TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Matematika na državnoj maturi** – viša razina	**rješenja zadataka iz kolovoza 2018.**

1. D. Izračunajmo vrijednosti svih četiriju izraza pazeći da u izrazima pod **A**. i **B**. koristimo radijane, a u izrazima pod **C**. i **D**. stupnjeve. Dobivamo:

$$\begin{aligned}&\cos 47 \approx -0.99233547,\\&\sin 92 \approx -0.7794660696,\\&\cos 47^\circ \approx 0.68199836,\\&\sin 92^\circ \approx 0.999390827.\end{aligned}$$

Dakle, najveći je broj $\sin 92^\circ$.

2. C. Podsjetimo da vrijedi jednakost $1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{L}$. To znači da u rezervoaru ima ukupno 16000 litara vode, pa će obitelj potrošiti svu vodu iz rezervoara za $16000 : 320 = 50$ dana.

3. D. Aritmetička sredina svih pet visina studenata jednaka je:

$$P = \frac{168 + 172 + 179 + 180 + 190}{5} = 177.8\ \text{cm}.$$

Ta vrijednost očito nije jednaka vrijednosti visine nijednoga od studenata, pa tvrdnje **A**. i **B**. nisu istinite. Nadalje, iz jednakosti $177.8 - 9.7 = 168.1$ i $177.8 + 12.2 = 190$ zaključujemo da tvrdnja **C**. nije istinita (razlika broja P i broja 168 (visine najnižega studenta) iznosi 9.8), dok je tvrdnja **D**. istinita.

4. B. Koristeći pravila za množenje potencija istih baza i potenciranje potencija imamo redom:

$$\sqrt{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a}} = \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{2+3}{6}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{12}}.$$

5. C. Opseg zadanoga trokuta iznosi $13 + 14 + 15 = 42$ cm. Omjer opsega sličnih trokutova jednak je koeficijentu sličnosti tih trokutova, pa zaključujemo da je koeficijent sličnosti trokutova iz zadatka jednak $\frac{84}{42} = 2$. To znači da je najdulja stranica trokuta čiji je opseg 84 cm dvostruko dulja od najdulje stranice zadanoga trokuta, pa njezina duljina iznosi $2 \cdot 15 = 30$ cm.

6. B. Podsjetimo da se dijagonale paralelograma međusobno raspolavljaju. Promotrimo trokut čije su duljine stranica $\frac{12}{2} = 6\ \text{cm}$ i $\frac{16}{2} = 8\ \text{cm}$, a kut među njima $53^\circ 8'$. Kraća stranica paralelograma je treća stranica toga trokuta, pa primjenom kosinusova poučka odmah dobivamo:

$$b = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 53^\circ 8'} \approx \sqrt{36 + 64 - 96 \cdot 0.5999548861} \approx 6.5118607892 \approx 6.51\ \text{cm}.$$

7. D. Ako se bilo koje geometrijsko tijelo promatra odozgo, vidjet će se njegova osnovka, a ako se promatra sprijeda, vidjet će se njegov poprečni presjek. U ovom slučaju to znači da traženo tijelo ima krug za osnovku, a trokut za poprečni presjek. Jedino od ponuđenih četiriju tijela s tim svojstvom je stožac.

8. C. Zapišimo jednadžbu kružnice u kanonskom obliku:

$$\begin{aligned}
&\left(x-\frac{6}{2}\right)^2+(y-0)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2-0^2-7=0,\\
&(x-3)^2+(y-0)^2-3^2-0-7=0,\\
&(x-3)^2+(y-0)^2-9-0-7=0,\\
&(x-3)^2+(y-0)^2=9+7,\\
&(x-3)^2+(y-0)^2=16.
\end{aligned}$$

Odatle očitamo da je središte kružnice točka (3, 0), a polumjer kružnice $r=\sqrt{16}=4.$

9. C. Logaritmand (izraz pod logaritmom) mora biti strogo pozitivan, pa imamo redom:

$$\begin{aligned}
&2\cdot x+4>0,\\
&2\cdot x>-4, \quad /:2\\
&x>-2.
\end{aligned}$$

Dakle, tražena domena je skup svih brojeva strogo većih od –2. Taj skup je otvoreni interval $\langle -2,+\infty\rangle$.

10. D. Zbroj, razlika i umnožak dvaju polinoma su uvijek polinomi. Međutim, količnik dvaju polinoma ne mora biti polinom, nego (ne)prava racionalna funkcija. Npr. količnik polinoma $p_1(x)=x^2-1$ i $p_2(x)=x^2+1$ je neprava racionalna funkcija $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}$.

11. A. Prvi član reda je $a_1=1,$ dok je količnik reda $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{3}{5}}{1}=-\frac{3}{5}$. Očito je $|q|=\left|-\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}<1$, pa zadani red konvergira. Njegov je zbroj jednak:

$$Z=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{1}{1+\frac{3}{5}}=\frac{1}{\frac{5+3}{5}}=\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}.$$

12. A. Svedimo zadanu nejednadžbu na oblik u kojemu je lijeva strana nejednadžbe jednaka $5 \cdot x$. Koristeći osnovna svojstva eksponencijalne funkcije imamo redom:

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{5\cdot x} > \left(\frac{7}{4}\right)^{2},$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{5\cdot x} > \left(\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}\right)^{2},$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{5\cdot x} > \left(\frac{4}{7}\right)^{-1\cdot 2},$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{5\cdot x} > \left(\frac{4}{7}\right)^{-2}.$$

Budući da je baza potencije $\frac{4}{7} < 1$, prilikom uspoređivanja eksponenata moramo promijeniti znak nejednakosti. Tako dobivamo $5 \cdot x < -2$ i to je tražena nejednadžba.

