TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

**ELEKTROTEHNIČKI ODJEL**

# MATEMATIKA 1

18. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

**1.** Provjerite da funkcija $f$ definirana na segmentu $[a, b]$ zadovoljava uvjete Rolleova poučka, pa odredite barem jedan $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f'(c) = 0$ ako je:

**a)** $f(x) = x^2 - 1$, $a = -1$, $b = 1$;
**b)** $f(x) = 4 - x^2$, $a = -2$, $b = 2$;
**c)** $f(x) = x^2 - x$, $a = 0$, $b = 1$;
**d)** $f(x) = 2 \cdot x - x^2$, $a = 0$, $b = 2$;
**e)** $f(x) = x^2 - x - 6$, $a = -2$, $b = 3$;
**f)** $f(x) = x^2 + 2 \cdot x - 8$, $a = -4$, $b = 2$;
**g)** $f(x) = 6 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1,\ a = \dfrac{1}{3},\ b = \dfrac{1}{2}$;
**h)** $f(x) = 12 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3,\ a = -\dfrac{1}{3},\ b = \dfrac{3}{4}$;
**i)** $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $a = -1$, $b = 1$;
**j)** $f(x) = x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12$, $a = -2$, $b = 3$;
**k)** $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$;
**l)** $f(x) = \cos x,\ a = -\dfrac{\pi}{2},\ b = \dfrac{\pi}{2}$;
**m)** $f(x) = \ln(2 - x^2)$, $a = -1$, $b = 1$;
**n)** $f(x) = \ln(10 - x^2)$, $a = -3$, $b = 3$;
**o)** $f(x) = \ln(7 - x - x^2)$, $a = -3$, $b = 2$;
**p)** $f(x) = \ln(x^3 + x^2 - 5 \cdot x + 4)$, $a = -3$, $b = 1$;
**q)** $f(x) = \ln(x^3 - 3 \cdot x^2 + 5)$, $a = -1$, $b = 2$;
**r)** $f(x) = \sqrt{x - x^2}$, $[a, b] = D_f$;
**s)** $f(x) = \sqrt{6 - 5 \cdot x - x^2}$, $[a, b] = D_f$;
**t)** $f(x) = e^{25 - x^2} - 1$, $a = -5$, $b = 5$;
**u)** $f(x) = e^{\sqrt{4 \cdot x - x^2}} - 1$, $[a, b] = D_f$;
**v)** $f(x) = e^{\sqrt{9 - 8 \cdot x - x^2}} - 1$, $[a, b] = D_f$;
**w)** $f(x) = (x^2 - 2 \cdot x - 2) \cdot e^x,\ a = 1 - \sqrt{3},\ b = \sqrt{3} + 1$;
**x)** $f(x) = (3 - x^2) \cdot e^{-x},\ a = -\sqrt{3},\ b = \sqrt{3}$;
**y)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 36}$, $a = -5$, $b = 5$;
**z)** $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 + 1}$, $a = -2$, $b = 2$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

**ELEKTROTEHNIČKI ODJEL**

# MATEMATIKA 1

18. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

**2.** Zadovoljava li realna funkcija $f(x) = 4 - \sqrt[3]{x^2}$ definirana na segmentu [–8, 8] uvjete Rolleova poučka? Ako da, odredite barem jedan $c \in \langle -8, 8\rangle$ takav da je $f\,'(c) = 0$. Ako ne, obrazložite svoj odgovor.

**3.** Zadovoljava li realna funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ definirana na segmentu $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\cdot\pi}{2}\right]$ uvjete Rolleova poučka? Ako da, odredite barem jedan $c \in \left\langle\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\cdot\pi}{2}\right\rangle$ takav da je $f\,'(c) = 0$. Ako ne, obrazložite svoj odgovor.

**4.** Zadana je realna funkcija $f(x) = |\cos x|$ čija je domena $D_f = [0, \pi]$. Postoji li $c \in \langle 0, \pi\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x)$ u točki $T = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (0, f(0))$ i $B = (\pi, f(\pi))$? Ako postoji, odredite jednadžbu te tangente. Ako ne postoji, obrazložite svoj odgovor.

**5.** Zadana je realna funkcija $f(x) = \sqrt[3]{(x-4)^2}$ čija je domena $D_f = [0, 8]$. Postoji li $c \in$ $\in \langle 0, 8\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x)$ u točki $T = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (0, f(0))$ i $B = (8, f(8))$? Ako postoji, odredite jednadžbu te tangente. Ako ne postoji, obrazložite svoj odgovor.

