TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

19 domaća zadaća: **EKSTREMI REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE**

1. Odredite (ako postoje) sve stacionarne točke zadane funkcije, pa za svaku od njih utvrdite je li lokalni ekstrem (i kojega tipa) ako je zadano:

a) $f(x) = x^2 - 4 \cdot x + 3$;
b) $f(x) = 6 - 5 \cdot x - x^2$;
c) $f(x) = 2011 \cdot x^3 + 2010$;
d) $f(x) = 2011 - 2010 \cdot x^3$;
e) $f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 14$;
f) $f(x) = 1 + 4 \cdot x - x^2 - 4 \cdot x^3$;
g) $f(x) = 3 \cdot x^4 - 8 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 13$;
h) $f(x) = 3 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 - 48 \cdot x^2 - 144 \cdot x + 200$;
i) $f(x) = 50 - 96 \cdot x + 36 \cdot x^2 + 12 \cdot x^3 - 3 \cdot x^4$;
j) $f(x) = 1 + 540 \cdot x - 234 \cdot x^2 + 44 \cdot x^3 - 3 \cdot x^4$;
k) $f(x) = 1 + e^{-x}$;
l) $f(x) = x \cdot e^x$;
m) $f(x) = (1 - x) \cdot e^{-x}$;
n) $f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^{2 \cdot x + 1}$;
o) $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^{1 - x}$;
p) $f(x) = x \cdot \ln x + 1$;
q) $f(x) = x^2 \cdot \ln x - 1$;
r) $f(x) = x^3 \cdot \ln x + 2$;
s) $f(x) = \ln^3 x + \ln^2 x$;
t) $f(x) = \sin x + \cos x$;
u) $f(x) = \cos(2 \cdot x) - 2 \cdot \sin x$;
v) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
w) $f(x) = x + \sin(2 \cdot x)$;
x) $f(x) = 2 \cdot x - \cos(2 \cdot x)$;
y) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$;
z) $f(x) = x - \operatorname{arctg}(x - 2)$.

2. Odredite (ako postoje) sve stacionarne točke zadane funkcije, pa za svaku od njih utvrdite je li lokalni ekstrem (i kojega tipa) ako je zadano:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$;

MATEMATIKA 1

19 domaća zadaća: **EKSTREMI REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE**

d) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

e) $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x^2-1}$;

f) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2-2}$;

g) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+4}$;

h) $f(x)=\dfrac{x^2-12}{x^3}$;

i) $f(x)=\dfrac{e^{2\cdot x+1}}{x}$;

j) $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x+1}$;

k) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-3}$

l) $f(x)=\dfrac{x^2\cdot e^x}{x^2+1}$;

m) $f(x)=\dfrac{x^2\cdot e^x}{x^2-2}$;

n) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;

o) $f(x)=2\cdot\dfrac{\ln x}{x^2}$;

p) $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$;

q) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$;

r) $f(x)=\dfrac{x}{\ln^2 x}$;

s) $f(x)=x+\ln(\sin x)$;

t) $f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}+\operatorname{arcctg} x$;

u) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$;

v) $f(x) = \dfrac{x \cdot \sqrt{x}}{x-2}$;

w) $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x-3}$;

x) $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$;

y) $f(x) = e^x \cdot \sin x$;

z) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{tg} x$.

3. Odredite globalne ekstreme funkcije f definirane na segmentu $[a, b]$ (odnosno, na cijeloj svojoj domeni ako je ta domena segment) ako je:

a) $f(x) = \arccos x$;

b) $f(x) = \arcsin(x-1)$;

c) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}$;

d) $f(x) = \operatorname{arcctg}\sqrt{25-x^2}$;

e) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$;

f) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$;

g) $f(x) = \sqrt{6-5 \cdot x - x^2}$;

h) $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$;