13. A. Primjenom osnovnih svojstava logaritama dobivamo:

$$y - 5 = 3^{x}, \quad / \log_3$$
$$x = \log_3 (y - 5).$$

14. B. Iz zadanih podataka zaključujemo da funkcija f raste na intervalu $\langle -\infty, 3 \rangle$, potom pada na intervalu $\langle 3, 8 \rangle$, pa ponovno raste na intervalu $\langle 8, +\infty \rangle$. To znači da je njezina prva derivacija strogo pozitivna na intervalima $\langle -\infty, 3 \rangle$ i $\langle 8, +\infty \rangle$, a strogo negativna na intervalu $\langle 3, 8 \rangle$.

15. C. Koristeći definiciju apsolutne vrijednosti, zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$|2 \cdot x - 3| - m = m \text{ ili } |2 \cdot x - 3| - m = -m,$$
$$|2 \cdot x - 3| = m + m \text{ ili } |2 \cdot x - 3| = -m + m,$$
$$|2 \cdot x - 3| = 2 \cdot m \text{ ili } |2 \cdot x - 3| = 0,$$
$$2 \cdot x - 3 = 2 \cdot m \text{ ili } 2 \cdot x - 3 = (-2) \cdot m \text{ ili } 2 \cdot x - 3 = 0,$$
$$2 \cdot x = 2 \cdot m + 3 \text{ ili } 2 \cdot x = (-2) \cdot m + 3 \text{ ili } 2 \cdot x = 3,$$
$$x = \frac{2 \cdot m + 3}{2} \text{ ili } x = \frac{(-2) \cdot m + 3}{2} \text{ ili } x = \frac{3}{2},$$
$$x \in \left\{ \frac{(-2) \cdot m + 3}{2}, 0, \frac{2 \cdot m + 3}{2} \right\}$$

Dakle, zadana jednadžba ima točno tri različita rješenja.

16. 1.) 244. Odmah imamo: $\frac{25}{100}\cdot 976=\frac{1}{4}\cdot 976=244.$

2.) 160°, 55°. Kutovi uz neparalelne stranice trapeza su suplementni i njihov je zbroj 180°. Zadani kutovi trapeza očito nisu suplementni jer je njihov zbroj jednak $20^\circ+125^\circ=145^\circ$, pa zaključujemo da je riječ o kutovima uz osnovicu trapeza. Zbog toga su tražene mjere kutova jednake $180^\circ-20^\circ=160^\circ$ i $180^\circ-125^\circ=55^\circ$.

17. 1.) 3.51. Tražena visina (iskazana u metrima) jednaka je $h(1)$, odnosno $1.96+4.5\cdot 1-2.95\cdot 1^2=1.96+4.5-2.95=3.51$.

2.) ≈ 0.46 sekundi. Lopta će biti na najvećoj visini za $t_1=-\frac{4.5}{2\cdot(-2.95)}=-\frac{4.5}{-5.9}=\frac{45}{59}$ sekundi. Odredimo vrijeme kad će, prilikom pada na tlo, lopta biti na visini obruča koša To vrijeme je ono pozitivno rješenje jednadžbe $h(t)=3.05$ koje je strogo veće od $\frac{45}{59}$. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&1.96+4.5\cdot t-2.95\cdot t^2=3.05,\\
&(-2.95)\cdot t^2+4.5\cdot t+1.96-3.05=0,\\
&(-2.95)\cdot t^2+4.5\cdot t-1.09=0,\\
&t_{2,3}=\frac{-4.5\pm\sqrt{4.5^2-4\cdot(-2.95)\cdot(-1.09)}}{2\cdot(-2.95)}=\frac{-4.5\pm\sqrt{20.25-12.862}}{-5.9}=\\
&=\frac{-4.5\pm\sqrt{7.388}}{-5.9}\approx\frac{-4.5\pm 2.7180875629}{-5.9}\Rightarrow\\
&t_2=\frac{-4.5+2.7180875629}{-5.9}\approx 0.3020190571\approx 0.3,\\
&t_3=\frac{-4.5-2.7180875629}{-5.9}\approx 1.2234046717\approx 1.2.
\end{aligned}
$$

Vrijednost t_2 je očito strogo manja od $\frac{45}{59}\approx 0.76$, pa je traženo vrijeme jednako:

$$\Delta t=t_3-t_1=\frac{-4.5-\sqrt{7.388}}{-5.9}-\frac{45}{59}=\frac{10\cdot\sqrt{7.388}}{59}=\frac{\sqrt{738.8}}{59}\approx 0.460692807\approx 0.46 \text{ sekundi.}$$

18. 1.) 23 učenika. Neka su j i r redom broj učenika koji su izlet platili jednokratno i broj učenika koji su izlet platili na rate. Zbroj tih brojeva treba biti jednak ukupnom broju učenika u razredu, tj. 26, pa dobivamo jednadžbu:

$$j+r=26.$$

Nadalje, iznos koji je platilo j učenika jednak je $j\cdot 1995$ kn, a iznos koji je platilo r učenika jednak je $r\cdot 2100$. Zbroj obiju iznosa mora biti jednak ukupnom iznosu koji je platio cijeli razred, tj. 52 185, pa dobivamo jednadžbu:

$$j \cdot 1995 + r \cdot 2100 = 52185.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} j + r = 26, \\ 1995 \cdot j + 2100 \cdot r = 52185. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav metodom zamjene (supstitucije). Iz prve jednadžbe sustava izrazimo nepoznanicu r, pa dobijemo:

$$r = 26 - j.$$

Uvrstimo taj izraz u drugu jednadžbu sustava, pa imamo:

$$\begin{aligned}
&1995 \cdot j + 2100 \cdot (26 - j) = 52185, \\
&1995 \cdot j + 54600 - 2100 \cdot j = 52185, \\
&1995 \cdot j - 2100 \cdot j = 52185 - 54600, \\
&(-105) \cdot j = -2415 \quad / : (-105) \\
&j = 23.
\end{aligned}$$

Dakle, izlet su jednokratno platila 23 učenika, a na rate preostala 3 učenika.

