TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Matematički alati u elektrotehnici** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**Vježba 12.** Laplaceovi transformati. Rješavanje Cauchyjevih problema u MATLAB-u.

Zadatak 1.

Odredite Laplaceove transformate sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$ (varijabla u rješenju treba biti p);

b) $g(t) = t^3 \cdot \cos(2 \cdot t)$ (varijabla u rješenju treba biti s).

Zadatak 2.

Odredite Laplaceove transformate sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ za } x \in [0,5\rangle \\ e^{5-x}, \text{ za } x \geq 5. \end{cases}$ (varijabla u rješenju treba biti p);

b) $g(t) = \begin{cases} 2, \text{ za } t \geq 2, \\ t, \text{ za } t \in [0,2\rangle. \end{cases}$ (varijabla u rješenju treba biti s).

Zadatak 3.

Odredite originale (inverze) sljedećih Laplaceovih transformata:

a) $F(p) = \dfrac{4 \cdot (4 - 3 \cdot p^2)}{(p^2 + 4)^3}$ (varijabla u rješenju treba biti t);

b) $G(s) = \dfrac{8 \cdot (3 \cdot s^4 - 6 \cdot s^2 + 8)}{(s \cdot (s-2) \cdot (s+2))^3}$ (varijabla u rješenju treba biti x).

Zadatak 4.

Riješite sljedeće Cauchyjeve zadaće:

a) $\begin{cases} y' + (\text{arctg } x) \cdot y = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} t^4 \cdot y' + t^2 \cdot y = 1, \\ y(1) = 5. \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' + y = (u \cdot y)^2, \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} y'' + 2 \cdot y' + y = 0, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$ (Pretpostavite da je $y = y(t)$.)

e) $\begin{cases} y'' + y = \sin w, \\ y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$

f) $\begin{cases} y'' + 4 \cdot y = \cos(2 \cdot v), \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

Zadatak 5.

Odredite eksplicitnu jednadžbu krivulje koja prolazi ishodištem i ima svojstvo da je koeficijent smjera bilo koje njezine tangente jednak kvadratu zbroja koordinata dirališta te tangente. Nacrtajte tu krivulju.

Zadatak 6.

Vruću kavu temperature $95^{\circ}\mathrm{C}$ ulili smo u šalicu smještenu u sobi čija je temperatura $22^{\circ}\mathrm{C}$, pa se zbog toga kava za jednu minutu ohladila na $90^{\circ}\mathrm{C}$. Za koliko će se minuta (računajući od trenutka u kojemu je temperatura kave bila $95^{\circ}\mathrm{C}$) kava ohladiti na $65^{\circ}\mathrm{C}$? (Zaokružite rezultat na jednu decimalu.)

Napomena: Pretpostavite da je brzina hlađenja kave proporcionalna razlici temperature kave i temperature sobe, te da je temperatura sobe konstantna.

Rezultati zadataka:

1. **a)** $F(p)=\dfrac{2\cdot e^{2}}{(p+1)^{3}}$; **b)** $G(s)=\dfrac{6\cdot\left(s^{4}-24\cdot s^{2}+16\right)}{\left(s^{2}+4\right)^{4}}$.

2. **a)** $F(s)=\dfrac{s\cdot e^{s-5}-2\cdot e^{-5\cdot s}+2}{2\cdot s}$; **b)** $G(p)=\dfrac{1-e^{-2\cdot p}}{p^{2}}$.

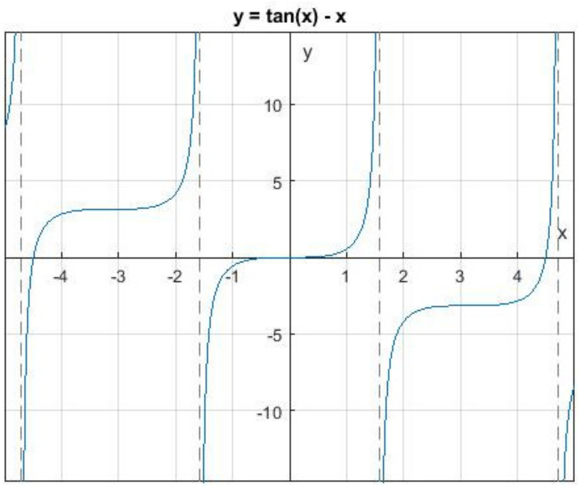
3. **a)** $f(t)=-t^{2}\cdot\sin(2\cdot t)$; **b)** $g(x)=(x\cdot\operatorname{sh}x)^{2}$.

4. **a)** $y=\sqrt{1+x^{2}}\cdot e^{-x\cdot\operatorname{arctg}x}$; **b)** $y=\dfrac{1}{t^{2}}+\dfrac{2}{t}+2=\dfrac{2\cdot t^{2}+2\cdot t+1}{t^{2}}$; **c)** $y=\dfrac{1}{u^{2}+2\cdot u+2}$;

d) $y=(2\cdot t+1)\cdot e^{-t}$; **e)** $y=-\dfrac{1}{2}\cdot w\cdot\cos w$; **f)** $y=\dfrac{1}{4}\cdot v\cdot\sin(2\cdot v)$.