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}$;

j) $f(x) = x - \arcsin x$;

k) $f(x) = x + \arccos x$;

l) $f(x) = e^{\arcsin x}$;

m) $f(x) = e^{-\arccos x}$;

n) $f(x) = e^{\sqrt{x-x^2}}$;

o) $f(x) = x^2 - 2 \cdot x$, $a = -2$, $b = 3$;

p) $f(x) = x^2 + 4 \cdot x$, $a = -1$, $b = 2$;

q) $f(x) = x^3 - 4 \cdot x$, $a = -2$, $b = 2$;

r) $f(x) = x^3 + 4 \cdot x$, $a = -1$, $b = 1$;

s) $f(x) = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x$, $a = -3$, $b = 3$,

t) $f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 1$, $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$;

MATEMATIKA 1

19 domaća zadaća: **EKSTREMI REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE**

u) $f(x)=\frac{1}{4}\cdot x^4+x^3$, $a=-4$, $b=1$;

v) $f(x)=\frac{1}{4}\cdot x^4-\frac{1}{3}\cdot x^3$, $a=-1$, $b=2$;

w) $f(x)=\ln(\sin x)$, $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{5\cdot\pi}{6}$;

x) $f(x)=\ln(\cos x)$, $a=-\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{\pi}{3}$;

y) $f(x)=e^{\sin(2\cdot x)}$, $a=-\frac{3\cdot\pi}{4}$, $b=\frac{5\cdot\pi}{4}$;

z) $f(x)=e^{\cos(2\cdot x)}$, $a=-\frac{5\cdot\pi}{4}$, $b=\frac{3\cdot\pi}{4}$.

4. Odredite intervale monotonosti, te lokalne ekstreme (ako postoje) sljedećih funkcija:

a) $f(x)=x^2-2\cdot x-2$;
b) $f(x)=2-4\cdot x-x^2$;
c) $f(x)=x^3-12\cdot x$;
d) $f(x)=75\cdot x-x^3$;
e) $f(x)=4\cdot x^3-7\cdot x^2+4\cdot x-1$;
f) $f(x)=1-4\cdot x+5\cdot x^2-2\cdot x^3$;
g) $f(x)=x\cdot e^x$;
h) $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$;
i) $f(x)=x^3\cdot e^{1-x}$;
j) $f(x)=\frac{e^{x+1}}{x+1}$;
k) $f(x)=\frac{e^{2-x}}{x^2}$;
l) $f(x)=\frac{e^{3-x}}{x^2+1}$;
m) $f(x)=\frac{x\cdot e^x}{x-2}$;
n) $f(x)=x\cdot\ln x$;
o) $f(x)=x^2\cdot\ln x$;
p) $f(x)=x^3\cdot\ln x$;
q) $f(x)=-\frac{\ln x}{x}$

r) $f(x) = -\dfrac{\ln(-2 \cdot x)}{2 \cdot x}$;

s) $f(x) = -\dfrac{2 \cdot \ln x}{x^2}$;

t) $f(x) = -\dfrac{\ln x}{2 \cdot \sqrt{x}}$;

u) $f(x) = \dfrac{(-3) \cdot \ln(-x)}{\sqrt[3]{-x}}$;

v) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$;
w) $f(x) = \cos x - \sin x$;
x) $f(x) = \mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x$;
y) $f(x) = 2 \cdot x - \mathrm{arctg}\, x$;
z) $f(x) = x - \mathrm{arcctg}\, x$.

5. Primjenom derivacija dokažite valjanost sljedećih nejednakosti:

a) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, za svaki $x > 0$;

b) $x + \dfrac{1}{x} \leq -2$, za svaki $x < 0$;

c) $x^2 + x + 1 > 0$, za svaki $x \in$ **R;**
d) $(-2) \cdot x^2 - x - 1 < 0$, za svaki $x \in$ **R**;
e) $x^3 + x^2 + x + 1 \geq 0$, za svaki $x \geq -1$;
f) $x^4 + x^2 \geq 0$, za svaki $x \in$ **R**;
g) $x^4 - x^2 + 1 > 0$, za svaki $x \in$ **R**;
h) $e^x \geq x + 1$, za svaki $x \in$ **R**;
i) $e^x \geq x^2 + 1$, za svaki $x \geq 0$;
j) $2 \cdot e^x \geq x^2 + 2 \cdot x + 2$, za svaki $x \geq 0$;
k) $6 \cdot e^x \geq x^3 + 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 6$, za svaki $x \in$ **R;**