2.) 6402. Ukupno $(100-(11+23)) = (100-34) = 66\%$ svih pristupnika postiglo je više od 25% i manje od 75% mogućih bodova. Zbog toga je traženi broj jednak 66% od 9700, tj. $\frac{66}{100} \cdot 9700 = 6402.$

19. 1.) $\approx 15.2886440751 \text{ rad} \approx 15^\circ.17'19''$. Primijetimo najprije da je $k > 0$ jer je riječ o duljini stranice trokuta koja mora biti strogo pozitivan realan broj, te da je kut α šiljasti kut, što znači da njegova mjera (iskazana u radijanima) pripada intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Primjenom sinusova poučka odmah dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{\sin\alpha} = \frac{3 \cdot k}{\sin 127^\circ 43'} \quad / : k > 0 \\
&\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin 127^\circ 43'}, \quad /^{-1} \\
&\sin\alpha = \frac{\sin 127^\circ 43'}{3}, \\
&\alpha = \arcsin\left(\frac{\sin 127^\circ 43'}{3}\right) \approx 15.2886440751 \text{ rad} \approx 15^\circ.17'19''.
\end{aligned}$$

2.) $144 \cdot \pi$. Neka je a duljina osnovnoga brida kocke (iskazana u cm). Tada je duljina prostorne dijagonale kocke $D = a \cdot \sqrt{3}$. Tako iz jednadžbe

$$a \cdot \sqrt{3} = 12 \cdot \sqrt{3}$$

slijedi $a = 12$. Kugla upisana u kocku ima promjer jednak duljini osnovnoga brida kocke, odnosno, ekvivalentno, polumjer jednak polovici duljine osnovnoga brida kocke. Tako je traženo oplošje jednako:

$$O = 4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \pi = a^2 \cdot \pi = 12^2 \cdot \pi = 144 \cdot \pi \text{ cm}^2.$$

20. 1.) Vidjeti sliku 1. Odredimo najprije kojemu je broju iz intervala $\left[0, 2 \cdot \pi\right\rangle$ pridružena ista točka kao i zadanom broju. Imamo redom:

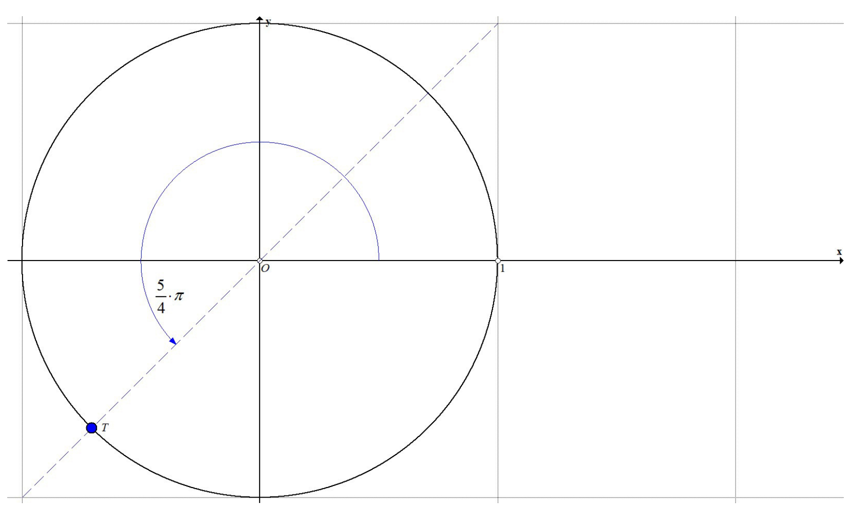
$$-\frac{11}{4} \cdot \pi = \left(-3 + \frac{1}{4}\right) \cdot \pi \to \left(-3 + \frac{1}{4}\right) \cdot \pi + 2 \cdot (2 \cdot \pi) = \left(-3 + \frac{1}{4} + 4\right) \cdot \pi = \frac{5}{4} \cdot \pi.$$

Dakle, brojevima $-\frac{11}{4} \cdot \pi$ i $\frac{5}{4} \cdot \pi$ pridružena je ista točka središnje jedinične kružnice. Zbog toga konstruiramo kut čija je mjera $\frac{5}{4} \cdot \pi$ radijana. Vrh toga kuta je ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini, a jedan krak pozitivan dio osi apscisa. Uočimo da je $\frac{5}{4} \cdot \pi = \pi + \frac{\pi}{4}$, pa su koraci konstrukcije sljedeći:

Korak 1. Konstruirati simetralu I. i III. kvadranta (to je pravac čija je jednadžba $y = x$).