5. Krivulja i njezina jednadžba prikazane su na slici 1.

6. 7.5.



Slika 1.

Komentari i objašnjenja programskih kodova

Ova vježba je posljednja vježba iz predmeta *Matematički alati u elektrotehnici*. U njoj ćemo upoznati tri nove ugrađene funkcije u MATLAB-u. To su: `laplace` namijenjena određivanju Laplaceovih transformata, `ilaplace` namijenjena određivanju originala (inverza) Laplaceovih transformata i `dsolve` namijenjena rješavanju običnih diferencijalnih jednadžbi, odnosno Cauchyjevih problema. Prve dvije funkcije su vrlo jednostavne za korištenje jer imaju samo dvije ulazne varijable. Posljednja funkcija je malo složenija, posebno kad se primjenjuje na rješavanje Cauchyjevih problema, ali ni s njom nećemo imati (pre)velikih problema.

Svakako se preporučuje da prije rješavanja zadataka ponovite odgovarajuće gradivo iz *Matematike* 2 kako biste znali na što se točno odnosi pojedini zadatak, odnosno što je u zadatku zadano, a što se traži. Učinite li to, bit će vam lakše rješavati zadatke.

z1.m

U ovom zadatku upoznajemo ugrađenu funkciju `laplace`. Ona određuje Laplaceov transformat realne funkcije. Ovdje se nećemo baviti teorijom i razmatrati koje realne funkcije imaju Laplaceove transformate i uz koje uvjete. O tome smo nešto više govorili u *Matematici* 2. Pretpostavit ćemo da obje funkcije imaju svoje Laplaceove transformate, odnosno da su podzadaci dobro zadani.

Ugrađena funkcija `laplace` ima točno dvije ulazne varijable. Prva ulazna varijabla je pravilo ili oznaka funkcije čiji Laplaceov transformat želimo odrediti. U pravilu će to biti oznaka funkcije jer ćemo pravilo zadati u neposredno prethodnom retku. Druga ulazna varijabla je varijabla koja će biti korištena u Laplaceovu transformatu. Nju bismo trebali znati unaprijed. Ta se varijabla obično označava s p, s i sl.

Vrlo je korisno prije početka rješavanja ovoga zadatka predvidjeti rezultat. Svaki Laplaceov transformat elementarne funkcije (ili „kombinacije“ (zbroja, umnoška, količnika i sl.) elementarnih funkcija) je *prava racionalna funkcija*. To **ne znači** da je Laplaceov transformat **svake** realne funkcije (koja ima Laplaceov transformat) prava racionalna funkcija. Naime, realna funkcija može biti zadana i po dijelovima, kao što ćemo vidjeti u zadatku 2. U tom slučaju njezin Laplaceov transformat *nije* prava racionalna funkcija.

Struktura našega koda je vrlo jednostavna. U prvom retku popišemo sve simboličke varijable (u obama podzadacima). One su (abecednim slijedom) s, t i x. U drugom i trećem retku zadajemo pravila funkcija f i g. U četvrtom i petom retku određujemo Laplaceove transformate zadanih funkcija, pri čemu je varijabla u Laplaceovu transformatu funkcije f jednaka p, a varijabla u Laplaceovu transformatu funkcije g jednaka s. Pravila dobivenih pravih racionalnih funkcija pojednostavljujemo primjenom ugrađene funkcije `simplify`, pa ih pregledno ispisujemo u posljednjemu retku koda.

Pitanje za razmišljanje: Kako biste tražene Laplaceove transformate odrediti *bez primjene* ugrađene funkcije `laplace`? Preinačite programski kod na odgovarajući način tako da ispisuje ispravne rezultate. (*Uputa*: Primijenite ugrađenu funkciju `int`. Ne zaboravite pretpostaviti da varijabla transformata mora biti strogo pozitivna, pa trebate primijeniti i ugrađenu funkciju `assume`.)

z2.m

U ovom zadatku određujemo Laplaceove transformate *po dijelovima* definiranih funkcija. Otprije znamo da se funkcija definirana po dijelovima u MATLAB-u može zadati koristeći ugrađenu funkciju `piecewise`. Međutim, ugrađena funkcija laplace kao svoj argument ne može imati izlaznu varijablu funkcije `piecewise`. Formalno, u neki redak koda možemo upisati `laplace(piecewise(…))`, ali će MATLAB u tom slučaju samo ispisati upisani redak bez izvršavanja funkcija `laplace` i `piecewise`.

Kako onda postupiti u ovakvim slučajevima? Jednostavno, treba primijeniti definiciju Laplaceova transformata i ugrađenu funkciju `int`. No, prije toga treba pretpostaviti da je varijabla Laplaceova transformata strogo pozitivna jer će ta pretpostavka biti potrebna prilikom određivanja nepravoga integrala. Kad koristimo funkciju `laplace`, ta je pretpostavka već sadržana u samoj ugrađenoj funkciji, pa je ne moramo posebno navoditi.