l) $e^x > 2 \cdot \sqrt{x}$, za svaki $x > 0$;

m) $e^x > \sqrt[3]{x}$, za svaki $x > 0$;

n) $\dfrac{1 + \ln x}{x} \leq 1$, za svaki $x \geq 1$;

o) $\dfrac{\ln x}{3 \cdot \sqrt{x}} \geq 0$, za svaki $x \geq 1$;

p) $x \geq \ln(x + 1)$, za svaki $x > -1$;
q) $2 \cdot \ln(x + 1) \geq 2 \cdot x - x^2$, za svaki $x \geq 0$;
r) $2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x \geq 6 \cdot \ln(x + 1)$, za svaki $x > -1$;

s) $\sin x \leq x$, za svaki $x > 0$;
t) $\sin x \geq x$, za svaki $x < 0$;
u) $6 \cdot \sin x \geq 6 \cdot x - x^3$;
v) $2 \cdot \cos x \geq 2 - x^2$, za svaki $x \in \mathbf{R}$;
w) $x^4 - 12 \cdot x^2 \geq 24 \cdot (\cos x - 1)$, za svaki $x \in \mathbf{R}$;
x) $2 \cdot \operatorname{ch} x \geq x^2 + 2$, za svaki $x \in \mathbf{R}$;
y) $6 \cdot \operatorname{sh} x \geq x^3 + 6 \cdot x$, za svaki $x \geq 0$;
z) $6 \cdot \arccos x - x^3 - 6 \cdot x > 3 \cdot (1 - \pi)$, za svaki $x \in [1, 1]$.

6. Odredite koeficijente $a, b \in \mathbf{R}$ kvadratne funkcije $f(x) = x^2 + a \cdot x + b$ tako da ta funkcija postiže najmanju vrijednost 2 za $x = 1$. Dobiveni rezultat interpretirajte geometrijski.

7. Odredite koeficijente $a, b \in \mathbf{R}$ kvadratne funkcije $f(x) = -x^2 + a \cdot x + b$ tako da ta funkcija postiže najveću vrijednost 1 za $x = 2$. Dobiveni rezultat interpretirajte geometrijski.

8. Odredite točku parabole $y = x^2$ koja je najbliža pravcu $y = 2 \cdot x + 4$.

9. Odredite točku krivulje $y = e^x$ koja je najbliža simetrali I. i III. kvadranta.

10. Odredite točku krivulje $y = \ln x$ koja je najbliža simetrali I. i III. kvadranta.

11. Kroz točku $A = (1, 2)$ treba povući pravac tako da taj pravac s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi zatvara trokut što manje površine. Odredite jednadžbu optimalnoga pravca i izračunajte pripadnu optimalnu vrijednost površine trokuta.

12. Kroz točku $A = (-2, -1)$ treba povući pravac tako da taj pravac s negativnim dijelovima koordinatnih osi zatvara trokut što manje površine. Odredite jednadžbu optimalnoga pravca i izračunajte pripadnu optimalnu vrijednost površine trokuta.

13. Zadane su točke $A = (0, 2)$ i $B = (4, 5)$. Na osi apscisa treba izabrati točku T tako da zbroj udaljenosti točke T od zadanih točaka bude što manji. Odredite optimalne koordinate točke T i izračunajte pripadni optimalan zbroj udaljenosti od zadanih točaka.

14. U trokut čija je osnovica 12 cm, a visina 10 cm treba upisati pravokutnik što veće površine. Odredite optimalne duljine stranica toga pravokutnika i izračunajte dobivenu optimalnu površinu.

15. a) Broj 2010 treba rastaviti na dva pribrojnika tako da njihov umnožak bude što veći. Nađite optimalan rastav i izračunajte dobiveni optimalan umnožak.

b) Za svaki $n \in \mathbf{N}$ broj $2 \cdot n$ treba rastaviti na dva pribrojnika tako da njihov umnožak bude što veći. Nađite optimalan rastav i izračunajte dobiveni optimalan umnožak.

MATEMATIKA 1

19 domaća zadaća: **EKSTREMI REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE**

16. Mrežom duljine 150 m treba ograditi pravokutno polje koje priliježe uz kuću tako da ograđena površina bude što veća. Odredite optimalne dimenzije toga polja i izračunajte dobivenu optimalnu površinu.

17. Površina pravokutne livade je 8 ha. Livada s jedne svoje strane graniči s rijekom. Odredite najmanju duljinu žice potrebne za ogradu preostalih triju strana livade. (*Napomena*: 1 ha = = 100 m^2).

18. Dva hodnika širine 2 m i 1.5 m sijeku se pod pravim kutom. Odredite najveću duljinu ljestava koje se horizontalno mogu prenijeti iz jednoga hodnika u drugi.

19. Slika je obješena na zid tako da je njezin gornji kraj za 32 cm, a donji za 18 cm iznad očiju promatrača. Na kojoj udaljenosti od zida treba stati promatrač tako da sliku može vidjeti pod najvećim kutom?

20. Od stakla treba napraviti čašu obujma 2 dl u obliku uspravnoga kružnog valjka otvorenoga s jedne strane tako da se za izradbu čaše utroši što manje stakla. Odredite optimalne dimenzije čaše i izračunajte pripadno optimalno oplošje. (Debljinu stijenki čaše zanemarujemo.)

21. Od lima treba napraviti otvorenu limenu posudu obujma 10 litara tako da se za izradbu posude potroši što manje lima. Odredite optimalne dimenzije posude.

22. Pločicama treba obložiti dno i stijene otvorenoga bazena obujma 48 m^3 s kvadratnim dnom tako da se potroši što manja količina materijala. Odredite optimalne dimenzije bazena i izračunajte dobivenu optimalnu površinu.

23. Presjek željezničkoga tunela ima oblik pravokutnika koji završava polukružnicom. Opseg presjeka iznosi 30 m. Koji od svih takvih presjeka ima najveću površinu? Odredite njegove optimalne dimenzije i izračunajte dobivenu optimalnu površinu.

24. Neka je S skup svih pravokutnih trokutova čiji je opseg 12 cm. Odredite onaj element toga skupa koji ima najveću površinu (u odnosu na sve ostale elemente) i izračunajte pripadnu optimalnu površinu.

25. U polukružnicu polumjera $2 \cdot \sqrt{3}$ cm treba upisati pravokutnik što veće površine. Odredite optimalne dimenzije pravokutnika i izračunajte dobivenu optimalnu površinu.

26. U pravokutan trokut čija je hipotenuza 10 cm, a jedan kut 60° treba upisati pravokutnik tako da jedna stranica pravokutnika pripada hipotenuzi trokuta i da njegova površina bude što veća. Odredite optimalne dimenzije pravokutnika i izračunajte dobivenu optimalnu površinu.

MATEMATIKA 1

19 domaća zadaća: **EKSTREMI REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE**

27. U skupu svih valjaka čiji je obujam $54 \cdot \pi$ cm^3 odredite dimenzije onoga elementa koji ima najmanje oplošje i izračunajte pripadno optimalno oplošje.

28. U kuglu polumjera $\sqrt{3}$ cm treba upisati valjak tako da površina plašta valjka bude što veća. Odredite optimalne dimenzije valjka i izračunajte dobivenu optimalnu površinu njegova plašta.

29. U kuglu polumjera 3 cm treba upisati uspravan kružni stožac tako da njegov obujam bude što veći. Odredite optimalne dimenzije stošca i izračunajte dobiveni optimalan obujam.

30. U kuglu polumjera $2 \cdot \sqrt{2}$ cm treba upisati uspravan kružni stožac tako da površina njegova plašta bude što veća. Odredite optimalne dimenzije stošca i izračunajte dobivenu optimalnu površinu njegova plašta.