogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda:

$$\begin{cases} y' - 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot y = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Uvrštavanjem u formulu za rješavanje navedenoga tipa običnih diferencijalnih jednadžbi dobijemo:

$$y = C \cdot e^{-\int -2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{2 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{2 \cdot \ln x} = C \cdot e^{\ln\left(x^2\right)} = C \cdot x^2, \ C \in \mathbb{R}.$$

Nepoznatu konstantu *C* odredimo koristeći početni uvjet $y(1) = 1$. U gornju jednakost uvrstimo $x = 1$ i $y = 1$, pa dobijemo:

$$1 = C \cdot 1^2 \Leftrightarrow C = 1.$$

Dakle, rješenje zadatka je krivulja $y = x^2$.

6. Pretpostavimo da je $y = y(x)$ tražena krivulja. Iz podatka da tražena krivulja prolazi točkom *A* zaključujemo da mora vrijediti jednakost $y(1) = 2$. Nadalje, neka je $T = (x_T, y_T)$ bilo koja točka tražene krivulje. Koeficijent smjera normale povučene na traženu krivulju u točki *T* jednak je $k_n = -\frac{1}{y'(x_T)}$. Prema uvjetu zadatka, taj koeficijent mora biti jednak umnošku obiju koordinata točke *T*, pa zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$-\frac{1}{y'(x_T)} = x_T \cdot y_T \ .$$

Ta jednakost vrijedi za svaku točku *T*, pa „brisanjem“ indeksa dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu

$$-\frac{1}{y'} = x \cdot y \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{x \cdot y} \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y},$$

odnosno Cauchyjev problem u kojemu se pojavljuje obična diferencijalna jednadžba 1. reda sa razdvojenim (separiranim) varijablama

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Riješimo taj problem analogno kao u zadatku 2. Imamo redom:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \Leftrightarrow y \cdot \mathrm{d}y = -\frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow \int y \cdot \mathrm{d}y = -\int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot y^2 = -\ln x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Nepoznatu konstantu C odredimo koristeći početni uvjet $y(1) = 2$. U gornju jednakost uvrstimo $x = 1$ i $y = 2$, pa dobijemo:

$$\frac{1}{2} \cdot 2^2 = -\ln 1 + C \Leftrightarrow 2 = 0 + C \Leftrightarrow C = 2.$$

Stoga je:

$$\frac{1}{2} \cdot y^2 = -\ln x + 2 \Leftrightarrow y^2 = 4 - 2 \cdot \ln x \Rightarrow y = \sqrt{4 - 2 \cdot \ln x}\,.$$

Dakle, rješenje zadatka je krivulja $y = \sqrt{4 - 2 \cdot \ln x}$.

12. GRUPA ZADATAKA

1. U svim podzadacima najprije ćemo napisati karakterističnu jednadžbu i riješiti je. Opće rješenje zavisi o tipu rješenja karakteristične jednadžbe (dva različita realna rješenja, jedno dvostruko realno rješenje ili dva različita kompleksna rješenja).

a) Karakteristična jednadžba glasi: $k^2 + k - 12 = 0$. Njezina rješenja su $k_1 = -4,\ k_2 = 3.$ Ona su međusobno različiti realni brojevi. Stoga je traženo rješenje: $y = C_1 \cdot e^{-4 \cdot x} + C_2 \cdot e^{3 \cdot x}$.

b) Karakteristična jednadžba glasi: $k^2 + 16 \cdot k + 64 = 0$. Jedino njezino rješenje je $k = -8$. Stoga je traženo rješenje: $y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-8 \cdot x}$.

c) Karakteristična jednadžba glasi: $k^2 + 9 = 0$. Njezina rješenja su $k_1 = -3 \cdot i,\ k_2 = 3 \cdot i.$ Ona su međusobno različiti kompleksni brojevi. Odaberemo ono rješenje koje ima strogo pozitivan imaginarni dio. To je $k_2 = 3 \cdot i$. Očitamo realni i imaginarni dio toga rješenja: $a = \mathrm{Re}(3 \cdot i) = 0$, $b = \mathrm{Im}(3 \cdot i) = 3.$ Stoga je traženo rješenje:

$$y = \left[C_1 \cdot \cos(3 \cdot x) + C_2 \cdot \sin(3 \cdot x)\right] \cdot \underbrace{e^{0 \cdot x}}_{=1} = C_1 \cdot \cos(3 \cdot x) + C_2 \cdot \sin(3 \cdot x).$$

2. U svakom podzadatku najprije ćemo riješiti pripadnu homogenu običnu diferencijalnu jednadžbu (ODJ) 2. reda s konstantnim koeficijentima. Traženo partikularno rješenje određujemo zavisno o tipu rješenja pripadne karakteristične jednadžbe i obliku desne strane polazne ODJ.

a) Pripadna homogena ODJ je: $y'' - 4 \cdot y' + 3 \cdot y = 0$. Njezina karakteristična jednadžba glasi: $k^2 - 4 \cdot k + 3 = 0$. Njezina rješenja su $k_1 = 1$ i $k_2 = 3$.

Uočavamo da 0 nije rješenje karakteristične jednadžbe, pa je partikularno rješenje polinom čiji je stupanj jednak stupnju polinoma na desnoj strani polazne ODJ. Polinom $3 \cdot x - 7$ ima stupanj jednak 1, pa partikularno rješenje polazne ODJ tražimo u obliku:

$$y_p = A \cdot x + B.$$

Tada su $y_p' = A$ i $y_p'' = 0$, pa uvrštavanjem tih triju izraza u polaznu ODJ dobijemo:

$$0 - 4 \cdot A + 3 \cdot (A \cdot x + B) = 3 \cdot x - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot A = 3, \\ -4 \cdot A + 3 \cdot B = -7 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B) = (1, -1)$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je $y_p = x - 1$.

b) Pripadna homogena ODJ je: $y'' + y' = 0$. Njezina karakteristična jednadžba glasi: $k^2 + k = 0$. Njezina rješenja su $k_1 = -1$ i $k_2 = 0$.