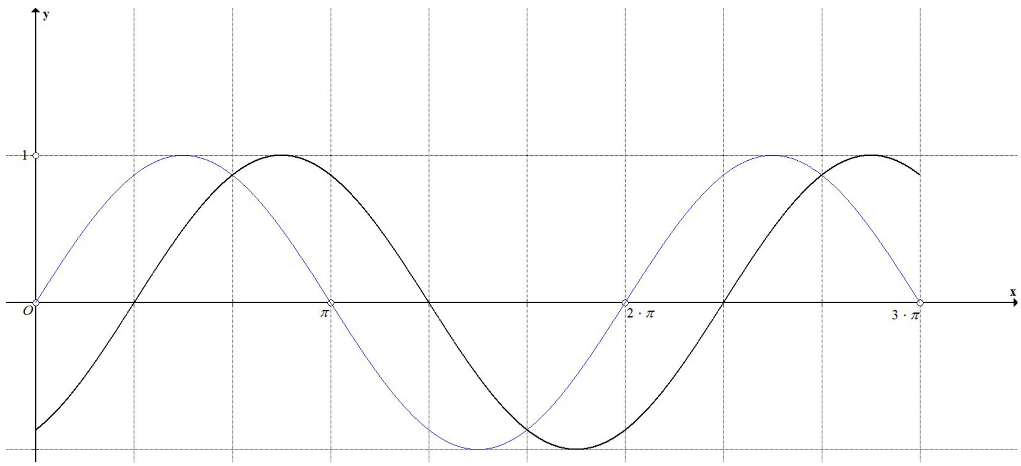
Korak 2. Odrediti ono sjecište simetrale iz Koraka 1. i središnje jedinične kružnice koje se nalazi u III. kvadrantu. To sjecište je tražena točka.

Na opisani način dobivamo sliku 1. Točka T je tražena točka.



Slika 1.

2.) Vidjeti sliku 2. Primijetimo da je zadana funkcija zapravo osnovna sinusoida $y=\sin x$ translatirana za $\frac{\pi}{3}$ udesno. Zbog toga najprije nacrtamo osnovnu sinusoidu $y=\sin x$, a potom je translatiramo za $\frac{\pi}{3}$ udesno. To lako možemo učiniti jer je jedan podiok na osi apscisa upravo $\frac{\pi}{3}$. Dobivamo sliku 2. (Plavom bojom nacrtana je osnovna sinusoida, a crnom tražena krivulja.)



Slika 2.

Napomena: Traženu krivulju možemo nacrtati i tako da najprije izračunamo njezine karakteristične točke (vidjeti tablicu 1.), pa ih potom ucrtamo u zadani pravokutni koordinatni sustav.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{4}{3}\cdot\pi$	$2\cdot\pi$	$\frac{7}{3}\cdot\pi$	$3\cdot\pi$
$f(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tablica 1. Vrijednosti funkcije f na segmentu $[0, 3\cdot\pi]$.

21. 1.) $-\frac{1}{a}$. Imamo redom:

$$\frac{1}{1-b}:\frac{a}{b}-\frac{1}{a-a\cdot b}=\frac{1}{1-b}\cdot\frac{b}{a}-\frac{1}{a-a\cdot b}=\frac{b}{a\cdot(1-b)}-\frac{1}{a\cdot(1-b)}=\frac{b-1}{a\cdot(1-b)}=\frac{-(1-b)}{a\cdot(1-b)}=-\frac{1}{a}.$$

2.) $\frac{3}{8}=0.375$. Koristeći definiciju kompozicije funkcija imamo redom:

$$(f\circ g)\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(g\left(\frac{7}{2}\right)\right)=f\left(\frac{7}{2}-3\right)=f\left(\frac{7-6}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=12\cdot\frac{1^5}{2^5}=12\cdot\frac{1}{32}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}.$$

22.1.) 80. Zadanu funkciju najprije zapišimo u standardnom obliku. Imamo redom:

$$f(x)=4\cdot(x+2)^2-5=4\cdot\left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\right)-5=4\cdot\left(x^2+4\cdot x+4\right)-5=$$
$$=4\cdot x^2+16\cdot x+16-5=4\cdot x^2+16\cdot x+11.$$

Očitamo $a=4,\ b=16,\ c=11,$ pa je tražena diskriminanta jednaka:

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c=16^2-4\cdot 4\cdot 11=256-176=80.$$

2.) $g(58),\ g(0),\ f(1)$**.** Primijetimo da je funkcija g strogo padajuća, što znači da je $g(58)<g(0).$ Nadalje, očito je $f(1)>0$ i $g(0)<0$, pa je $f(1)>g(0).$ Dakle, traženi poredak glasi: $g(58),\ g(0),\ f(1)$.

23. 1.) $y^2=32\cdot x$. Iz podatka o žarištu parabole zaključujemo da je $\frac{p}{2}=8$, a odatle je $p=16.$ Zbog toga je tražena jednadžba $y^2=2\cdot 16\cdot x$, odnosno $y^2=32\cdot x$.

2.) $d=3$**.** Graf zadane funkcije neće sjeći os ordinata ako i samo ako ne postoji $f(0).$ Iz pravila funkcije f slijedi $f(0)=\frac{5\cdot 0+6}{7\cdot 0+d-3}=\frac{0+6}{0+d-3}=\frac{6}{d-3}.$ Ovaj razlomak ne postoji ako i samo ako je njegov nazivnik jednak nuli, tj. ako i samo ako je $d-3=0$. Odatle je $d=3.$

24. 1.) $x=\frac{1}{4}.$ Prema definiciji logaritma, zadana jednadžba je ekvivalentna jednadžbi $x^3=\frac{1}{64}$, odnosno jednadžbi $x^3=\left(\frac{1}{4}\right)^3$. Odatle uzimanjem trećega korijena dobivamo $x=\frac{1}{4}.$