**6.** **a)** Realna funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$f(x) = \prod_{k=0}^{2011} (x - k).$$

Odredite ukupan broj međusobno različitih nultočaka funkcije $f'(x)$. (*Naputak*: Promatrajte funkciju $f$ na segmentima $[k, k+1]$, za $k = 0, 1, \ldots, 2011$, i primijenite Rolleov poučak.)

**b)** Realna funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$f(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - k).$$

Odredite ukupan broj međusobno različitih nultočaka funkcije $f\,'(x)$ kao funkciju argumenta $n$.

**7.** Neka je $f$ realna funkcija neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pokažite da realna funkcija $F$ definirana na segmentu $[a, b]$ propisom

# MATEMATIKA 1

18. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

$$F(x) := \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$$

zadovoljava uvjete Rolleova poučka. Primijenite taj poučak na navedenu funkciju i odatle izvedite Lagrangeov poučak.

**8.** Provjerite da realna funkcija $f(x)$ definirana na segmentu $[a, b]$ zadovoljava uvjete Lagrangeova poučka, pa (s točnošću od $10^{-5}$) odredite barem jedan $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$ ako je:

**a)** $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$;
**b)** $f(x) = -x^2$, $a = -1$, $b = 0$;
**c)** $f(x) = x^2 - x$, $a = 1$, $b = 4$;
**d)** $f(x) = 4 \cdot x - x^2$, $a = -2$, $b = 8$;
**e)** $f(x) = x^2 + x + 1$, $a = -3$, $b = 1$;
**f)** $f(x) = 2 - x - x^2$, $a = -2$, $b = 1$;
**g)** $f(x) = x^3 + x$, $a = -1$, $b = 2$;
**h)** $f(x) = x - x^3$, $a = -2$, $b = 1$;
**i)** $f(x) = \sin(2 \cdot x)$, $a = -\pi$, $b = \dfrac{\pi}{2}$;
**j)** $f(x) = x + \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$;
**k)** $f(x) = \cos(3 \cdot x)$, $a = \dfrac{\pi}{2}$, $b = \pi$;
**l)** $f(x) = 2 \cdot x - \cos x$, $a = -\pi$, $b = \pi$;
**m)** $f(x) = \mathrm{tg}(4 \cdot x)$, $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{16}$;
**n)** $f(x) = x + \mathrm{tg}\, x$, $a = 0$, $b = 1$;
**o)** $f(x) = \mathrm{ctg}(5 \cdot x)$, $a = \dfrac{\pi}{20}$, $b = \dfrac{\pi}{10}$;
**p)** $f(x) = x - \mathrm{ctg}\, x$, $a = 1$, $b = 2$;
**q)** $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$;
**r)** $f(x) = e^{-2 \cdot x}$, $a = -1$, $b = 2$;
**s)** $f(x) = e^x + x + 1$, $a = 0$, $b = 1$;
**t)** $f(x) = 3 \cdot e^{x+1} - 6 \cdot x + 1$, $a = -1$, $b = 0$;
**u)** $f(x) = 2 \cdot e^{4-x} + x + 1$, $a = 0$, $b = 1$;
**v)** $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $b = 2$;
**w)** $f(x) = \ln x + x$, $a = 1$, $b = 2$;

# MATEMATIKA 1

18. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

**x)** $f(x) = \ln(2 \cdot x) - 2 \cdot x,\ a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{e}{2}$;

**y)** $f(x) = \sqrt{x}, a = 1, b = 4$;

**z)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, a = 1, b = 8$.

**9.** Neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ funkcija derivabilna na $\langle a, b\rangle$ i takva da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $f'(x) = 0$. Primjenom Lagrangeova poučka dokažite da tada postoji realan broj $c$ takav da je $f(x) = c$, za svaki $c \in [a, b]$. Izvedite odatle da je $f'(x) = 0$ (na $[a, b]$) ako i samo ako je $f$ konstantna funkcija (na $[a, b]$).

**10. a)** Neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ funkcija derivabilna na $\langle a, b\rangle$ i takva da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $f'(x) > 0$. Primjenom Lagrangeova poučka dokažite da je tada $f$ strogo rastuća funkcija na $\langle a, b\rangle$. Izvedite odatle da je $f$ strogo rastuća na $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

**b)** Neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ funkcija derivabilna na $\langle a, b\rangle$ i takva da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $f'(x) < 0$. Primjenom Lagrangeova poučka dokažite da je tada $f$ strogo padajuća funkcija na $\langle a, b\rangle$. Izvedite odatle da je $f$ strogo padajuća na $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $f'(x) <$ $< 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

**11.** Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle 1, 3\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = x^2 - 1$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (1, f(1))$ i $B = (3, f(3))$. Odredite sve takve vrijednosti $c$, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

**12.** Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle 0, 2\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = x^3$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (0, f(0))$ i $B = (2, f(2))$. Odredite sve takve vrijednosti $c$, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