Uočavamo da je 0 jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe i da je desna strana polazne ODJ polinom $2 \cdot x$ čiji je stupanj jednak 1. Zbog toga partikularno rješenje polazne ODJ tražimo u obliku:

$$y_p = x^1 \cdot (A \cdot x + B) = A \cdot x^2 + B \cdot x.$$

Tada su $y_p^{'} = 2 \cdot A \cdot x + B$ i $y_p^{''} = 2 \cdot A$, pa uvrštavanjem tih dvaju izraza u polaznu ODJ dobijemo:

$$2 \cdot A + 2 \cdot A \cdot x + B = 2 \cdot x - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot A = 2, \\ 2 \cdot A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B) = (1, -2)$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je $y_p = x^2 - 2 \cdot x$.

c) Pripadna homogena ODJ je: $-y^{''} + y^{'} = 0$. Njezina karakteristična jednadžba glasi: $-k^2 + k = 0$. Njezina rješenja su $k_1 = 0$ i $k_2 = 1$.

Uočavamo da je 0 jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe i da je desna strana polazne ODJ polinom $3 \cdot x^2$ čiji je stupanj jednak 2. Zbog toga partikularno rješenje polazne ODJ tražimo u obliku:

$$y_p = x^1 \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x + C) = A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x.$$

Tada su $y_p^{'} = 3 \cdot A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x + C$ i $y_p^{''} = 6 \cdot A \cdot x + 2 \cdot B$, pa uvrštavanjem tih dvaju izraza u polaznu ODJ dobijemo:

$$3 \cdot A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x + C - (6 \cdot A \cdot x + 2 \cdot B) = 3 \cdot x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot A = 3, \\ -6 \cdot A + 2 \cdot B = 0, \\ -2 \cdot B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B, C) = (1, 3, 6)$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je $y_p = x^3 + 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x$.

d) Pripadna homogena ODJ je: $y^{''} - 3 \cdot y^{'} + 2 \cdot y = 0$. Njezina karakteristična jednadžba glasi: $k^2 - 3 \cdot k + 2 = 0$. Njezina rješenja su $k_1 = 1$ i $k_2 = 2$.

Uočavamo da je 2 jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe i da je desna strana polazne ODJ umnožak konstante (1) i eksponencijalne funkcije $(e^{2 \cdot x})$. Stoga partikularno rješenje polazne ODJ tražimo u obliku:

$$y_p = x^1 \cdot A \cdot e^{2 \cdot x} = A \cdot x \cdot e^{2 \cdot x}.$$

Tada su:

$$y_p^{'} = A \cdot (e^{2 \cdot x} + x \cdot 2 \cdot e^{2 \cdot x}) = A \cdot (2 \cdot x + 1) \cdot e^{2 \cdot x},$$
$$y_p^{''} = A \cdot \left[2 \cdot e^{2 \cdot x} + (2 \cdot x + 1) \cdot 2 \cdot e^{2 \cdot x} \right] = A \cdot (4 \cdot x + 4) \cdot e^{2 \cdot x},$$

pa uvrštavanjem tih triju izraza u polaznu ODJ dobijemo:

$$A \cdot (4 \cdot x + 4) \cdot e^{2 \cdot x} - 3 \cdot A \cdot (2 \cdot x + 1) \cdot e^{2 \cdot x} + 2 \cdot A \cdot x \cdot e^{2 \cdot x} = e^{2 \cdot x} \Leftrightarrow A \cdot e^{2 \cdot x} = e^{2 \cdot x} \Leftrightarrow A = 1.$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je $y_p = x \cdot e^{2 \cdot x}$.

2. U svim zadacima najprije ćemo naći opće rješenje zadane nehomogene linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima koristeći pravilo da je to opće rješenje jednako zbroju općega rješenja pripadne homogene linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima i bilo kojega partikularnoga rješenja zadane ODJ. Iz početnih uvjeta dobit ćemo konačno rješenje zadatka.

Radi jednostavnosti, s y_h označeno je rješenje pripadne homogene ODJ, s y_p partikularno rješenje, a s y_o opće rješenje zadane ODJ. **Oprez**: y_o nije konačno rješenje zadatka!

a) Pripadna homogena ODJ je: $y'' - 4 \cdot y' + 4 \cdot y = 0$. Njezina karakteristična jednadžba glasi: $k^2 - 4 \cdot k + 4 = 0$. Ona ima jedinstveno rješenje $k_1 = k_2 = 2$. Stoga je $y_h = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{2 \cdot x}$.

Desna strana zadane ODJ je polinom 3. stupnja. Budući da 0 nije rješenje karakteristične jednadžbe, y_p će biti također polinom 3. stupnja. Dakle, neka je $y_p = A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D$, pri čemu su $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ konstante. Deriviranjem dobivamo:

$$y_p' = 3 \cdot A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x + C,$$
$$y_p'' = 6 \cdot A \cdot x + 2 \cdot B.$$

Uvrštavanjem ovih triju izraza u zadanu ODJ dobivamo:

$$6 \cdot A \cdot x + 2 \cdot B - 4 \cdot (3 \cdot A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x + C) + 4 \cdot (A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D) = 8 \cdot x^3,$$
$$4 \cdot A \cdot x^3 + (-12 \cdot A + 4 \cdot B) \cdot x^2 + (6 \cdot A - 8 \cdot B + 4 \cdot C) \cdot x + (2 \cdot B - 4 \cdot C + 4 \cdot D) = 8 \cdot x^3,$$
$$\begin{cases} 4 \cdot A = 8, \\ -12 \cdot A + 4 \cdot B = 0, \\ 6 \cdot A - 8 \cdot B + 4 \cdot C = 0, \\ 2 \cdot B - 4 \cdot C + 4 \cdot D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = 3 \cdot A, \\ 3 \cdot A - 4 \cdot B + 2 \cdot C = 0, \\ B - 2 \cdot C + 2 \cdot D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B, C, D) = (2, 6, 9, 6)$$

Zbog toga je

$$y_p = 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 6,$$

odnosno

$$y_o = y_h + y_p = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{2 \cdot x} + 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 6.$$

Odredimo nepoznate konstante C_1 i C_2. Iz početnoga uvjeta $y(0) = 6$ zaključujemo da mora vrijediti jednakost:

$$6 = (C_1 \cdot 0 + C_2) \cdot e^{2 \cdot 0} + 2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 + 6.$$

Odatle lako slijedi $C_2 = 0$.