2.) $\log_b\frac{35}{6}$**.** Koristeći identitet $\log_a c=\frac{\log_d c}{\log_d c}$ koji vrijedi za sve dopustive $a,d,c\in\mathbb{R}$ imamo redom:

$$\log_b 35-\frac{1}{2}\cdot\log_{\sqrt{b}} 6=\log_b 35-\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_b 6}{\log_b\sqrt{b}}=\log_b 35-\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_b 6}{\log_b\left(b^{\frac{1}{2}}\right)}=\log_b 35-\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_b 6}{\frac{1}{2}}=$$

$$=\log_b 35-\log_b 6=\log_b\frac{35}{6}.$$

25. 1.) 2. Zadanu jednadžbu riješimo na uobičajen način. Pomnožimo je sa 6, pa imamo:

$$
\begin{aligned}
&6\cdot x+2\cdot(2\cdot x-1)=3\cdot(4\cdot x+1)-(x+7),\\
&6\cdot x+4\cdot x-2=12\cdot x+3-x-7,\\
&6\cdot x+4\cdot x-12\cdot x+x=3-7+2,\\
&-x=-2,\\
&x=2.
\end{aligned}
$$

2.) $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$**.** Nultočke kvadratne funkcije $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{5}\right)$ su očito $x_1=-\frac{1}{5}$ i $x_2=\frac{1}{2}$. Njezin vodeći koeficijent jednak je 1. Zbog toga ta funkcija poprima nenegativne vrijednosti za svaki $x\in\mathbb{R}$ koji **ne** pripada otvorenom intervalu omeđenom navedenim nultočkama. Taj interval je $\left\langle-\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right\rangle$, pa je skup svih rješenja zadane nejednadžbe $\mathbb{R}\setminus\left\langle-\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right\rangle=\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

3.) $\frac{9}{4}$. Zadana jednadžba je definirana kad god je $x\geq 0$ i $5\cdot x+1\geq 0$. Iz tih dviju nejednakosti slijedi $x\geq 0$ i $x\geq-\frac{1}{5}$, pa navedene uvjete objedinjujemo u uvjet $x\geq 0$. Sada zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$
\begin{aligned}
&3\cdot\sqrt{x}=1+\sqrt{5\cdot x+1},\quad /^2\\
&3^2\cdot\left(\sqrt{x}\right)^2=1^2+2\cdot 1\cdot\sqrt{5\cdot x+1}+\left(\sqrt{5\cdot x+1}\right)^2,\\
&9\cdot x=1+2\cdot\sqrt{5\cdot x+1}+5\cdot x+1,\\
&2\cdot\sqrt{5\cdot x+1}=9\cdot x-1-5\cdot x-1,\\
&2\cdot\sqrt{5\cdot x+1}=4\cdot x-2,\quad /:2\\
&\sqrt{5\cdot x+1}=2\cdot x-1.
\end{aligned}
$$

Da bismo smjeli kvadrirati posljednju jednakost, moramo pretpostaviti da je njezina desna strana nenegativna. Ta pretpostavka daje uvjet $2\cdot x-1\geq 0$, odnosno $x\geq\frac{1}{2}$. Taj uvjet zajedno s ranijim uvjetom $x\geq 0$ možemo objediniti u uvjet $x\geq\frac{1}{2}$. Zbog toga jednadžbu nastavljamo rješavati uz pretpostavku $x\geq\frac{1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{5\cdot x+1}=2\cdot x-1,\quad /^2\\
&\left(\sqrt{5\cdot x+1}\right)^2=(2\cdot x-1)^2,\\
&5\cdot x+1=4\cdot x^2-2\cdot 2\cdot x\cdot 1+1^2,
\end{aligned}
$$

$$5\cdot x+1=4\cdot x^2-4\cdot x\cdot 1+1,$$
$$4\cdot x^2-4\cdot x-5\cdot x=0,$$
$$4\cdot x^2-9\cdot x=0,\quad /:x\neq 0$$
$$4\cdot x-9=0,$$
$$4\cdot x=9,$$
$$x=\frac{9}{4}.$$

Primijetimo da $x=\frac{9}{4}$ zadovoljava uvjet $x\geq\frac{1}{2}$, pa je taj broj ujedno i jedinstveno rješenje zadane jednadžbe.

26.1.) $\frac{9}{2}=4.5$. Primijetimo da su vrhovi trokuta točke $A=(-2,1)$, $B=(1,1)$ i $C=(2,4)$. Površinu trokuta najlakše i najbrže ćemo izračunati kao polovicu umnoška duljine stranice $\overline{AB}$ i duljine visine povučene iz vrha C na tu stranicu. Lako vidimo da su $\left|\overline{AB}\right|=1-(-2)=3$ i $v_c=4-1=3$, pa zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P=\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{9}{2}=4.5\text{ kv. jed.}$$

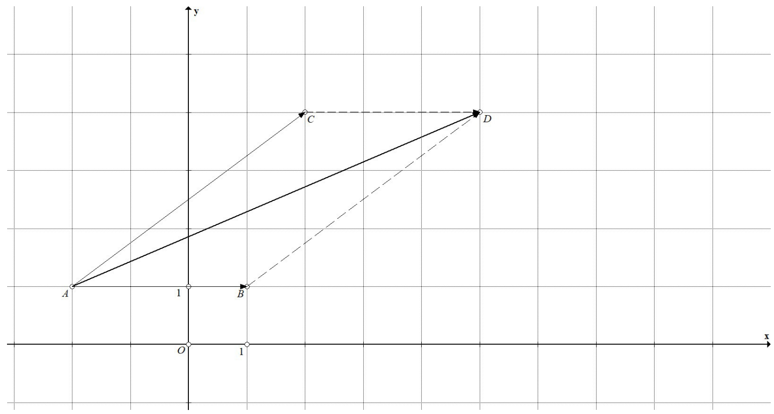
2.) $28\cdot\vec{i}+21\cdot\vec{j}$. Neka je O ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Ako je $T=(x_T,y_T)$ bilo koja točka u ravnini, onda je $\overrightarrow{OT}=x_T\cdot\vec{i}+y_T\cdot\vec{j}$. Nadalje, ako su T_1 i T_2 bilo koje točke u ravnini, onda je $\overrightarrow{T_1T_2}=\overrightarrow{OT_2}-\overrightarrow{OT_1}$. Koristeći ova svojstva odmah dobivamo:

$$\vec{s}=7\cdot\overrightarrow{AC}=7\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=7\cdot\left(2\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}-\left((-2)\cdot\vec{i}+\vec{j}\right)\right)=7\cdot\left(2\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{i}-\vec{j}\right)=$$
$$=7\cdot\left(4\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}\right)=28\cdot\vec{i}+21\cdot\vec{j}.$$

3.) Vidjeti sliku 3. Traženi vektor konstruiramo primjenom pravila paralelograma. Dobivamo sliku 3. Rješenje zadatka je vektor $\overrightarrow{AD}$.