**13.** Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle 1, 4\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (1, f(1))$ i $B = (4, f(4))$. Odredite sve takve vrijednosti $c$, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

**14.** Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle 8, 27\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = 6 \cdot \sqrt[3]{x}$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (8, f(8))$ i $B = (27, f(27))$. Odredite sve takve vrijednosti $c$, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

**ELEKTROTEHNIČKI ODJEL**

# MATEMATIKA 1

18. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

**15.** Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle \ln 2, \ln 3 \rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = e^x$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (\ln 2, f(\ln 2))$ i $B = (\ln 3, f(\ln 3))$. Odredite sve takve vrijednosti $c$, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

**16.** Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle e, e^2 \rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = \ln x$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (e, f(e))$ i $B = (e^2, f(e^2))$. Odredite sve takve vrijednosti $c$, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

**17.** Dokažite da postoji barem jedan $c \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{7 \cdot \pi}{2} \right\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = \sin x$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = \left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ i $B = \left(\frac{7 \cdot \pi}{2}, f\left(\frac{7 \cdot \pi}{2}\right)\right)$. Odredite sve takve vrijednosti $c$, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

**18.** Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle -\pi, 2 \cdot \pi \rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = \cos x$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (-\pi, f(-\pi))$ i $B = (2 \cdot \pi, f(2 \cdot \pi))$. Odredite sve takve vrijednosti $c$, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

**19.** Brzi vlak je prešao udaljenost od Zagreba do Vinkovaca prosječnom brzinom od 80 km/h. Pokažite da postoji barem jedan trenutak (te vožnje) u kojemu je stvarna brzina gibanja vlaka iznosila 80 km/h.

**20.** Provjerite da realne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ definirane na segmentu $[a, b]$ zadovoljavaju uvjete Cauchyjeva poučka, pa (s točnošću od $10^{-5}$) odredite barem jednu vrijednost $c \in \langle a, b \rangle$ takvu da vrijedi jednakost $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ ako je:

**a)** $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, $a = 0$, $b = 1$;
**b)** $f(x) = -x^2$, $g(x) = 2 \cdot x - 1$, $a = -1$, $b = 3$;
**c)** $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = 1 - x$, $a = -1$, $b = 1$;
**d)** $f(x) = 3 - 2 \cdot x - x^2$, $g(x) = 4 \cdot x + 2011$, $a = -4$, $b = 2$;
**e)** $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^2 + 1$, $a = 0$, $b = 1$;
**f)** $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^3 + 1$, $a = -1$, $b = 0$;
**g)** $f(x) = x^3 + x - 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$, $a = -1$, $b = 1$;
**h)** $f(x) = x^2 + 2 \cdot x - 3$, $g(x) = x^3 + x$, $a = 0$, $b = 2$;
**i)** $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$, $a = -1$, $b = 2$;
**j)** $f(x) = x^2 - x - 1$, $g(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $a = 0$, $b = 2$;

# MATEMATIKA 1

18. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

**k)** $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt[3]{x}$, $a = 0$, $b = 1$;
**l)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2},\ g(x)=x\cdot\sqrt{x}$, $a = 1$, $b = 64$;
**m)** $f(x)=x+\dfrac{1}{x},\ g(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 2$;
**n)** $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2},\ g(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$;
**o)** $f(x)=2011+\dfrac{1}{x^2},\ g(x)=2012-\dfrac{1}{x^2}$, $a = -2$, $b = -1$;
**p)** $f(x) = e^x$, $g(x) = 2 \cdot x - 1$, $a = 0$, $b = 1$;
**q)** $f(x) = 2 \cdot e^{-x}$, $g(x) = 1 - x$, $a = -1$, $b = 0$;
**r)** $f(x) = e^{1-x}$, $g(x) = e^{x+1}$, $a = 0$, $b = 1$;
**s)** $f(x) = \ln(2 \cdot x) - 1$, $g(x) = \ln(3 \cdot x) + 1$, $a = 1$, $b = 2$;
**t)** $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $a = 0$, $b=\dfrac{\pi}{2}$;
**u)** $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, $a=-\dfrac{\pi}{2}$, $b = 0$;
**v)** $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $a=\dfrac{\pi}{6}$, $b=\dfrac{\pi}{3}$;
**w)** $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $g(x) = \operatorname{tg} x$, $a=-\dfrac{\pi}{3}$, $b=-\dfrac{\pi}{6}$;
**x)** $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = x$, $a = -1$, $b = 1$;
**y)** $f(x) = \arccos x$, $g(x) = 2 \cdot x$, $a = -1$, $b = 1$;
**z)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = x + 1$, $a = 0$, $b = 1$.