U **a)** podzadatku je traženi Laplaceov transformat prema definiciji jednak:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(x)\cdot e^{-p\cdot x}\cdot \mathrm{d}x=\int_0^{5} f(x)\cdot e^{-p\cdot x}\cdot \mathrm{d}x+\int_5^{+\infty} f(x)\cdot e^{-p\cdot x}\cdot \mathrm{d}x=\int_0^{5} 1\cdot e^{-p\cdot x}\cdot \mathrm{d}x+\int_5^{+\infty} e^{5-x}\cdot e^{-p\cdot x}\cdot \mathrm{d}x.$$

Time zapravo dobivamo ideju za rješavanje zadatka. Dakle, traženi transformat bit će jednak zbroju jednoga određenoga i jednoga nepravoga integrala. *Oba* ta integrala bit će funkcije varijable p, ali konačan rezultat *neće biti prava racionalna funkcija* u varijabli p (kao što su to bili slučajevi u zadatku 1.). Dakako da ćemo pojednostavniti dobiveni simbolički izraz što više možemo, ali ni pojednostavljivanje nam neće dati pravu racionalnu funkciju (nego zbroj prave racionalne funkcije i eksponencijalne funkcije).

Pogledajmo strukturu koda. U prvom retku popisujemo sve četiri potrebne simboličke varijable. U drugom retku zadajemo pretpostavke na varijable p i s. Podsjetimo, one će biti varijable Laplaceovih transformata, pa nužno moraju biti strogo pozitivne. U trećem retku, prema gornjoj jednakosti, određujemo Laplaceov transformat funkcije f. Da bi se dobio relativno jednostavan zapis rezultata, funkciju `simplify` treba primijeniti 10 puta. Ne morate se mučiti tražeći odgovor na pitanje: „Kako mogu *unaprijed* znati da ću toliko puta trebati primijeniti ovu funkciju?“ jer taj odgovor ne postoji. Upravo zato i pišemo rješenja zadataka u *m*-datotekama tako da naknadno lako možemo dodati sve što budemo smatrali potrebnim.

U **b)** podzadatku traženi je Laplaceov transformat jednak:

$$G(s)=\int_0^{+\infty} g(t)\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t=\int_0^{2} g(t)\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t+\int_2^{+\infty} g(t)\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t=\int_0^{2} t\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t+\int_2^{+\infty} 2\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t.$$

Iz ove jednakosti izravno proizlazi četvrti redak koda. Ponovno primjenjujemo funkcije `int` i `simplify`, a dodatno koristimo i funkciju `collect` koja će reducirati dobiveni simbolički izraz tako da bude prikazan u obliku jednoga razlomka.

Analogno kao i u rješenju prvoga zadatka, oba dobivena Laplaceova transformata pregledno ispisujemo u petom retku koda koristeći funkciju `fprintf` i njezine mogućnosti.

Pitanje za razmišljanje: Utvrdite što bi se dogodilo ako bismo izostavili *obje* pretpostavke navedene u drugom retku koda. Izvršite tako dobiveni kod i objasnite dobivene rezultate.

z3.m

U ovom zadatku promatramo obrnuti postupak u odnosu na prethodna dva zadatka. Zadane su nam dvije prave racionalne funkcije koje predstavljaju Laplaceove transformate određenih realnih funkcija, pa trebamo odrediti njihove originale (tj. funkcije čiji su Laplaceovi transformati zadane funkcije). Čim su Laplaceovi transformati prave racionalne funkcije, znamo da su pripadni originali ili neke elementarne funkcije ili „kombinacije“ elementarnih funkcija, tj. ne radi se o funkcijama koje su zadane po dijelovima.

Analitički je proces određivanja originala Laplaceovih transformata dulji i teži od određivanja samih transformata. (Analogna „priča“ vrijedi i za deriviranje i integriranje – deriviranje je najčešće bitno lakše od integriranja.) Međutim, u MATLAB-u su ti procesi i jednako dugi i jednako teški – dakle, vrlo kratki i jednostavni. Originale Laplaceovih transformata određuje ugrađena funkcija `ilaplace`. Ona ima sintaksu potpuno analognu sintaksi funkcije `laplace`. Njezina prva ulazna varijabla je pravilo ili oznaka funkcije čiji original tražimo, dok je druga ulazna varijabla te funkcije oznaka varijable originala.

Pogledajmo sada strukturu našega koda. U prvom retku abecednim slijedom navodimo sve varijable koje ćemo koristiti u kodu. U taj popis ulaze i varijable originala koje ćemo odrediti. U drugom i trećem retku zadajemo pravila Laplaceovih transformata iz zadatka. (Pripazite na okrugle zagrade potrebne u nazivniku svake funkcije.)

U četvrtom retku, koristeći ugrađene funkcije `ilaplace` i `simplify`, određujemo original funkcije F. Njegova varijabla je t, a oznaka f. (Pripazite: na početku retka **ne smijete** napisati $f(t)$, nego samo f.) Za pojednostavljenje dobivenoga pravila funkcije f bit će dovoljna jedna primjena funkcije `simplify`.

U petomu retku, koristeći iste ugrađene funkcije, određujemo original funkcije G. Njegova varijabla je x, a oznaka g. Međutim, za maksimalno pojednostavljenje dobivenoga pravila funkcije g čak 11 puta ćemo morati primijeniti funkciju `simplify`. Neka vas zbog toga ne hvata užas: nećete morati jedanaest puta uzastopce pisati tu ugrađenu funkciju, nego – kao njezine dodatne ulazne varijable – trebate napisati rezerviranu riječ `'Step'` (pod jednostrukim navodnicima) i broj 11. Tako ćete dobiti maksimalno pojednostavljeno pravilo funkcije g.