Napomena: Početna točka traženoga vektora je točka A. Koordinate krajnje točke D toga vektora možemo odrediti i računski:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\left((1-(-2))\cdot\vec{i}+(1-1)\cdot\vec{j}\right)+\left((2-(-2))\cdot\vec{i}+(4-1)\cdot\vec{j}\right)=\left((1+2)\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}\right)+\left((2+2)\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}\right)=$$
$$=3\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}=7\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}x_D-(-2)=7,\\ y_D-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D+2=7,\\ y_D-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=7-2=5,\\ y_D=3+1=4\end{cases}\Rightarrow D=(5,4).$$



Slika 3.

27.1.) $\sin x$. Koristeći osnovni trigonometrijski identitet dobivamo:

$$\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}-1=\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}-1=\frac{(1-\sin x)\cdot(1+\sin x)}{1-\sin x}-1=(1+\sin x)-1=1+\sin x-1=\sin x.$$

2.) $-6\cdot\sin x\cdot\cos^5 x$. Primijenimo pravilo deriviranja složene funkcije, pa dobijemo:

$$f'(x)=6\cdot(\cos x)^{6-1}\cdot\underbrace{\left((\cos x)'\right)}_{=-\sin x}=6\cdot(\cos x)^5\cdot(-\sin x)=-6\cdot\sin x\cdot\cos^5 x.$$

3.) $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Koristeći formulu za sinus dvostrukoga kuta imamo redom:

$$\begin{aligned}
&2\cdot\sin x\cdot\cos x=1,\\
&\sin(2\cdot x)=1,\\
&2\cdot x=\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi,\quad /:2\\
&x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

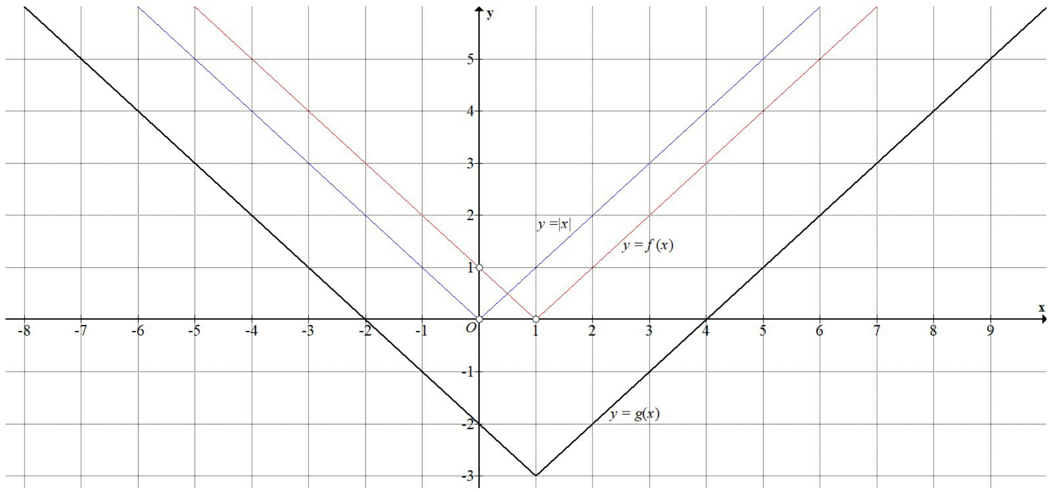
28. Vidjeti sliku 4. Pravilo funkcije f najprije transformiramo ovako:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2\cdot x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|.$$

Zbog toga je

$$g(x)=f(x)-3=|x-1|-3.$$

Najprije nacrtamo krivulju $y=|x|$. Tu krivulju translatiramo za jednu jedinicu duljine udesno, pa dobivenu krivulju translatiramo za tri jedinice duljine prema dolje. Dobivamo krivulju na slici 4. (Rješenje zadatka prikazano je crnom bojom.)



Slika 4.

29.1.) $\frac{5}{2}\cdot n+13$. Neka su a_1 i d redom prvi član i razlika zadanoga aritmetičkoga niza. Iz zadanih podataka dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} a_1+(5-1)\cdot d=\frac{51}{2}, \\ a_1+(16-1)\cdot d=53. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+4\cdot d=\frac{51}{2}, \\ a_1+15\cdot d=53. \end{cases}$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od druge jednadžbe dobivamo $11\cdot d=53-\frac{51}{2}$, odnosno $11\cdot d=\frac{55}{2}$. Odatle je $d=\frac{5}{2}$.