Iz početnoga uvjeta $y(1) = 23$ zaključujemo da mora vrijediti jednakost:

$$23 = (C_1 \cdot 1 + C_2) \cdot e^{2 \cdot 1} + 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 6.$$

Odatle lako slijedi $C_1 + C_2 = 0$. Zbog $C_2 = 0$ slijedi $C_1 = 0$. Stoga je rješenje zadatka:

$$y = (0 \cdot x + 0) \cdot e^{2 \cdot x} + 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 6 = 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 6.$$

b) Pripadna homogena ODJ je: $y'' + y = 0$. Njezina karakteristična jednadžba je $k^2 + 1 = 0$. Rješenja te jednadžbe su $k_1 = -i,\ k_2 = i.$ Rješenje koje ima strogo pozitivan imaginarni dio je $k_2 = i$, pa očitamo: $a = \mathrm{Re}(k_2) = 0,\ b = \mathrm{Im}(k_2) = 1$. Stoga je:

$$y_h = (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x) \cdot e^{0 \cdot x} = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x\,.$$

Desna strana polazne ODJ je $2 \cdot \sin x$. Koeficijent uz x (zapravo, kružna frekvencija) u tom izrazu jednak je $\beta = 1$. Primijetimo da je $\beta \cdot i = 1 \cdot i = i = k_2$, odnosno da je $\beta \cdot i$ jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe. Zbog toga partikularno rješenje polazne ODJ tražimo u obliku:

$$y_p = x^1 \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = x \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x)\,.$$

Deriviranjem ovoga izraza dobivamo:

$$y_p' = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x + x \cdot (B \cdot \cos x - A \cdot \sin x) = (B \cdot x + A) \cdot \cos x + (-A \cdot x + B) \cdot \sin x,$$
$$y_p'' = B \cdot \cos x - (B \cdot x + A) \cdot \sin x - A \cdot \sin x + (-A \cdot x + B) \cdot \cos x = (-A \cdot x + 2 \cdot B) \cdot \cos x + (-B \cdot x - 2 \cdot A) \cdot \sin x.$$

Uvrštavanjem izraza za y_p i y_p'' u zadanu ODJ dobivamo:

$$(-A \cdot x + 2 \cdot B) \cdot \cos x + (-B \cdot x - 2 \cdot A) \cdot \sin x + x \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = 2 \cdot \sin x,$$
$$2 \cdot B \cdot \cos x - 2 \cdot A \cdot \sin x = 2 \cdot \sin x,$$
$$\begin{cases} 2 \cdot B = 0, \\ -2 \cdot A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B) = (-1,\ 0)$$

Dakle, $y_p = x \cdot ((-1) \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x) = -x \cdot \cos x$, pa je

$$y_o = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x - x \cdot \cos x\,.$$

Odredimo nepoznate konstante C_1 i C_2. Iz početnoga uvjeta $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ slijedi:

$$1 = C_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow C_2 = 1.$$

Iz početnoga uvjeta $y(\pi) = \pi$ slijedi:

$$\pi = C_1 \cdot \cos(\pi) + C_2 \cdot \sin(\pi) - \pi \cdot \cos(\pi) \Leftrightarrow C_1 = 0.$$

Dakle, rješenje zadatka je:

$$y = \sin x - x \cdot \cos x\,.$$

c) Pripadna homogena ODJ je: $y'' + 4 \cdot y = 0$. Njezina karakteristična jednadžba je $k^2 + 4 = 0$. Rješenja te jednadžbe su $k_1 = -2 \cdot i,\ k_2 = 2 \cdot i.$ Rješenje koje ima strogo pozitivan imaginarni dio je $k_2 = 2 \cdot i$, pa očitamo: $a = \mathrm{Re}(k_2) = 0,\ b = \mathrm{Im}(k_2) = 2$. Stoga je:

$$y_h = \left[C_1 \cdot \cos(2 \cdot x) + C_2 \cdot \sin(2 \cdot x)\right] \cdot e^{0 \cdot x} = C_1 \cdot \cos(2 \cdot x) + C_2 \cdot \sin(2 \cdot x)\,.$$

Desna strana polazne ODJ je $4\cdot\cos(2\cdot x)$. Koeficijent uz x u tom izrazu jednak je $\beta=2$. Uočimo da je $\beta\cdot i=2\cdot i=k_2$, odnosno da je $\beta\cdot i$ jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe. Zbog toga partikularno rješenje polazne ODJ tražimo u obliku

$$y_p=x^1\cdot\left[A\cdot\cos(2\cdot x)+B\cdot\sin(2\cdot x)\right]=x\cdot\left[A\cdot\cos(2\cdot x)+B\cdot\sin(2\cdot x)\right].$$

Deriviranjem ovoga izraza dobivamo:

$$y_p'=A\cdot\cos(2\cdot x)+B\cdot\sin(2\cdot x)+x\cdot\left[2\cdot B\cdot\cos(2\cdot x)-2\cdot A\cdot\sin(2\cdot x)\right]=(2\cdot B\cdot x+A)\cdot\cos(2\cdot x)+(-2\cdot A\cdot x+B)\cdot\sin(2\cdot x),$$
$$y_p''=2\cdot B\cdot\cos(2\cdot x)-2\cdot(2\cdot B\cdot x+A)\cdot\sin(2\cdot x)-2\cdot A\cdot\sin(2\cdot x)+2\cdot(-2\cdot A\cdot x+B)\cdot\cos(2\cdot x)=$$
$$=(-4\cdot A\cdot x+4\cdot B)\cdot\cos(2\cdot x)+(-4\cdot B\cdot x-4\cdot A)\cdot\sin(2\cdot x).$$

Uvrštavanjem izraza za y_p i y_p'' u zadanu ODJ dobivamo:

$$(-4\cdot A\cdot x+4\cdot B)\cdot\cos(2\cdot x)+(-4\cdot B\cdot x-4\cdot A)\cdot\sin(2\cdot x)+4\cdot x\cdot\left[A\cdot\cos(2\cdot x)+B\cdot\sin(2\cdot x)\right]=4\cdot\cos(2\cdot x),$$
$$4\cdot B\cdot\cos(2\cdot x)-4\cdot A\cdot\sin(2\cdot x)=4\cdot\cos(2\cdot x),$$
$$\begin{cases}4\cdot B=4,\\-4\cdot A=0\end{cases}\Leftrightarrow(A,B)=(0,\ 1)$$