U šestom retku koda ispisujemo pravila originala f i g koristeći ugrađenu funkciju `fprintf` i njezine opcije. Time je zadatak potpuno riješen.

Pitanje za razmišljanje: Opišite kojom biste metodom analitički odredili tražene originale. Objasnite sve svoje tvrdnje.

z4a.m – z4f.m

U svim podzadacima zadatka 4. radi se o rješavanju Cauchyjevih problema. Oni se suštinski razlikuju prema tipu obične diferencijalne jednadžbe koja se u njima pojavljuje. Zbog toga su i njihova analitički postupci rješavanja posve različiti. Međutim, postupak (algoritam) rješavanja u MATLAB-u zapravo **ne ovisi** o Cauchyjevu problemu kojega rješavamo. U svakom pojedinom podzadatku moramo napraviti „pripremu“ (deklarirati sve potrebne varijable i funkcije), pa riješiti zadani problem koristeći ugrađenu funkciju `dsolve`.

Prije negoli opišemo kako se primjenjuje funkcija `dsolve`, opišimo opću „pripremu“ za rješavanje. U prvom retku svakoga koda moramo deklarirati nezavisnu varijablu, ali i funkciju koja je nepoznanica u običnoj diferencijalnoj jednadžbi. Kako znamo iz *Matematike* 2, obične diferencijalne jednadžbe su jednadžbe (tko bi rekao?) u kojima je nepoznanica *realna funkcija jedne realne varijable*, a ne neki realan ili kompleksan broj. Zbog toga prilikom deklariranja svih varijabli koje ćemo koristiti moramo deklarirati i funkciju-nepoznanicu. Kako to činimo? Jednostavno, ako je nezavisna varijabla označena s x, a nepoznanica s y, onda pišemo:

```
syms x y(x)
```

Time ćemo MATLAB-u reći da su početne deklarirane simboličke varijable x i y koja je funkcija varijable x. Ovdje vidite pod kojim uvjetima i kako smijemo pisati izraz oblika $y(x)$. U prva tri zadatka to nismo mogli/trebali učiniti, ali ovdje je to potrebno.

„Priprema“ još obuhvaća definiranje *oznaka* svih derivacija nepoznanice y koje će se pojaviti u zadanoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi i/ili početnim uvjetima. Zbog toga je u svakom podzadatku potrebno dobro proučiti i običnu diferencijalnu jednadžbu i početne uvjete tako da utvrdimo koje će nam derivacije nepoznanice biti potrebne. Otprije znamo da derivacije ne možemo označavati s y', y'' itd. kao što to radimo u *Matematici* 2. (Zašto?) Zbog toga prilikom definiranja oznaka derivacija moramo koristiti funkciju `diff`. Konkretno, želimo li definirati prvu derivaciju funkcije y po varijabli x, zapisat ćemo:

```
Dy=diff(y,x,1)
```

Umjesto `Dy` možemo zapisati bilo koju drugu oznaku. Međutim, primjereno je da ta oznaka bude sugestivna tako da nam bude lako zapamtiti što ona stvarno označava. Na potpuno analogan način, drugu derivaciju funkcije y po varijabli x možemo definirati s:

```
D2y=diff(y,x,2)
```

Budući da smo u prvom retku koda deklarirali $y(x)$ kao funkciju varijable x, MATLAB neće imati nikakvih „prigovora“ na gore definirane funkcije.

Deklariranjem nezavisne varijable i nepoznanice, te definiranjem svih potrebnih derivacija te nepoznanice završena je „priprema“ za rješavanje Cauchyjeva problema. Predstoji obaviti najvažniji dio posla, a to je riješiti dotični problem. U tu svrhu, kako smo rekli, koristimo funkciju `dsolve`.

Ta funkcija, kao svoje ulazne varijable, ima običnu diferencijalnu jednadžbu, te sve početne uvjete. **Ne smijete** mijenjati redoslijed tih varijabli. Kako zadati koju ulaznu varijablu?

Običnu diferencijalnu jednadžbu unosimo **bez znakova navodnika, apostrofa i sl**. Umjesto derivacija nepoznanice koje se u njoj pojavljuju pišemo `Dy`, `D2y` i dr., ovisno o kojoj se derivaciji radi. Sve ostale funkcije zadajemo kao i dosad. Operatore zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja zadajemo kao i dosad (nigdje se ne pojavljuju operacije definirane po točkama). Znak jednakosti između lijeve i desne strane zadajemo kao i kod algebarskih jednadžbi dvostrukim navođenjem znaka =, tj. kao ==. Kad završimo s unosom obične diferencijalne jednadžbe, stavljamo zarez i prelazimo na zadavanje početnih uvjeta.