Uvrštavanjem ove vrijednosti u prvu jednadžbu sustava dobivamo

$$a_1+4\cdot\frac{5}{2}=\frac{51}{2} \Leftrightarrow a_1+10=\frac{51}{2} \Leftrightarrow a_1=\frac{51}{2}-10=\frac{31}{2}.$$

Dakle, opći član zadanoga niza je:

$$a_n=\frac{31}{2}+(n-1)\cdot\frac{5}{2}=\frac{31}{2}+\frac{5}{2}\cdot n-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\cdot n+13.$$

2.) $\frac{1}{4}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Zapišimo najprije broj z u trigonometrijskom obliku. U tu svrhu odredimo apsolutnu vrijednost (modul) i glavni argument toga broja. Imamo redom:

$$a=\mathrm{Re}(z)=-\sqrt{3},\ \ b=\mathrm{Im}(z)=1\Rightarrow$$

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2;$$

$$\varphi_1=\operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|=\operatorname{arctg}\left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right|=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6},$$

$$\varphi=\pi-\varphi_1=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\cdot\pi\Rightarrow z=r\cdot\operatorname{cis}(\varphi)=2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{5}{6}\cdot\pi\right).$$

Tako konačno dobivamo:

$$z\cdot w=\left(2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{5}{6}\cdot\pi\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{5}{3}\cdot\pi\right)\right)=\left(2\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{5}{6}\cdot\pi+\frac{5}{3}\cdot\pi\right)=\frac{1}{4}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{5+10}{6}\cdot\pi\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{15}{6}\cdot\pi\right)=\frac{1}{4}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{5}{2}\cdot\pi\right)=\frac{1}{4}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi\right)=\frac{1}{4}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

3.) $\frac{3025}{162}\cdot\pi\approx 58.66\%$. Površina stakla jednaka je $P_1=120\cdot 60=7200\text{ cm}^2$. Površina prebrisanoga dijela stakla jednaka je površini kružnoga isječka kojemu je polumjer r = 55 cm, a središnji kut α = 160°. Ta je površina jednaka:

$$P_2=\frac{r^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360}=\frac{55^2\cdot\pi\cdot 160}{360}=\frac{3025\cdot\pi\cdot 4}{9}=\frac{12100}{9}\cdot\pi\text{ cm}^2.$$

Zbog toga je traženi postotak jednak

$$p=\frac{P_2}{P_1}\cdot 100=\frac{\frac{12100}{9}\cdot\pi}{7200}\cdot 100=\frac{\frac{12100}{9}\cdot\pi}{72}=\frac{3025}{162}\cdot\pi\approx 58.6624554143\approx 58.66.$$

4.) $\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{9}{10}\cdot\sqrt{5}\right)\approx 63.5770349076^\circ\approx 63^\circ 34' 37''$. Određenosti radi, označimo $h=9,\ b=11$. Neka je a duljina osnovnoga brida zadane piramide. Uočimo pravokutan trokut kojemu su katete visina piramide i polovica dijagonale osnovke, a hipotenuza bočni brid piramide. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$b^2=h^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\left(a\cdot\sqrt{2}\right)\right)^2,$$

$$b^2=h^2+\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2,$$

$$b^2=h^2+\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot 2,$$

$$b^2=h^2+\frac{1}{2}\cdot a^2,\quad /:2$$

$$\frac{b^2}{2}=\frac{h^2}{2}+\frac{a^2}{4},$$

$$\frac{a^2}{4}=\frac{b^2}{2}-\frac{h^2}{2}, \quad /\sqrt{\ }$$
$$\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{b^2}{2}-\frac{h^2}{2}}.$$

Sada uočimo pravokutan trokut kojemu su katete visina piramide i polovica osnovnoga brida piramide. Tangens traženoga kuta jednak je količniku visine piramide i polovice bočnoga brida piramide. Označimo li traženi kut s α, primjenom gornje jednakosti dobivamo:

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{\frac{a}{2}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{\sqrt{\frac{b^2}{2}-\frac{h^2}{2}}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{h^2}{\frac{b^2}{2}-\frac{h^2}{2}}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2\cdot h^2}{b^2-h^2}}\right).$$

Preostaje uvrstiti numeričke podatke i dobiti:

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2\cdot 9^2}{11^2-9^2}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2\cdot 81}{121-81}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2\cdot 81}{40}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{81}{20}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{81}{4\cdot 5}}\right)=$$
$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{9}{2\cdot\sqrt{5}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{9}{10}\cdot\sqrt{5}\right)\approx 63.5770349076^\circ\approx 63^\circ 34' 37''.$$

5.) 2176. Odredimo najprije vrijednost prirodnoga broja *n*. Umnožak prvih *n* prirodnih brojeva je $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, a umnožak prvih $n-2$ prirodnih brojeva je $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)$. Dijeljenjem tih dvaju izraza dobivamo umnožak $(n-1)\cdot n$. Taj umnožak mora biti jednak 272, pa slijedi:

$$(n-1)\cdot n=272,$$
$$n^2-n-272=0,$$
$$n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-272)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1-(-1088)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1+1088}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1089}}{2}=\frac{1\pm 33}{2},$$
$$n_1=\frac{1+33}{2}=\frac{34}{2}=17,\ n_2=\frac{1-33}{2}=\frac{-32}{2}=-16.$$

Drugo rješenje je strogo negativan cijeli broj, pa njega zanemarujemo. Preostaje $n=n_1=17$.