Dakle, $y_p=x\cdot\left[0\cdot\cos(2\cdot x)+1\cdot\sin(2\cdot x)\right]=x\cdot\sin(2\cdot x)$, pa je

$$y_o=C_1\cdot\cos(2\cdot x)+C_2\cdot\sin(2\cdot x)+x\cdot\sin(2\cdot x).$$

Odredimo nepoznate konstante C_1 i C_2. Iz početnoga uvjeta $y(0)=1$ slijedi:

$$1=C_1\cdot\cos(2\cdot 0)+C_2\cdot\sin(2\cdot 0)+0\cdot\sin(2\cdot 0)\Leftrightarrow C_1=1.$$

Iz početnoga uvjeta $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$ slijedi:

$$\frac{\pi}{4}=C_1\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)+C_2\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow C_2=0.$$

Dakle, rješenje zadatka je:

$$y=1\cdot\cos(2\cdot x)+0\cdot\sin(2\cdot x)+x\cdot\sin(2\cdot x)=\cos(2\cdot x)+x\cdot\sin(2\cdot x).$$

d) Pripadna homogena ODJ je: $y''-9\cdot y=0$. Njezina karakteristična jednadžba je $k^2-9=0$. Rješenja te jednadžbe su $k_1=-3,\ k_2=3$. Ta rješenja su međusobno različiti realni brojevi. Stoga je:

$$y_h=C_1\cdot e^{-3\cdot x}+C_2\cdot e^{3\cdot x}.$$

Desna strana polazne ODJ je $6\cdot e^{3\cdot x}$. Koeficijent uz x u tom izrazu jednak je $\beta=3$. Uočimo da je $\beta=3$ jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe. Zbog toga partikularno rješenje polazne ODJ tražimo u obliku:

$$y_p=x^1\cdot A\cdot e^{3\cdot x}=A\cdot x\cdot e^{3\cdot x}.$$

Deriviranjem ovoga izraza dobivamo:

$$y_p' = A \cdot e^{3 \cdot x} + A \cdot x \cdot 3 \cdot e^{3 \cdot x} = (3 \cdot A \cdot x + A) \cdot e^{3 \cdot x},$$
$$y_p'' = 3 \cdot A \cdot e^{3 \cdot x} + (3 \cdot A \cdot x + A) \cdot 3 \cdot e^{3 \cdot x} = (9 \cdot A \cdot x + 6 \cdot A) \cdot e^{3 \cdot x}.$$

Uvrštavanjem izraza za y_p i y_p'' u zadanu ODJ dobivamo:

$$(9 \cdot A \cdot x + 6 \cdot A) \cdot e^{3 \cdot x} - 9 \cdot A \cdot x \cdot e^{3 \cdot x} = 6 \cdot e^{3 \cdot x} \Leftrightarrow 6 \cdot A \cdot e^{3 \cdot x} = 6 \cdot e^{3 \cdot x} \Leftrightarrow A = 1.$$

Dakle, $y_p = x \cdot e^{3 \cdot x}$, pa je:

$$y_o = C_1 \cdot e^{-3 \cdot x} + C_2 \cdot e^{3 \cdot x} + x \cdot e^{3 \cdot x}.$$

Odredimo nepoznate konstante C_1 i C_2. Iz početnoga uvjeta $y(0) = 1$ slijedi:

$$1 = C_1 \cdot e^{-3 \cdot 0} + C_2 \cdot e^{3 \cdot 0} + 0 \cdot e^{3 \cdot 0} \Leftrightarrow C_2 = 1$$

Iz početnoga uvjeta $y(1) = 2 \cdot e^3$ i dobivene jednakosti $C_2 = 1$ slijedi:

$$2 \cdot e^3 = C_1 \cdot e^{-3 \cdot 1} + C_2 \cdot e^{3 \cdot 1} + 1 \cdot e^{3 \cdot 1} \Leftrightarrow 2 \cdot e^3 = C_1 \cdot e^{-3} + 1 \cdot e^3 + 1 \cdot e^3 \Leftrightarrow C_1 = 0.$$

Dakle, rješenje zadatka je:

$$y = 0 \cdot e^{-3 \cdot x} + 1 \cdot e^{3 \cdot x} + x \cdot e^{3 \cdot x} = (x + 1) \cdot e^{3 \cdot x}.$$

13. GRUPA ZADATAKA

1. U svakom podzadatku treba primijeniti Laplaceove transformacije:

$$\begin{cases} L\left(y''\right)=s^2\cdot F(s)-s\cdot y(0)-y'(0), \\ L\left(y'\right)=s\cdot F(s)-y(0), \\ L(y)=F(s), \end{cases}$$

uz uvažavanje zadanih početnih uvjeta.

a) Primjenom Laplaceove transformacije dobijemo redom:

$$s^2\cdot F(s)-s\cdot 5-1+s\cdot F(s)-5+F(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{6}{s},$$

$$F(s)\cdot(s^2+s+1)=\frac{1}{s^2}+\frac{6}{s}+5\cdot s+6,$$

$$F(s)\cdot(s^2+s+1)=\frac{5\cdot s^3+6\cdot s^2+6\cdot s+1}{s^2},$$

$$F(s)=\frac{5\cdot s^3+6\cdot s^2+6\cdot s+1}{s^2\cdot(s^2+s+1)}.$$

Podijelimo polinome $5\cdot s^3+6\cdot s^2+6\cdot s+1$ i s^2+s+1 prema pravilu za dijeljenje polinoma:

$$\begin{array}{l} (5\cdot s^3+6\cdot s^2+6\cdot s+1):(s^2+s+1)=5\cdot s+1 \\ -(5\cdot s^3+5\cdot s^2+5\cdot s) \\ \hline s^2+s+1 \\ -(s^2+s+1) \\ \hline 0 \end{array}$$

Tako dobijemo:

$$F(s)=\frac{5\cdot s^3+6\cdot s^2+6\cdot s+1}{s^2\cdot(s^2+s+1)}=\frac{(5\cdot s+1)\cdot(s^2+s+1)}{s^2\cdot(s^2+s+1)}=\frac{5\cdot s+1}{s^2}=\frac{5}{s}+\frac{1}{s^2}.$$

Invertiranjem ovoga izraza lako nalazimo original:

$$y=5+x=x+5.$$

b) Primjenom Laplaceove transformacije dobijemo redom:

$$s^2\cdot F(s)-s\cdot 1-(-1)+s\cdot F(s)-1+\frac{1}{s^2}+F(s)=0,$$

$$F(s)\cdot(s^2+s+1)=-\frac{1}{s^2}+s,$$

$$F(s)\cdot(s^2+s+1)=\frac{s^3-1}{s^2},$$

$$F(s)=\frac{s^3-1}{s^2\cdot(s^2+s+1)}=\frac{(s-1)\cdot(s^2+s+1)}{s^2\cdot(s^2+s+1)}=\frac{s-1}{s^2}=\frac{s}{s^2}-\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}.$$

Invertiranjem ovoga izraza lako nalazimo original:

$$y = 1 - x = -x + 1.$$

c) Primjenom Laplaceove transformacije dobijemo redom:

$$s^2 \cdot F(s) - s \cdot 0 - (-1) + s \cdot F(s) - 0 = 2 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s},$$

$$F(s) \cdot (s^2 + s) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} - 1,$$

$$F(s) \cdot (s^2 + s) = \frac{-s^2 + s + 2}{s^2},$$

$$F(s) = \frac{-s^2 + s + 2}{s^2 \cdot (s^2 + s)} = -\frac{s^2 - s - 2}{s^2 \cdot (s^2 + s)} = -\frac{(s+1) \cdot (s-2)}{s^3 \cdot (s+1)} = -\frac{s-2}{s^3} = -\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

Ovdje smo primijenili i rastav $s^2 - s - 2 = (s+1) \cdot (s-2)$ koji se lako dobije rješavanjem kvadratne jednadžbe $s^2 - s - 2 = 0$. Preostaje invertirati dobiveni izraz i dobiti:

$$y = -x + x^2 = x^2 - x\,.$$

d) Primjenom Laplaceove transformacije dobijemo redom:

$$s^2 \cdot F(s) - s \cdot 2 - 0 - s \cdot F(s) + 2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \right),$$

$$F(s) \cdot (s^2 - s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} + 2 \cdot s - 2,$$

$$F(s) \cdot (s^2 - s) = \frac{2 \cdot s^3 - 2 \cdot s^2 - 2 \cdot s + 2}{s^2},$$

$$F(s) = \frac{2 \cdot s^3 - 2 \cdot s^2 - 2 \cdot s + 2}{s^2 \cdot (s^2 - s)} = \frac{2 \cdot s^2 \cdot (s-1) - 2 \cdot (s-1)}{s^2 \cdot s \cdot (s-1)} = \frac{2 \cdot (s-1) \cdot (s^2 - 1)}{s^3 \cdot (s-1)} =$$

$$= \frac{2 \cdot s^2 - 2}{s^3} = \frac{2 \cdot s^2}{s^3} - \frac{2}{s^3} = 2 \cdot \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3}.$$

Preostaje invertirati dobiveni izraz i dobiti:

$$y = 2 - x^2 = -x^2 + 2.$$

e) Primjenom Laplaceove transformacije dobijemo redom:

$$s^2 \cdot F(s) - s \cdot 2 - 0 - (s \cdot F(s) - 2) - 2 \cdot F(s) = -2 \cdot \frac{1}{s-1},$$

$$F(s) \cdot (s^2 - s - 2) = -\frac{2}{s-1} + 2 \cdot s - 2,$$

$$F(s) \cdot (s^2 - s - 2) = \frac{2 \cdot s^2 - 2 \cdot s - 2 \cdot s}{s-1},$$

$$F(s) = \frac{2 \cdot s \cdot (s-2)}{(s-1) \cdot (s^2 - s - 2)} = \frac{2 \cdot s \cdot (s-2)}{(s-1) \cdot (s+1) \cdot (s-2)} = \frac{2 \cdot s}{s^2 - 1} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 - 1}.$$

Ovdje smo primijenili rastav iz prethodnoga zadatka. Preostaje primijeniti inverz Laplaceove transformacije i dobiti:

$$y = 2 \cdot \mathrm{ch}\, x = (\text{prema definiciji funkcije ch}) = e^x + e^{-x}\,.$$

f) Primjenom Laplaceove transformacije dobijemo redom:

$$s^2 \cdot F(s) - s \cdot 1 - 2 + s \cdot F(s) - 1 - F(s) + 5 \cdot \frac{1}{s^2+1} = 0,$$

$$s^2 \cdot F(s) - s \cdot 1 - 2 + s \cdot F(s) - 1 - F(s) + 5 \cdot \frac{1}{s^2+1} = 0,$$

$$F(s) \cdot (s^2 + s - 1) = -\frac{5}{s^2+1} + s + 3,$$

$$F(s) = \frac{s^3 + 3 \cdot s^2 + s - 2}{(s^2+1) \cdot (s^2+s-1)}.$$

Podijelimo polinome $s^3 + 3 \cdot s^2 + s - 2$ i $s^2 + s - 1$. Dobijemo:

$$\begin{array}{l} (s^3 + 3 \cdot s^2 + s - 2) : (s^2 + s - 1) = s + 2 \\ \underline{-(s^3 + s^2 - s)} \\ 2 \cdot s^2 + 2 \cdot s - 2 \\ \underline{-(2 \cdot s^2 + 2 \cdot s - 2)} \\ 0 \end{array}$$

Stoga je:

$$F(s) = \frac{s^3 + 3 \cdot s^2 + s - 2}{(s^2+1) \cdot (s^2+s-1)} = . \frac{(s+2) \cdot (s^2+s-1)}{(s^2+1) \cdot (s^2+s-1)} = \frac{s+2}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + 2 \cdot \frac{1}{s^2+1}.$$

Invertiranjem ovoga izraza lako dobijemo:

$$y = \cos x + 2 \cdot \sin x = 2 \cdot \sin x + \cos x.$$

g) Primjenom Laplaceove transformacije dobijemo redom:

$$s^2 \cdot F(s) - s \cdot 2 - 2 + 2 \cdot s \cdot F(s) - 4 + 2 \cdot F(s) + 10 \cdot \frac{2}{s^2+4} = 0,$$

$$F(s) \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 2) = -\frac{20}{s^2+4} + 2 \cdot s + 6,$$

$$F(s) = \frac{2 \cdot s^3 + 6 \cdot s^2 + 8 \cdot s + 4}{(s^2+4) \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 2)}.$$

Podijelimo polinome $2 \cdot s^3 + 6 \cdot s^2 + 8 \cdot s + 4$ i $s^2 + 2 \cdot s + 2$:

$$\begin{array}{l} (2 \cdot s^3 + 6 \cdot s^2 + 8 \cdot s + 4) : (s^2 + 2 \cdot s + 2) = 2 \cdot s + 2 \\ \underline{-(2 \cdot s^3 + 4 \cdot s^2 + 4 \cdot s)} \\ 2 \cdot s^2 + 4 \cdot s + 4 \\ \underline{-(2 \cdot s^2 + 4 \cdot s + 4)} \\ 0 \end{array}$$

Tako dobijemo:

$$F(s)=\frac{2\cdot s^3+6\cdot s^2+8\cdot s+4}{(s^2+4)\cdot(s^2+2\cdot s+2)}=\frac{(2\cdot s+2)\cdot(s^2+2\cdot s+2)}{(s^2+4)\cdot(s^2+2\cdot s+2)}=\frac{2\cdot s+2}{s^2+4}=2\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{2}{s^2+4}.$$

Invertiranjem ovoga izraza lako dobijemo:

$$y=2\cdot\cos(2\cdot x)+\sin(2\cdot x)=\sin(2\cdot x)+2\cdot\cos(2\cdot x).$$

h) Primjenom Laplaceove transformacije dobijemo redom:

$$s^2\cdot F(s)-s\cdot 0-2-(s\cdot F(s)-0)=2\cdot\frac{1}{s-1},$$

$$F(s)\cdot(s^2-s)=\frac{2}{s-1}+2,$$

$$F(s)\cdot(s^2-s)=\frac{2\cdot s}{s-1}$$

$$F(s)=\frac{2\cdot s}{(s-1)(s^2-s)}=\frac{2\cdot s}{s\cdot(s-1)^2}=\frac{2}{(s-1)^2}=2\cdot\frac{1}{(s-1)^2}.$$

Invertiranjem ovoga izraza dobijemo:

$$y=2\cdot x\cdot e^x.$$

i) Primjenom Laplaceove transformacije dobijemo redom:

$$s^2\cdot F(s)-s\cdot 0-0+F(s)=8\cdot\frac{s}{s^2+1},$$

$$F(s)\cdot(s^2+1)=\frac{8\cdot s}{s^2+1},$$

$$F(s)=\frac{8\cdot s}{(s^2+1)^2}=4\cdot\frac{2\cdot s}{(s^2+1)^2}.$$

Invertiranjem ovoga izraza dobijemo:

$$y=4\cdot x\cdot\sin x.$$

j) Primjenom Laplaceove transformacije dobijemo redom:

$$s^2\cdot F(s)-s\cdot 0-3+F(s)+6\cdot\frac{1}{s^2+1}=0,$$

$$F(s)\cdot(s^2+1)=-\frac{6}{s^2+1}+3,$$

$$F(s)\cdot(s^2+1)=\frac{3\cdot s^2-3}{s^2+1}$$

$$F(s)=\frac{3\cdot s^2-3}{(s^2+1)^2}=\frac{3\cdot(s^2-1)}{(s^2+1)^2}=3\cdot\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}.$$

Invertiranjem ovoga izraz dobijemo:

$$y=3\cdot x\cdot\cos x\ .$$

k) Primjenom Laplaceove transformacije dobijemo redom:

$$s^2 \cdot F(s) - s \cdot 1 - 2 - 2 \cdot s \cdot F(s) + 2 + 4 \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s},$$

$$F(s) \cdot (s^2 - 2 \cdot s) = \frac{2}{s} - \frac{4}{s^2} + s$$

$$F(s) \cdot (s^2 - 2 \cdot s) = \frac{s^3 + 2 \cdot s - 4}{s^2}$$

$$F(s) = \frac{s^3 + 2 \cdot s - 4}{s^2 \cdot (s^2 - 2 \cdot s)} = \frac{s^3 + 2 \cdot s - 4}{s^3 \cdot (s-2)} = \frac{s^3}{s^3 \cdot (s-2)} + \frac{2 \cdot s - 4}{s^3 \cdot (s-2)} = \frac{1}{s-2} + \frac{2 \cdot (s-2)}{s^3 \cdot (s-2)} = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s^3}.$$

Invertiranjem ovoga izraz dobijemo:

$$y = e^{2 \cdot x} + x^2 = x^2 + e^{2 \cdot x} \ .$$

14. GRUPA ZADATAKA

1. Odredimo prve tri derivacije zadane funkcije:

$$u' = \left(x^3 - 3\cdot x^2 + 6\cdot x + 2036\right)\cdot e^x,$$
$$u'' = (x^3 + 2042)\cdot e^x,$$
$$u''' = (x^3 + 3\cdot x^2 + 2042)\cdot e^x.$$

Uvrštavanjem izraza za u'' i u''' u zadanu jednadžbu dobijemo:

$$u''' - u'' = (x^3 + 3\cdot x^2 + 2041)\cdot e^x - (x^3 + 2041)\cdot e^x = 3\cdot x^2\cdot e^x,$$

a to je upravo desna strana zadane jednadžbe. Time je dokaz završen.

2. Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku

$$y' - \frac{2}{x}\cdot y = \frac{2}{x}\cdot y^{\frac{1}{2}}.$$

Vidimo da je riječ o Bernoullijevoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi. Očitamo:

$$P(x) = Q(x) = -\frac{2}{x},\ k = \frac{1}{2}.$$

Uvrštavanjem tih podataka u formulu za rješenje Bernoullijeve jednadžbe dobijemo:

$$g(x) = e^{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\int -\frac{2}{x}\cdot \mathrm{d}x} = e^{\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot\int\frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x} = e^{-\ln x} = e^{\ln\left(x^{-1}\right)} = x^{-1} = \frac{1}{x},$$

$$y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\int\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\cdot \mathrm{d}x + C} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot \mathrm{d}x + C} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + C},$$

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{x} + C}{\frac{1}{x}} = C\cdot x + 1.$$

U ovu jednakost uvrstimo $x = 2,\ y = 9,$ pa dobijemo jednadžbu:

$$2\cdot C + 1 = 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2\cdot C + 1 = 3 \Leftrightarrow C = 1.$$

Prema tome slijedi:

$$y^{\frac{1}{2}} = x + 1 \Rightarrow y = (x+1)^2 = x^2 + 2\cdot x + 1.$$

3. Zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$y' - (\operatorname{ctg} x)\cdot y = 0.$$

Vidimo da je riječ o homogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo: $P(x) = -\text{ctg}\, x$, pa uvrštavanjem u formulu za rješenje navedenoga tipa jednadžbe imamo:

$$y = C \cdot e^{-\int -\text{ctg}\, x \cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{\int \text{ctg}\, x \cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{\ln \sin x} = C \cdot \sin x.$$

U ovu jednakost uvrstimo $x = \frac{9}{2} \cdot \pi,\ y = 1,$ pa dobijemo:

$$1 = C \cdot \sin\left(\frac{9}{2} \cdot \pi\right) \Leftrightarrow C = 1.$$

Dakle, rješenje zadatka je:

$$y = \sin x.$$

4. Pripadna karakteristična jednadžba je

$$k^2 + 8 \cdot k + 17 = 0.$$

Njezina rješenja su $k_1 = -4 - i,\ k_2 = -4 + i$.

Rješenje sa strogo pozitivnim imaginarnim dijelom je $k_2 = -4 + i$, pa očitamo:

$$a = \text{Re}(k_2) = -4,\ b = \text{Im}(k_2) = 1.$$

Stoga je opće rješenje zadane jednadžbe:

$$y = (C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t) \cdot e^{-4 \cdot t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nepoznate konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ odredimo iz početnih uvjeta. Uvrštavanjem $t = 0$ i $t = \frac{\pi}{2}$ u opće rješenje zadane jednadžbe dobijemo:

$$\begin{cases} 1 = (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0) \cdot e^{-2 \cdot 0}, \\ 0 = \left(C_1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + C_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{-2 \cdot \pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = C_1 \cdot 1, \\ 0 = C_2 \cdot \cdot e^{-2 \cdot \pi} \end{cases} \Leftrightarrow (C_1, C_2) = (1, 0).$$

Dakle, rješenje zadatka je:

$$y = e^{-4 \cdot t} \cdot \cos t.$$

5. U ovome su slučaju

$$L\left(y''\right) = s^2 \cdot F(s) - 0 \cdot s - (-4) = s^2 \cdot F(s) + 4,$$
$$L(y) = F(s),$$
$$L(8 \cdot \sin w) = 8 \cdot L(\sin w) = 8 \cdot \frac{1}{s^2 + 1^2} = \frac{8}{s^2 + 1}.$$

Uvrštavanjem tih izraza u zadanu jednadžbu dobijemo:

$$s^2 \cdot F(s) + 4 + F(s) = \frac{8}{s^2+1},$$

$$F(s) \cdot \left(s^2+1\right) = \frac{8}{s^2+1} - 4,$$

$$F(s) \cdot \left(s^2+1\right) = \frac{-4 \cdot s^2 + 4}{s^2+1} = (-4) \cdot \frac{s^2-1}{s^2+1},$$

$$F(s) = (-4) \cdot \frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}.$$

Invertiranjem ovoga izraza lako dobijemo:

$$y = -4 \cdot w \cdot \cos w.$$

6. Iz postavki zadatka dobivamo sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y' = x + y + 3, \\ y(0) = -3. \end{cases}$$

Riješimo taj problem. Jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$y' - y = x + 3.$$

Odatle zaključujemo da je riječ o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo:

$$P(x) = -1,\ Q(x) = x + 3,$$

pa te funkcije uvrstimo u formulu za rješenje navedenoga tipa jednadžbe:

$$y = e^{-\int(-1)\cdot \mathrm{d}x} \cdot \left(\int e^{\int(-1)\cdot \mathrm{d}x} \cdot (x+3) \cdot \mathrm{d}x + C\right) = e^{\int \mathrm{d}x} \cdot \left(\int e^{-\int \mathrm{d}x} \cdot (x+3) \cdot \mathrm{d}x + C\right) =$$

$$= e^x \cdot \left(\int e^{-x} \cdot (x+3) \cdot \mathrm{d}x + C\right) = \begin{vmatrix} u = x+3 & v = \int e^{-x} \cdot \mathrm{d}x = -e^{-x} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = e^{-x} \cdot \mathrm{d}x \end{vmatrix} = e^x \cdot \left(-(x+3) \cdot e^{-x} - \int -e^{-x} \cdot \mathrm{d}x\right) =$$

$$= e^x \cdot \left(-(x+3) \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot \mathrm{d}x + C\right) = e^x \cdot \left(-(x+3) \cdot e^{-x} - e^{-x} + C\right) = -x - 3 - 1 + C \cdot e^x = C \cdot e^x - x - 4.$$

Nepoznatu realnu konstantu C odredimo iz početnoga uvjeta. Uvrštavanjem $x = 0,\ y = -3$ u dobiveni izraz slijedi:

$$-3 = C \cdot e^0 - 0 - 4 \Leftrightarrow -3 = C - 4 \Leftrightarrow C = 1.$$

Dakle, rješenje zadatka je krivulja:

$$y = e^x - x - 4.$$

15. GRUPA ZADATAKA

1. Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 - 8 \cdot k + 17 = 0.$$

Njezina rješenja su $k_1 = 4 + i$ i $k_2 = 4 - i$. Rješenje koje ima strogo pozitivan imaginarni dio je k_1, pa očitamo: $a = \mathrm{Re}(k_1) = 4,\ b = \mathrm{Im}(k_1) = 1.$ Stoga je traženo opće rješenje zadane jednadžbe

$$y = \left(C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x\right) \cdot e^{4 \cdot x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Odredimo prve tri derivacije zadane funkcije. Imamo redom:

$$u' = 2 \cdot t + 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 = 2 \cdot t + 1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t},$$

$$u'' = 2 + 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} = 2 - \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t},$$

$$u''' = 0 - \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} = \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t}.$$

Uvrštavanjem posljednjih dvaju izraza u lijevu stranu zadane obične diferencijalne jednadžbe dobijemo:

$$2 \cdot u''' + u'' = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} + 2 - \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} + 2 - \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} = 2,$$

što je i trebalo pokazati.

3. Podijelimo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu s x. Dobijemo:

$$y' - \frac{1}{x} \cdot y = -x \cdot \sin x.$$

Uočavamo da je riječ o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda, pri čemu su $P(x) = -\frac{1}{x}$ i $Q(x) = -x \cdot \sin x$. Uvrstimo navedene funkcije u formulu za rješenje nehomogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 1. reda, pa dobijemo:

$$\int P(x) \cdot \mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = -\ln x,$$

$$\int e^{\int P(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot Q(x) \cdot \mathrm{d}x = \int e^{-\ln x} \cdot (-x \cdot \sin x) \cdot \mathrm{d}x = -\int e^{\ln\left(x^{-1}\right)} \cdot x \cdot \sin x \cdot \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x} \cdot x \cdot \sin x \cdot \mathrm{d}x = -\int \sin x \cdot \mathrm{d}x = \cos x,$$

$$y = e^{-\int P(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot \left(\int e^{\int P(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot Q(x) \cdot \mathrm{d}x + C\right) = e^{-(-\ln x)} \cdot \left(\cos x + C\right) = e^{\ln x} \cdot \left(\cos x + C\right) = x \cdot \left(\cos x + C\right),\ C \in \mathbb{R}.$$

U posljednju jednakost uvrstimo početni uvjet, tj. $x = \pi$ i $y = -\pi$:

$$-\pi = \pi \cdot (\cos\pi + C),$$
$$-\pi = \pi \cdot (-1 + C),$$
$$-\pi = -\pi + C \cdot \pi,$$
$$C \cdot \pi = 0, \quad / : \pi$$
$$C = 0.$$

Stoga je rješenje zadatka:

$$y = x \cdot \cos x.$$

4. Zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu možemo riješiti na dva načina: ili kao homogenu linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda ili kao običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda sa razdvojenim (separiranim) varijablama. Opredijelimo se za prvi način.

Očitamo $P(x) = \operatorname{tg} w$, pa uvrštavanjem u formulu za rješenje navedenoga tipa jednadžbe dobijemo:

$$y = C \cdot e^{-\int P(w)\cdot \mathrm{d}w} = C \cdot e^{-\int \operatorname{tg} w \cdot \mathrm{d}w} = C \cdot e^{-(-\ln(\cos w))} C \cdot e^{\ln(\cos w)} = C \cdot \cos w, \ C \in \mathbb{R}.$$

Nepoznatu konstantu C odredit ćemo koristeći početni uvjet. U dobivenu jednakost uvrstimo $w = 0$ i $y = 1$, pa dobijemo:

$$1 = C \cdot \cos(0) \Rightarrow C = 1.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $y = \sin w$.

5. Imamo redom:

$$2 \cdot \left[s^2 \cdot F(s) - s \cdot 1 - 2\right] - 3 \cdot \left[s \cdot F(s) - 1\right] = 2 \cdot \frac{1}{s-2},$$
$$2 \cdot s^2 \cdot F(s) - 2 \cdot s - 4 - 3 \cdot s \cdot F(s) + 3 = \frac{2}{s-2},$$
$$F(s) \cdot (2 \cdot s^2 - 3 \cdot s) = \frac{2}{s-2} + 2 \cdot s + 1,$$
$$F(s) \cdot (2 \cdot s^2 - 3 \cdot s) = \frac{2 + (2 \cdot s + 1) \cdot (s-2)}{s-2},$$
$$F(s) = \frac{2 + 2 \cdot s^2 + s - 4 \cdot s - 2}{(s-2) \cdot (2 \cdot s^2 - 3 \cdot s)} = \frac{2 \cdot s^2 - 3 \cdot s}{(s-2) \cdot (2 \cdot s^2 - 3 \cdot s)} = \frac{1}{s-2},$$
$$y = e^{2 \cdot t}.$$

6. Riješimo najprije zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu. Podijelimo je s x^2. Dobijemo:

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{2}{x^2} \cdot y^2.$$

Vidimo da se radi o Bernoullijevoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi. Očitamo:

$$P(x) = \frac{1}{x}, \ Q(x) = \frac{2}{x^2}, \ k = 2.$$

Tako redom imamo:

$$g(x)=e^{(1-2)\cdot\int\frac{1}{x}\cdot\mathrm{d}x}=e^{-\ln x}=e^{\ln\left(x^{-1}\right)}=x^{-1}=\frac{1}{x},$$

$$y^{2-1}=\frac{\frac{1}{x}}{(1-2)\cdot\int\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x^2}\cdot\mathrm{d}x+C},$$

$$y=\frac{\frac{1}{x}}{(-1)\cdot\int\frac{2}{x^3}\cdot\mathrm{d}x+C}=\frac{\frac{1}{x}}{(-2)\cdot\int x^{-3}\cdot\mathrm{d}x+C}=\frac{\frac{1}{x}}{(-2)\cdot\frac{1}{-3+1}\cdot x^{-3+1}+C}=\frac{\frac{1}{x}}{x^{-2}+C}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+C},$$

$$y=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{C\cdot x^2+1}{x^2}}=\frac{x}{C\cdot x^2+1}.$$

Ova krivulja mora sjeći pravac $y=\frac{1}{2}$ u točno jednoj točki. Iz toga podatka dobivamo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{C\cdot x^2+1}, \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Lijeve strane jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Odatle slijedi:

$$\frac{x}{C\cdot x^2+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\cdot x=C\cdot x^2+1\Leftrightarrow C\cdot x^2-2\cdot x+1=0.$$

Ova kvadratna jednadžba će imati točno jedno rješenje ako i samo ako njezina diskriminanta D bude jednaka nuli. Tako dobivamo linearnu jednadžbu s nepoznanicom C. Riješimo je:

$$D=(-2)^2-4\cdot C\cdot 1=4-4\cdot C,$$
$$D=0\Leftrightarrow 4-4\cdot C=0\Leftrightarrow 4\cdot C=4\Leftrightarrow C=1.$$

Dakle, tražena jednadžba krivulje je:

$$y=\frac{x}{1\cdot x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}.$$

LITERATURA

1. B. Kovačić, L. Marohnić, T. Strmečki: *Repetitorij matematike za studente elektrotehnike*, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016. (dostupno na: http://bkovacic.weebly.com)

2. A. Aglić Aljinović et.al.: *Matematika* 1, Element, Zagreb, 2014.

3. S. Suljagić: *Matematika* 1, interna skripta, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003.

4. B. P. Demidovič: *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike*, Danjar, Zagreb, 1995.

5. V. P. Minorski: *Zbirka zadataka iz više matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1972.

6. I. Brnetić: *Matematička analiza* 1, zadaci s pismenih ispita, Element, Zagreb, 2005.