Kako zadati početne uvjete? S obzirom da smo nepoznanicu u prvom retku koda zadali u obliku $y(x)$, početni uvjet također zadajemo u istom obliku. Npr. ako piše $y(0)=0$, pisat ćemo: `y(0)==0` i sl. U tom slučaju samo treba pripaziti da umjesto jednostrukoga znaka jednakosti pišemo ==. Međutim, ako se početni uvjet odnosi na vrijednost prve, druge, ..., n-te derivacije nepoznanice, onda ga **ne smijemo** zadati u obliku $y'(...)=...$ i sl., nego moramo pisati `Dy(…)==(…)`, tj. ponovno koristiti ranije definirane funkcije `Dy`, `D2y` i dr. Zapamtite: ni u običnoj diferencijalnoj jednadžbi, ni u početnim uvjetima **ne smije** se pojaviti apostrof ' kao oznaka za derivaciju. Smiju se pojaviti samo „obične“ funkcije (bez apostrofa i sličnih „ukrasa“).

I to je zapravo sve što nam treba za rješavanje **svakoga** od šest navedenih podzadataka. Kad koristeći funkciju `dsolve` riješimo Cauchyjev problem, svakako treba pojednostavniti dobiveni izraz što je više moguće korištenjem dobro nam poznate funkcije `simplify`.

Slijedom svega izloženoga, u kodu **z4a.m** nema ničega posebnoga što bi trebalo izdvojiti. Postupili smo u skladu s izloženom strategijom. U prvom retku koda deklarirali smo varijablu x i nepoznanicu $y(x)$. U drugom retku koda definirali smo simboličku funkciju `Dy` (pazite: **pogrešno je** `Dy(x)`!) kao prvu derivaciju nepoznanice y. U trećem retku koda riješili smo zadani Cauchyjev problem koristeći funkcije `dsolve` i `simplify`. Maksimalno pojednostavljen izraz dobije se odmah nakon jednostruke primjene funkcije `simplify`.

U kodu **z4b.m** jedino na što treba pripaziti je oznaka nezavisne varijable nepoznanice. Ta varijabla je t, a ne x kao u prethodnom zadatku. Svi ostali dijelovi koda su potpuno standardni. Analogna tvrdnja vrijedi i za kod **z4c.m** u kojemu je nezavisna varijabla nepoznanice označena s u.

U prvom retku koda **z4d.m** uobičajeno deklariramo varijablu nepoznanice i samu nepoznanicu. U pripadnom Cauchyjevom problemu pojavljuje se homogena linearna obična diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima, a iz njezina oblika *ne možemo* odrediti varijablu nepoznanice. Zbog toga je u postavci zadatka navedeno da je y funkcija varijable t, pa u prvom retku koda deklariramo t i $y(t)$ kao simboličke varijable. U drugom retku koda standardno definiramo simboličku funkciju `Dy` kao prvu derivaciju nepoznanice y, a u trećem retku koda definiramo simboličku funkciju `D2y` kao drugu derivaciju nepoznanice y. U četvrtom retku koda rješavamo zadani Cauchyjev problem. Pritom treba pripaziti: „na papiru“ je potpuno korektno napisati $y(0) = y'(0) = 1$ zbog tranzitivnosti relacije „biti jednak“, ali u MATLAB-u to **ne smijemo** učiniti. Svaku jednakost, odnosno svaki početni uvjet moramo zasebno zadati. Dakle, **ne smijemo** napisati `y(0)==Dy(0)==1` jer će MATLAB javiti pogrešku „ne priznajući“ tranzitivnost relacije „biti jednak“. Zbog toga moramo napisati `y(0)==1, Dy(0)==1`. Potpuno analogna tvrdnja vrijedi i za početne uvjete u kodu **z4e.m**. (U tom kodu nije potrebno zadavati prvu derivaciju nepoznanice y – zbog toga uvijek dobro pročitajte zadatak i utvrdite što sve treba zadati u „pripremi“.)

Za kod **z4f.m** treba napomenuti da je potrebno definirati i prvu i drugu derivaciju nepoznanice y iako se u običnoj diferencijalnoj jednadžbi pojavljuje samo druga derivacija te nepoznanice. Međutim, u drugom početnom uvjetu pojavljuje se $y'(0)$, pa je samo zbog toga uvjeta potrebno definirati i funkciju `Dy`.

Ovime smo zapravo završili pregled/komentiranje svih šest programskih kodova koji predstavljaju rješenja podzadataka 4. zadatka. Kako i sami možete vidjeti, u njima nema ništa posebno teškoga, ali treba pripaziti da se:

- deklariraju sve potrebne simboličke varijable (nepoznanica i njezina varijabla – redoslijed deklariranja pritom **nije** bitan!);
- pomoću funkcije `diff` definiraju sve potrebne derivacije nepoznanice kao zasebne simboličke funkcije koje će se onda koristiti u zapisu obične diferencijalne jednadžbe i početnih uvjeta;
- između lijeve i desne strane obične diferencijalne jednadžbe napiše ==, a ne = kao „na papiru“;
- svaki početni uvjet zadaje **zasebno**, bez obzira na to što njegova desna strana može biti jednaka desnoj strani nekoga od ostalih početnih uvjeta;
- dobiveno rješenje Cauchyjeva problema **obavezno** pojednostavni što je više moguće.

Ne zvuči teško, ne izgleda teško, nije teško, ali na kolokvijima i praktičnim ispitima ipak bude teško jer se u pravilu zaboravi barem jedan od gornjih pet zahtjeva. Zbog toga treba riješiti što više ovakvih zadataka i time steći potrebnu rutinu.

Pitanje za razmišljanje: Klasificirajte svaku od šest običnih diferencijalnih jednadžbi koje se pojavljuju u podzadacima u odgovarajuću „kategoriju“ (tip jednadžbe). Kako biste ove probleme riješili analitički? Pokušajte to učiniti za vježbu i provjerite dobiju li se ista (konačna) rješenja.

z5.m

Najprije objasnimo kako se dobije Cauchyjev problem kojega treba riješiti pomoću MATLAB-a. Pretpostavimo da je jednadžba krivulje zadana u obliku $y = y(x)$. Želimo odrediti pravilo funkcije y. Ovdje treba istaknuti da veza varijabli x i y može biti i implicitna (pogotovo ako ravninska krivulja, kao npr. bilo koja kružnica, *nije* graf nijedne realne funkcije jedne realne varijable). U tom je slučaju na rješavanje Cauchyjeva problema nemoguće primijeniti funkciju `dsolve`. (Prisjetite se: druga ulazna varijabla te funkcije je nezavisna varijabla nepoznate funkcije, što pretpostavlja da je veza među varijablama x i y iskazana eksplicitno, a ne implicitno.) Da ne bismo morali razmišljati hoćemo li uopće moći riješiti zadatak koristeći MATLAB, u zadatku je navedeno da se traži eksplicitna jednadžba ravninske krivulje, što povlači da je ta krivulja graf neke realne funkcije jedne realne varijable.

U zadatku se navodi da ravninska krivulja prolazi ishodištem. Ishodište ima koordinate (0, 0). Što to znači za funkciju y? To znači da vrijedi jednakost $y(0) = 0$. Upravo ta jednakost bit će nam jedan početni uvjet u Cauchyjevu problemu.

U zadatku se dalje navodi da je koeficijent smjera *bilo koje* tangente povučene na zadanu krivulju jednak kvadratu zbroja koordinata pripadnoga dirališta. Kako modelirati ovaj podatak? Neka je $D = (x_D, y_D)$ bilo koja točka krivulje u kojoj funkcija y ima derivaciju. (Za točke u kojima funkcija nema derivaciju, ako takve postoje, zadatak nema smisla.) Koeficijent smjera tangente povučene na krivulju u točki D jednak je prvoj derivaciji funkcije y u točki $x = x_D$:

$$k_t = y'(x_D).$$

Prema zahtjevu zadatka, *taj isti* koeficijent jednak je kvadratu zbroja koordinata pripadnoga dirališta, tj. kvadratu zbroja koordinata točke D:

$$k_t = (x_D + y_D)^2.$$

Promotrimo posljednje dvije napisane jednakosti. Njihove lijeve strane su međusobno jednake, pa – zbog tranzitivnosti relacije „biti jednak“ – takve moraju biti i desne strane. To znači da smijemo izjednačiti izraze na desnim stranama tih jednakosti. Učinimo to, pa dobijemo:

$$y'(x_D) = (x_D + y_D)^2.$$

Ova jednakost mora vrijediti za *bilo koju* točku D koja pripada traženoj krivulji. Zbog toga izbrišemo indekse na desnoj strani jednakosti, te okruglu zagradu na lijevoj strani jednakosti. Dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu u njezinu uobičajenu obliku:

$$y' = (x+y)^2.$$

Tako smo dobili Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y' = (x+y)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Sada možemo prijeći na komentiranje programskoga koda. Početak je standardan: zadajemo nezavisnu varijablu (odabrali smo oznaku x, ali smo je mogli označiti i nekim drugim slovom (npr. t)) i nepoznanicu $y(x)$. U drugom retku koda definiramo simboličku funkciju `Dy` kao prvu derivaciju nepoznanice y. U trećem retku zadajemo i rješavamo gornji Cauchyjev problem. Koristimo funkcije `dsolve` i `simplify` kako bismo što više pojednostavnili pravilo funkcije y. Time smo riješili prvi dio zadatka.

Drugi dio zadatka (crtanje krivulje) je uglavnom standardan. Krivulju crtamo koristeći funkciju `fplot` jer smo njezinu jednadžbu dobili u eksplicitnom obliku. Analogno kao u vježbi 5., postavljamo pravokutni koordinatni sustav tako da se koordinatne osi sijeku u ishodištu, prikazujemo koordinatnu mrežu i označavamo koordinatne osi odgovarajućim oznakama.

Ovdje vrijedi izdvojiti kako iznad dobivena grafa možemo ispisati njegovu jednadžbu, a da pritom unaprijed ne znamo tu jednadžbu. U tu će nam svrhu poslužiti ugrađene funkcije `string` i `strcat`. Zašto ih uopće moramo koristiti? Funkcija `title` koja ispisuje naslov slike kao svoju ulaznu varijablu ima znakovni niz (*string*), a ne simboličku funkciju. Pokušamo li jednadžbu krivulje ispisati unoseći `title(y)`, MATLAB će javiti pogrešku. Zbog toga najprije koristeći funkciju `string` pretvaramo funkciju y (simboličku varijablu) u niz znakova (označen s $y1$). Da bismo dobili jednadžbu krivulje u uobičajenom obliku, ispred toga niza znakova treba ispisati $y =$. Zbog toga definiramo još jedan niz znakova `'y  ='`(označen s $y2$). Ispred drugoga apostrofa možemo staviti koliko god bjelina želimo (svakako konačno mnogo), no, MATLAB će sve te bjeline uspješno zanemariti. Preostaje spojiti (konkatenirati) nizove znakova $y2$ i $y1$ (u navedenom poretku) u jedan niz znakova unutar kojega će biti dodana još jedna bjelina između završnoga znaka niza $y2$ i početnoga znaka niza $y1$. To je učinjeno u posljednjemu retku koda korištenjem funkcije `strcat`. Uočite kako je dodana spomenuta bjelina: ona je stavljena pod znakove jednostrukih navodnika, pa je cijela ta struktura stavljena unutar vitičastih zagrada. Cilj je postignut: izvršenjem cijeloga koda uvjerit ćemo se da je iznad grafa korektno ispisana jednadžba krivulje.

Pitanje za razmišljanje: Kako biste dobiveni Cauchyjev problem riješili analitički? Pokušajte to učiniti i tako provjeriti dobiveno rješenje. (*Uputa*: Zamijenite $u := x + y$, gdje je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija varijable *x*. Deriviranjem ove jednakosti dobijemo $y' = u' - 1$, pa uvrštavanjem u polaznu običnu diferencijalnu jednadžbu dobijemo $u' - 1 = u^2$. To je obična diferencijalna jednadžba sa razdvojenim varijablama.)

z6.m

Najprije objasnimo kako se dobije Cauchyjev problem. Pretpostavimo da je $T = T(t)$ temperatura kave u trenutku *t* (iskazanom u minutama). Pretpostavka zadatka je da je brzina hlađenja kave proporcionalna razlici temperature kave i temperature sobe. Kako zapisati tu pretpostavku? Brzina hlađenja kave je prva derivacija funkcije *T* po varijabli *t*, tj. $T'(t)$. Proporcionalnost povlači da postoji konstanta $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takva da je $T'(t)$ *u svakom trenutku t* jednako umnošku konstante *k* i razlike temperature kave *u tom trenutku* i temperature sobe (koja je konstantna, prema jednoj od pretpostavki iz zadatka). Dakle, možemo pisati:

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - 22),$$

ili, u uobičajenom obliku bez navođenja nezavisne varijable u okrugloj zagradi:

$$T' = k \cdot (T - 22).$$

Nadalje, u zadatku se navodi da na početku, a to znači u trenutku $t = 0$, temperatura kave iznosi $95^\circ\mathrm{C}$. Dakle, vrijedi jednakost:

$$T(0) = 95.$$

Tako smo dobili sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} T' = k \cdot (T - 22), \\ T(0) = 95. \end{cases}$$

Ovdje zastanimo na trenutak. Možemo li rješavati Cauchyjev problem u kojemu se zapravo pojavljuju dvije nepoznanice: funkcija *T* i konstanta *k*? Odgovor na to pitanje je, naravno: možemo jer je *k* konstanta, a ne varijabla. Može li o učiniti i MATLAB? Može. Pritom ponovno dolazi do izražaja deklariranje nepoznanice u prvom retku koda.

U tom retku ćemo kao simboličku varijablu deklarirati funkciju $T(t)$. (Sjetite se da MATLAB razlikuje velika i mala slova, pa je ovakvo deklariranje korektno.) Prilikom primjene funkcije `dsolve` MATLAB će shvatiti da je T funkcija varijable t, pa će varijablu k shvatiti kao konstantu i riješiti zadani problem u skladu s tim (dakle, praktički ni po čemu ne razlikujući k od npr. „konkretnoga“ realnoga broja 22). To znači da će rješenje Cauchyjeva problema biti funkcija varijable t u kojoj će se kao konstanta pojaviti i k.

Možemo li izračunati vrijednost konstante k koristeći još neki podatak iz zadatka? Odgovor je potvrdan. U zadatku je zadano da temperatura kave nakon jedne minute iznosi $90^{\circ}\mathrm{C}$. To znači da je $T(1)=90$. Kako iskoristiti taj podatak? Jednostavno: u pravilo funkcije T treba uvrstiti $t=1$ i $T(1)=90$, pa *riješiti dobivenu jednadžbu po nepoznanici* k i time odrediti vrijednost te konstante.

Posljednji korak u rješavanju ovoga zadatka je odrediti vrijednost varijable t tako da je $T(t)=65$. Pravilo funkcije T izjednačit ćemo sa 65 i riješiti dobivenu jednadžbu po nepoznanici t. U prethodnom smo koraku odredili vrijednost konstante k, pa ćemo izjednačavanjem pravila funkcije T sa 65 dobiti jednadžbu s jednom nepoznanicom (t).

Čini se da nas čeka poprilično posla. Nasreću, to je samo dojam. Pripadni programski kod sadrži točno šest linija, pa pogledajmo njegovu strukturu. U prvomu retku deklariramo simboličke varijable k i t, te simboličku funkciju $T(t)$. U drugom retku definiramo simboličku funkciju DT kao prvu derivaciju funkcije T po varijabli t. U trećemu retku rješavamo gore navedeni Cauchyjev problem. Namjerno izostavljamo funkciju `simplify` jer nas ne zanima pravilo funkcije T. (Naravno, nije pogreška ako ispred `dsolve` upišemo `simplify` i stavimo cijeli izraz na desnoj strani jednakosti kao argument te funkcije.) Izvršenjem toga retka koda dobit ćemo pravilo funkcije T koje će u svojemu zapisu sadržavati varijablu te funkcije t i konstantu k.

U četvrtom retku koda određujemo vrijednost konstante k rješavanjem jednadžbe $T(1)=90$ po nepoznanici k. Uočite kako smo uopće dobili tu jednadžbu. Korištenjem funkcije `subs` u pravilo funkcije T uvrstili smo jedinicu *umjesto varijable* t. (Opet dolazi do izražaja deklariranje $T(t)$ u prvom retku koda zbog kojega MATLAB nema nikakve dvojbe umjesto koje veličine treba uvrstiti jedinicu.) Dobiveni izraz sadrži k kao *jedinu nepoznatu veličinu*, pa funkcija `solve` praktički nema nikakva izbora: rješava dobivenu jednadžbu po nepoznanici k.

U petom retku koda rješavamo jednadžbu $T(t) = 65$ po nepoznanici t. Očekujemo da se na lijevoj strani te jednadžbe pojavi samo jedna nepoznata veličina (t) – i očekujemo pogrešno. Naime, MATLAB kao pravilo funkcije T uzima rezultat dobiven izvršavanjem trećega retka koda, a u njemu se kao nepoznata konstantna veličina pojavljuje i k. Zbog toga će primjena funkcije `solve` u petom retku koda dati rješenje koje će zapravo biti funkcija varijable k.

„Završni udar“ slijedi u šestom retku. U četvrtom retku koda odredili smo k, u petom vrijednost rješenja zadatka (označenoga s t_1) kao funkciju varijable k, pa u šestom retku preostaje u izraz za t_1 uvrstiti vrijednost k koristeći funkciju `subs` i dobiveni simbolički broj pretvoriti u „običan“ realan broj koristeći funkciju `double`. Dobivena vrijednost je traženo vrijeme (iskazano u minutama).

Iako je kod prilično kratak, sve provedene operacije mogu biti prilično zbunjujuće. Zbog toga se preporučuje da zadatak riješite analitički, i to točno onim redoslijedom operacija koji se primjenjuje u kodu. Tako ćete najbolje i najlakše shvatiti primijenjeni algoritam.

Pitanje za razmišljanje: Možemo li međusobno zamijeniti četvrti i peti redak koda? Objasnite svoj odgovor.

Pitanje za razmišljanje: Možemo li kao početni uvjet u trećemu retku navesti uvjet $T(1) = 90$? Ako možemo, kako u tom slučaju treba izgledati ostatak koda da se dobije ispravno rješenje? Precizno objasnite sve svoje tvrdnje.

Domaća zadaća

1. Odredite Laplaceove transformate sljedećih realnih funkcija i pojednostavnite dobivene izraze što više možete:

a) $f(t)=t^3\cdot\cos(5\cdot t)$ (varijabla u rezultatu treba biti p);

b) $g(x)=\text{ch}(2\cdot x)\cdot\sin x$; (varijabla u rezultatu treba biti s);

c) $h(t)=\begin{cases} t+10, \text{ za } t\in[0,10\rangle, \\ t^2-8\cdot t, \text{ za } t\geq 10. \end{cases}$ (varijabla u rezultatu treba biti p).

2. Odredite originale sljedećih Laplaceovih transformata:

a) $F(p)=\dfrac{8\cdot(3\cdot p^2-16)}{(p^2+16)^3}$; (varijabla u rezultatu treba biti t);

b) $G(s)=\dfrac{s^4-98\cdot s^2+19208}{(p\cdot(p-14)\cdot(p+14))^2}$.

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

3. $\begin{cases} y'-y=x\cdot e^x, \\ y(0)=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y''+4\cdot y=16\cdot t\cdot\sin(2\cdot t), \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$

5. Vrijeme poluraspada tricija iznosi 12.3 godina. Pretpostavljamo da je brzina raspadanja proporcionalna količini neraspadnutoga dijela tricija. Za koliko će se godina početna količina tricija smanjiti na 10% te količine? Zaokružite rezultat na jednu decimalu.

Rezultati zadataka

1. **a)** $F(p)=\dfrac{6\cdot\left(p^4-150\cdot p^2+625\right)}{\left(p^2+25\right)^4}$; **b)** $G(s)=\dfrac{s^2+5}{s^4-6\cdot s^2+25}$;

c) $H(p)=\dfrac{2\cdot e^{-10\cdot p}+11\cdot p\cdot e^{-10\cdot p}+p+10\cdot p^2}{p^3}$.

2. **a)** $f(t)=t^2\cdot\sin(4\cdot t)$; **b)** $g(x)=x\cdot\mathrm{ch}^2(7\cdot x)$.

3. $y=x^2\cdot e^x$.

4. $y=t\cdot\sin(2\cdot t)-2\cdot t^2\cdot\cos(2\cdot t)$.

5. 40.9 godina.