Tako zaključujemo da je traženi broj jednak koeficijentu uz x^{15} u razvoju binoma $(x+4)^{17}$. Primjenom binomnoga poučka odmah dobivamo da je taj broj jednak:

$$\binom{17}{15}\cdot 4^2=\binom{17}{17-15}\cdot 16=\binom{17}{2}\cdot 16=\frac{17\cdot 16}{2!}\cdot 16=\frac{272}{2}\cdot 16=272\cdot 8=2176.$$

30. $\left(\frac{27}{10}, \frac{39}{10}\right)$. Odredimo sve točke grafa funkcije f u kojima tangenta povučena na taj graf ima koeficijent smjera jednak 7. Podsjetimo da je koeficijent smjera tangente povučene u nekoj točki grafa funkcije f jednak derivaciji te funkcije u prvoj koordinati te točke. Zbog toga imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{8}\cdot x^4 + 3\cdot x - 4\right)' = 7,\\
&\frac{1}{8}\cdot\left(x^4\right)' + 3\cdot(x)' - (4)' = 7,\\
&\frac{1}{8}\cdot 4\cdot x^{4-1} + 3\cdot 1 - 0 = 7,\\
&\frac{1}{2}\cdot x^3 + 3 = 7,\\
&\frac{1}{2}\cdot x^3 = 7 - 3,\\
&\frac{1}{2}\cdot x^3 = 4, \quad /\cdot 2\\
&x^3 = 8, \quad /\sqrt[3]{\ }\\
&x = 2.
\end{aligned}$$

Druga koordinata ove točke jednaka je $f(2)$, pa računamo:

$$f(2) = \frac{1}{8}\cdot 2^4 + 3\cdot 2 - 4 = \frac{1}{8}\cdot 16 + 6 - 4 = 2 + 6 - 4 = 4.$$

Dakle, $T = (2, 4)$. Iz točke T povucimo okomicu na zadani pravac. Sjecište te okomice sa zadanim pravcem bit će tražena točka. Koeficijent smjera okomice na zadani pravac je suprotan i recipročan koeficijentu smjera zadanoga pravca, pa je:

$$k_1 = -\frac{1}{7}.$$

Jednadžba pravca koji ima koeficijent smjera $k_1 = -\frac{1}{7}$ i prolazi točkom $T = (2, 4)$ je:

$$\begin{aligned}
&p_1 \ldots\ y = -\frac{1}{7}\cdot(x-2) + 4,\\
&y = -\frac{1}{7}\cdot x + \frac{2}{7} + 4,\\
&y = -\frac{1}{7}\cdot x + \frac{2 + 7\cdot 4}{7},\\
&p_1 \ldots\ y = -\frac{1}{7}\cdot x + \frac{30}{7}.
\end{aligned}$$

Odredimo sjecište pravca p_1 i zadanoga pravca. Imamo:

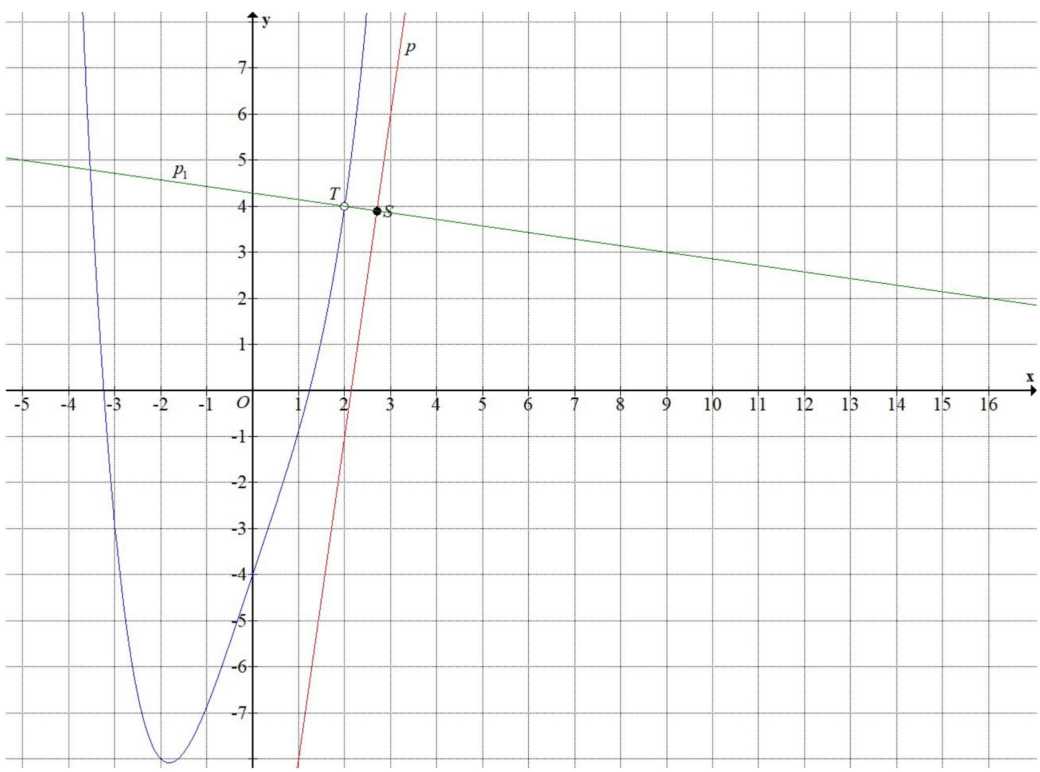
$$\begin{cases} y = 7 \cdot x - 15 \\ y = -\frac{1}{7} \cdot x + \frac{30}{7} \end{cases} \Rightarrow 7 \cdot x - 15 = -\frac{1}{7} \cdot x + \frac{30}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot x + \frac{1}{7} \cdot x = 15 + \frac{30}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot 7 \cdot x + x = 15 \cdot 7 + 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49 \cdot x + x = 105 + 30 \Leftrightarrow 50 \cdot x = 135 \Leftrightarrow x = \frac{135}{50} = \frac{27}{10},$$

te

$$y = 7 \cdot \frac{27}{10} - 15 = \frac{189}{10} - 15 = \frac{189 - 150}{10} = \frac{39}{10}.$$

Dakle, tražena točka je $S = \left(\frac{27}{10}, \frac{39}{10}\right)$ (vidjeti sliku 5.)



Slika 5.

Pripremio:

mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač