1. **A.** Za skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ vrijedi skupovna inkluzija $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. To znači da je svaki prirodan broj ujedno i cijeli broj.
Nijedan cijeli broj nije iracionalan broj jer je svaki cijeli broj ujedno i racionalan broj, a skup racionalnih brojeva i skup iracionalnih brojeva nemaju zajedničkih elemenata.
Nije svaki racionalan broj ujedno i cijeli broj. Npr. $\frac{1}{2}$ je racionalan broj, ali nije cijeli broj.
Nije svaki realan broj ujedno i iracionalan broj. Npr. $\frac{1}{2}$ je realan broj, ali nije iracionalan broj (jer pripada skupu racionalnih brojeva).

2. **A**. Imamo redom:

$$\frac{m}{h} = \frac{1}{r} - t, \quad / \cdot h$$
$$m = h \cdot \left(\frac{1}{r} - t \right) = \frac{1 - r \cdot t}{m} \cdot h.$$

3. **C.** Riješimo najprije pripadnu kvadratnu jednadžbu na uobičajen način:

$$x^2 - x = 20 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (-80)}}{2} =$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5, \;\; x_2 = \frac{1-9}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Koeficijent uz x^2 jednak je 1 i on je strogo pozitivan. To znači da pripadna kvadratna funkcija poprima strogo pozitivne vrijednosti na intervalu koji se dobije kad se iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ izbaci segment određen realnim nultočkama te funkcije. U ovom slučaju, taj segment je $[-4, 5]$. Dakle, rješenje zadatka je skup $\mathbb{R} \setminus [-4, 5]$ koji možemo zapisati kao u obliku $\langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 5, +\infty \rangle$.

4. **B**. Osnovno svojstvo aritmetičkoga niza je da je razlika svakoga člana (osim prvoga) i njemu neposredno prethodnoga člana konstantna.

U slučaju niza navedenoga pod **A**. razlike tvore niz 3, 3, 5.

U slučaju niza navedenoga pod **B**. razlike tvore niz 1, 1, 1.

U slučaju niza navedenoga pod **C**. razlike tvore niz 0.5, 1, 2.

U slučaju niza navedenoga pod **D.** razlike tvore niz -0.1, -0.2, -0.2.

Dakle, jedino u slučaju niza navedenoga pod **B**. vrijedi navedeno osnovno svojstvo aritmetičkoga niza.

5. **C**. U prvih 35 utakmica vratar je imao ukupno $38.6 \cdot 35 = 1\,351$ obranu. U sljedećih 5 utakmica vratar je imao ukupno $38.2 \cdot 5 = 191$ obranu. Dakle, u svih $35 + 5 = 40$ odigranih utakmica vratar je skupio ukupno $1\,351 + 191 = 1\,542$ obrane, pa je prosjek njegovih obrana u svim utakmicama jednak $\frac{1542}{40} = \frac{771}{20} = 38.55.$

6. **D.** Primijetimo najprije da zadani izraz nije definiran za $a = -1$ jer razlomak $\frac{a-3}{a+1}$ nije definiran za tu vrijednost. Pogledajmo što ćemo dobiti sređivanjem i pojednostavljivanjem zadanoga algebarskoga izraza do kraja. Imamo redom:

$$M = \left(\frac{1 \cdot (a-3) + 2 \cdot (a+3)}{(a+3) \cdot (a-3)}\right) \cdot \frac{a-3}{a+1} = \left(\frac{a-3+2 \cdot a+6}{(a+3) \cdot (a-3)}\right) \cdot \frac{a-3}{a+1} =$$
$$= \left(\frac{3 \cdot a+3}{(a+3) \cdot (a-3)}\right) \cdot \frac{a-3}{a+1} = \frac{3 \cdot (a+1)}{(a+3) \cdot (a-3)} \cdot \frac{a-3}{a+1} = \frac{3}{a+3}.$$

Uvrstimo li u ovaj izraz $a = -1$, dobit ćemo $M = \frac{3}{-1+3} = \frac{3}{2}.$

7. **B**. Kvadratna funkcija $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ima točno jednu nultočku ako i samo ako vrijedi jednakost $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$. U ovome su slučaju $a = -4,\ b = 11,$ pa uvrštavanjem tih vrijednosti u navedenu jednakost dobivamo:

$$11^2 - 4 \cdot (-4) \cdot c = 0,$$
$$121 + 16 \cdot c = 0,$$
$$c = -\frac{121}{16} = -7.5625.$$

Navedeni broj očito zadovoljava nejednakost $-11 < c < -4.$

8. **C.** Traženu duljinu izračunat ćemo koristeći kosinusov teorem:

$$\left|\overline{FH}\right| = \sqrt{\left|\overline{FG}\right|^2 + \left|\overline{GH}\right|^2 - 2 \cdot \left|\overline{FG}\right| \cdot \left|\overline{GH}\right| \cdot \cos \angle FGH} =$$
$$= \sqrt{54^2 + 42^2 - 2 \cdot 54 \cdot 42 \cdot \cos 70^\circ} \approx \sqrt{2\,916 + 1\,764 - 4\,536 \cdot 0.34202} =$$
$$= \sqrt{4\,680 - 1\,551.40272} = \sqrt{3\,128.59728} \approx 55.93387 \approx 55.93 \text{ dm}.$$

9. **C**. Promotrimo pravokutan trokut kojemu je duljina jedne katete jednaka polovici duljine stranice kvadrata, a duljina hipotenuze jednaka duljini bočne visine

piramide. Prema pretpostavci, svi bridovi piramide su jednake duljine, pa pobočje piramide tvore četiri jednakostranična trokuta. Radi određenosti, neka su $a>0$ duljina osnovnoga brida piramide i α tražena mjera. Tada je duljina bočne visine v piramide jednaka duljini visine jednakostraničnoga trokuta čija osnovica ima duljinu a, pa je:

$$v=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}.$$

Kosinus traženoga kuta jednak je omjeru uočene katete i hipotenuze, pa imamo:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{v}=\frac{a}{2\cdot v}=\frac{a}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{a}{a\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=54.73561^\circ=54^\circ 44' 8''.$$

10.B. Koristeći osnovna svojstva logaritma dobivamo redom:

$$\log_x(16\cdot 9)=2\Leftrightarrow\log_x 144=2\Leftrightarrow x^2=144.$$

Baza logaritma ne može biti strogo negativan broj, pa uzimanjem drugoga korijena slijedi $x=12$. Tako je:

$$\log(x+31)=\log(12+31)=\log 43\approx 1.633468\approx 1.633.$$

11.D. Koristeći definiciju skalarnoga umnoška imamo redom:

$$\begin{aligned}&\vec{p}\cdot\vec{p}-\vec{p}\cdot\vec{r}=\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{p}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{p},\vec{p}\right)-\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{r}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{p},\vec{r}\right)=\\&=8\cdot 8\cdot\cos 0^\circ-8\cdot 13\cdot\cos 120^\circ=64\cdot 1-104\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\\&=64-(-52)=64+52=116.\end{aligned}$$

12.D. Primijetimo da je zadana funkcija strogo padajuća na intervalu $\langle-\infty,4\rangle$, a strogo rastuća na intervalu $\langle 4,+\infty\rangle$. Prema definicijama strogo rastuće, odnosno strogo padajuće funkcije, odatle slijedi da vrijede nejednakosti $f(1)>f(2)>f(3)>$ $>f(4)<f(5)$. Dakle, točna je nejednakost pod **D**.

13.D. Deriviranjem obiju strana zadane jednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned}&g'=(f-17)',\\&g'=f'-17'\\&g'=f'-0,\\&g'=f'.\end{aligned}$$

14. A. Neka su $E \in \overline{AM}$, $F \in \overline{BM}$, $G \in \overline{BC}$ i $H \in \overline{CA}$ vrhovi pravokutnika. Prema pretpostavci, ABC je jednakokračan pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha C. To znači da kutovi toga trokuta imaju mjeru 45°, 45° i 90°, te da su duljine stranica toga trokuta:

$$\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right| = d,$$
$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{d^2 + d^2} = \sqrt{2 \cdot d^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{d^2} = d \cdot \sqrt{2}.$$

Također, znamo odrediti i duljine dužina $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ i $\overline{CM}$. Naime, prema pretpostavci zadatka, M je polovište hipotenuze $\overline{AB}$, pa su:

$$\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{BM}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot d.$$

Prisjetimo se da je u *svakom* pravokutnom trokutu (pa posebno i u trokutu ABC) polovište hipotenuze ujedno i središte trokutu opisane kružnice. Tako odmah slijedi:

$$\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{BM}\right| = \left|\overline{CM}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot d.$$

Sada ćemo dokazati sljedeće tvrdnje:

Tvrdnja 1. Vrijede jednakosti:

$$\left|\overline{FG}\right| = \left|\overline{FB}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{CM}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot d.$$

Dokaz: Presavijanje iz zadatka zapravo tvore tri osne simetrije. Znamo da se vrh B u osnoj simetriji s obzirom na pravac FG preslika u točku M. Međutim, pravci BM i FG su okomiti jer je kut kod vrha F u pravokutniku $EFGH$ pravi kut. Iz definicije osne simetrije slijedi da točka F mora biti polovište dužine $\overline{MB}$, odnosno da vrijedi:

$$\left|\overline{FB}\right| = \left|\overline{FM}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{BM}\right|.$$

Nadalje, i trokut GFB je jednakokračan pravokutan trokut (ima pravi kut kod vrha F, mjera kuta kod vrha B iznosi $45°$, pa je i mjera kuta kod vrha G $45°$) pa vrijedi:

$$\left|\overline{FB}\right| = \left|\overline{FG}\right|.$$

Iz navedenih dviju jednakosti i jednakosti $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{BM}\right| = \left|\overline{CM}\right|$ slijedi:

$$\left|\overline{FG}\right| = \left|\overline{FB}\right| = \left|\overline{FM}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{BM}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{CM}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot d = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot d,$$

što je i trebalo dokazati. ■

Potpuno analogno kao i tvrdnja 1. dokazuje se

Tvrdnja 2. Vrijede jednakosti:

$$\left|\overline{EH}\right| = \left|\overline{AE}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{CM}\right|.$$ ■

Iz tvrdnji 1. i 2., te jednakosti $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{BM}\right| = \left|\overline{CM}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot d$ sada slijedi:

$$\left|\overline{EF}\right| = \left|\overline{AB}\right| - \left(\left|\overline{AE}\right| + \left|\overline{BF}\right|\right) = \left|\overline{AB}\right| - \left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{CM}\right| + \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{CM}\right|\right) = \left|\overline{AB}\right| - \left|\overline{CM}\right| =$$
$$= \left|\overline{AB}\right| - \left|\overline{BM}\right| = \left|\overline{AM}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot d.$$

Dakle, tražena površina je jednaka:

$$P = \left|\overline{EF}\right|\cdot\left|\overline{FG}\right| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot d\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot d\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 4}\cdot d^2 = \frac{2}{2\cdot 4}\cdot d^2 = \frac{1}{4}\cdot d^2.$$

Napomena: Površina zadanoga trokuta je $P_1 = \frac{1}{2}\cdot d^2$, pa možemo zaključiti da je tražena površina jednaka polovici površine zadanoga trokuta.

15. A. Vrijeme potrebno da svako plovilo prijeđe udaljenost od polazne do odredišne luke jednako je količniku prijeđenoga puta i prosječne brzine. Tako je traženo vrijeme jednako:

$$\Delta t = t_{\text{trajekt}} - t_{\text{katamaran}} = \frac{s}{v_{\text{trajekt}}} - \frac{s}{v_{\text{katamaran}}} = \frac{15\text{ km}}{12\text{ čvorova}} - \frac{15\text{ km}}{36\text{ čvorova}} =$$
$$= \frac{15\text{ km}}{12\cdot 1.852\text{ km/h}} - \frac{15\text{ km}}{36\cdot 1.852\text{ km/h}} = \frac{15\text{ km}}{\frac{12\cdot 1.852}{60}\text{ km/min.}} - \frac{15\text{ km}}{\frac{36\cdot 1.852}{60}\text{ km/min.}} =$$
$$= \frac{15\cdot 60\text{ min.}}{12\cdot 1.852} - \frac{15\cdot 60\text{ min.}}{36\cdot 1.852} = \frac{75\text{ min.}}{1.852} - \frac{25\text{ min.}}{1.852} = \frac{50\text{ min.}}{1.852} \approx 26.99784 \approx 27\text{ min.}$$

16. 1.) 1 950. Iz zahtjeva da ukupan iznos mora biti podijeljen u omjeru 1 : 2 : 3 slijedi da postoji jedinstven $k > 0$ takav da dijelovi na koje je iznos podijeljen iznose k, $2\cdot k$ i $3\cdot k$. Zbroj tih triju iznosa treba biti jednak 3 900, pa dobivamo jednadžbu:

$$k+2\cdot k+3\cdot k=3\ 900,$$
$$6\cdot k=3\ 900, \quad /:6$$
$$k=650.$$

Zaključujemo da je traženi iznos jednak $3\cdot k=3\cdot 650=1\ 950$ kn.

2.) 12.5. Traženi postotak dobit ćemo tako da ukupan broj trkača koji su stigli na cilj za manje od 5 sati (taj broj je jednak 68) podijelimo sa ukupnim brojem svih trkača koji su stigli na cilj (taj broj je jednak $\frac{85}{100}\cdot 640=544$) i dobiveni količnik pomnožimo sa 100 (jer rezultat treba iskazati u postotcima). Dakle,

$$p=\frac{68}{544}\cdot 100=\frac{1}{8}\cdot 100=12.5.$$

17.1.) $x>-\frac{1}{5}$ ili $\left\langle -\frac{1}{5},+\infty\right\rangle$. Imamo redom:

$$x+4-3\cdot x^2-12\cdot x<6-x-3\cdot x^2,$$
$$x+4-12\cdot x<6-x,$$
$$x-12\cdot x+x<6-4,$$
$$(-10)\cdot x<2, \quad /:(-10)$$
$$x>-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}.$$

Svi realni brojevi strogo veći od $-\frac{1}{5}$ tvore interval $\left\langle -\frac{1}{5},+\infty\right\rangle$. Taj interval je skup svih rješenja zadane nejednadžbe.

2.) -3. Izrazimo x iz druge jednadžbe sustava, pa dobiveni izraz uvrstimo u prvu jednadžbu sustava. Lako vidimo da je $x=\frac{4}{9}\cdot y^2$, pa slijedi:

$$3\cdot\frac{4}{9}\cdot y^2+8\cdot y+12=0,$$
$$\frac{4}{3}\cdot y^2+8\cdot y+12=0, \quad /:\frac{4}{3}$$
$$y^2+6\cdot y+9=0,$$
$$(y+3)^2=0,$$
$$y+3=0,$$
$$y=-3.$$

18.1.) 6. Zapravo tražimo ukupan broj svih cijelih brojeva čija apsolutna vrijednost

pripada skupu $\{9,10,11\}$. Za svaki element toga skupa postoje točno dva cijela broja koja imaju apsolutnu vrijednost jednaku tom elementu. Apsolutnu vrijednost 9 imaju cijeli brojevi -9 i 9, apsolutnu vrijednost 10 imaju cijeli brojevi -10 i 10, a apsolutnu vrijednost 11 imaju cijeli brojevi -11 i 11. Dakle, traženi je broj jednak 6.

2.)15. Neka je q količnik toga niza. Iz zadanih podataka dobivamo jednadžbu $5\cdot q^{4-1}=135$, otkuda dijeljenjem sa 5 slijedi $q^3=27$. Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $q=3$. Zbog toga je traženi broj jednak $5\cdot 3=15$.

Napomena: Da bi zadatak bio potpuno korektan, nužno je pretpostaviti da se radi o nizu realnih brojeva. Ako bismo pretpostavili da se radi o nizu kompleksnih brojeva, onda postoje točno tri različite moguće vrijednosti količnika *q*, pa samim tim i točno tri rješenja zadatka.

19.1.) 1260.-ti. Traženi je broj jednak najmanjem zajedničkom višekratniku brojeva 84, 105 i 126. Rastavom svakoga od tih brojeva na proste faktore dobivamo:

$$84=2\cdot 2\cdot 3\cdot 7,$$
$$105=3\cdot 5\cdot 7,$$
$$126=2\cdot 3\cdot 3\cdot 7.$$

Odatle slijedi da je traženi broj jednak $2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7=1\,260$.

2.) 80. Označimo sa b_1 i b_2 redom volumen ulja u prvoj, odnosno drugoj bačvi. Prema podatcima u zadatku, ukupan volumen ulja u objema bačvama iznosi 140 L, pa mora vrijediti jednakost:

$$b_1+b_2=140.$$

Ako se osmina ulja iz prve bačve prelije u drugu bačvu, u prvoj će bačvi ostati ukupno $b_1-\frac{1}{8}\cdot b_1=b_1\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{8-1}{8}\right)\cdot b_1=\frac{7}{8}\cdot b_1$ litara ulja. Nakon učinjenoga prelijevanja, volumen ulja u drugoj bačvi bit će jednak $b_2+\frac{1}{8}\cdot b_1$ litara. Prema zahtjevu zadatka, ta dva volumena trebaju biti jednaka, pa dobivamo jednakost:

$$\frac{7}{8}\cdot b_1=b_2+\frac{1}{8}\cdot b_1,$$
$$b_2=\frac{7}{8}\cdot b_1-\frac{1}{8}\cdot b_1=\frac{6}{8}\cdot b_1=\frac{3}{4}\cdot b_1.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 140, \\ b_2 = \frac{3}{4} \cdot b_1. \end{cases}$$

Zadatak traži da se odredi vrijednost b_1. Uvrštavanjem druge jednadžbe sustava u prvu jednadžbu sustava dobivamo redom:

$$\begin{aligned} & b_1 + \frac{3}{4} \cdot b_1 = 140, \\ & b_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right) = 140, \\ & \left(\frac{4+3}{4}\right) \cdot b_1 = 140, \\ & \frac{7}{4} \cdot b_1 = 140, \quad / : \frac{7}{4} \\ & b_1 = 80. \end{aligned}$$

20.1.) $\frac{6}{5} = 1.2$. Prema pretpostavci, f je linearna funkcija, što znači da postoje konstante $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, takvi da je $f(x) = a \cdot x + b$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Iz tablice je vidljivo da su $f(0) = -42$ i $f(2) = 28$. Uvrštavanjem $x = 0$ u pravilo funkcije f dobivamo:

$$f(0) = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow f(0) = 0 + b = b.$$

U ovu jednakost uvrstimo jednakost $f(0) = -42$, pa odmah dobivamo $b = -42$. Nadalje, uvrštavanjem $x = 2$ u pravilo funkcije f dobivamo:

$$f(2) = a \cdot 2 + b.$$

U ovu jednakost uvrstimo $f(2) = 28$ i $b = -42$, pa slijedi:

$$\begin{aligned} & 28 = a \cdot 2 + (-42), \\ & 2 \cdot a = 28 + 42, \\ & 2 \cdot a = 70, \quad / : 2 \\ & a = 35. \end{aligned}$$

Dakle, $f(x) = 35 \cdot x - 42$. Vrijednost x_0 za koju je $f(x_0) = 0$ dobit ćemo izjednačavanjem pravila funkcije f sa nulom i rješavanjem dobivene linearne jednadžbe 1. stupnja s jednom nepoznanicom:

$$35 \cdot x_0 - 42 = 0,$$
$$35 \cdot x_0 = 42, \quad / : 35$$
$$x_0 = \frac{42}{35} = \frac{6}{5} = 1.2.$$

Prema tome, u tablicu treba upisati $\frac{6}{5}$ ili 1.2.

2.) $y = -\frac{5}{4} \cdot x$ **ili** $5 \cdot x + 4 \cdot y = 0$**.** Iz podatka da je traženi pravac okomit na zadani zaključujemo da je koeficijent smjera traženoga pravca suprotan i recipročan u odnosu na koeficijent smjera zadanoga pravca, tj. $k = -\frac{1}{\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$. Iz podatka da traženi pravac prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini zaključujemo da je njegov odsječak na osi ordinata jednak 0. Dakle, eksplicitni oblik jednadžbe traženoga pravca je $y = -\frac{5}{4} \cdot x$.

21.1.) $\sqrt{41}$**.** Jednadžbu zadane kružnice najprije iz razvijenoga prevedemo u kanonski oblik:

$$\left(x - \frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 0,$$
$$(x-4)^2 - 4^2 + (y+5)^2 - 5^2 = 0,$$
$$(x-4)^2 - 16 + (y+5)^2 - 25 = 0,$$
$$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 25 + 16,$$
$$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 41.$$

Odatle zaključujemo da je $r^2 = 41$, odnosno $r = \sqrt{41}$.

2.) $y = -\frac{1}{4} \cdot x - 1$. Odredimo najprije nepoznatu ordinatu točke T. Tražimo strogo negativno rješenje kvadratne jednadžbe $y^2 = 4$. Ono je jednako $y_T = -2$. Dakle, $T = (4, -2)$. Iz jednadžbe parabole očitamo $2 \cdot p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$. Tako tražena jednadžba tangente glasi:

$$(-2) \cdot y = \frac{1}{2} \cdot (x + 4),$$
$$(-2) \cdot y = \frac{1}{2} \cdot x + 2, \quad / : (-2)$$
$$y = -\frac{1}{4} \cdot x - 1.$$

22.1.) $x \geq 2$ **ili** $[2,+\infty\rangle$. Funkcija drugoga korijena je definirana ako i samo ako je radikand (izraz pod korijenom) nenegativan. Tako dobivamo sustav dviju linearnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom kojega riješimo na uobičajeni način:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2,+\infty\rangle.$$

2.) $x = \frac{1}{64}$. Uvedemo li zamjenu $t := \sqrt[6]{x}$, onda je $\sqrt[3]{x} = t^2$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 + 0.25 = t.$$

Nju ne moramo rješavati na uobičajeni način uočimo li da je $t^2 - t + 0.25 = (t-0.5)^2$. Tako iz $t^2 + 0.25 = t$ slijedi $(t-0.5)^2 = 0$, odnosno $t - 0.5 = 0$, odnosno $t = 0.5$. Napokon iz jednadžbe $\sqrt[6]{x} = 0.5$ slijedi $x = 0.5^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.

23. 1.) $\frac{\pi}{2}$. Najprije dokažimo sljedeću tvrdnju.

Tvrdnja 3. Neka je $\alpha > 0$. Temeljni period funkcije $f(x) = \mathrm{tg}(\alpha \cdot x)$ jednak je $\frac{\pi}{\alpha}$.

Dokaz: Prema definiciji temeljnoga perioda, tražimo najmanji strogo pozitivni broj T takav da je $f(x+T) = f(x)$. Koristeći adicijski teorem za funkciju sinus, imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tg}(\alpha \cdot (x+T)) = \mathrm{tg}(\alpha \cdot x), \\
&\frac{\sin(\alpha \cdot (x+T))}{\cos(\alpha \cdot (x+T))} = \frac{\sin(\alpha \cdot x)}{\cos(\alpha \cdot x)}, \\
&\frac{\sin(\alpha \cdot (x+T))}{\cos(\alpha \cdot (x+T))} - \frac{\sin(\alpha \cdot x)}{\cos(\alpha \cdot x)} = 0, \\
&\frac{\sin(\alpha \cdot (x+T)) \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \cos(\alpha \cdot (x+T)) \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{\cos(\alpha \cdot (x+T)) \cdot \cos(\alpha \cdot x)} = 0, \\
&\frac{\sin(\alpha \cdot (x+T) - \alpha \cdot x)}{\cos(\alpha \cdot (x+T)) \cdot \cos(\alpha \cdot x)} = 0, \\
&\frac{\sin(\alpha \cdot x + \alpha \cdot T - \alpha \cdot x)}{\cos(\alpha \cdot (x+T)) \cdot \cos(\alpha \cdot x)} = 0, \\
&\frac{\sin(\alpha \cdot T)}{\cos(\alpha \cdot (x+T)) \cdot \cos(\alpha \cdot x)} = 0.
\end{aligned}$$

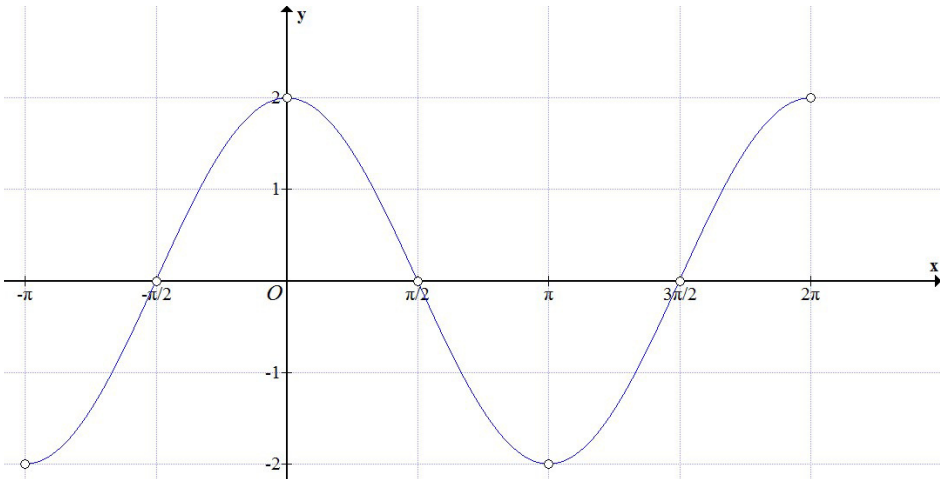
Posljednja jednakost mora vrijediti za svaki dopustivi $x \in \mathbb{R}$, a to će biti ispunjeno ako i samo ako je $\sin(\alpha \cdot T) = 0$. Odatle slijedi $\alpha \cdot T = k \cdot \pi$, odnosno $T = k \cdot \frac{\pi}{\alpha}$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$. Najmanji strogo pozitivan T dobiva se za $k = 1$ i iznosi $T_1 = \frac{\pi}{\alpha}$, što je i trebalo pokazati. ■

U ovome je zadatku $\alpha = 2$, pa primjenom tvrdnje 3. slijedi $T = \frac{\pi}{2}$.

2.) Vidjeti sliku 1. Izračunajmo vrijednosti funkcije f za svaki element skupa $S = \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \{-1, 1, 0, 1, 2, 3, 4\} \right\}$. U tu svrhu popunimo donju tablicu.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2} \cdot \pi$	$2 \cdot \pi$
$f(x)$	–2	0	2	0	–2	0	2

Ucrtamo pripadne točke u pravokutni koordinatni sustav, pa ih spojimo kosinusoidom. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

24.1.) ≈ 36.85 cm. Neka je c tražena duljina. Primjenom interpretacije funkcije sinus za kutove pravokutnoga trokuta, dobivamo jednadžbu $\sin 28^\circ = \frac{17.3}{c}$ iz koje odmah slijedi $c = \frac{17.3}{\sin 28^\circ} \approx \frac{17.3}{0.46947156} \approx 36.8499423 \approx 36.85$ cm.

2.) $\overrightarrow{KL} - \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{KM}$. Prema pretpostavci, četverokut $KLMN$ je paralelogram, pa vrijedi vektorska jednakost $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$. Iz podatka da je $\left|\overrightarrow{KT}\right| = \frac{3}{4} \cdot \left|\overrightarrow{KM}\right|$ slijedi jednakost

odgovarajućih duljina vektora, tj. $\left|\overrightarrow{KT}\right| = \frac{3}{4} \cdot \left|\overrightarrow{KM}\right|$. Točke T i M se nalaze s iste strane pravca KM, pa vektori $\overrightarrow{KT}$ i $\overrightarrow{KM}$ imaju istu orijentaciju. Zbog toga iz $\left|\overrightarrow{KT}\right| = \frac{3}{4} \cdot \left|\overrightarrow{KM}\right|$ slijedi $\overrightarrow{KT} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{KM}$, odnosno $\overrightarrow{TM} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{KM}$.

Preostaje uočiti da točke T, N i M tvore trokut, pa prema pravilu trokuta za vektore mora vrijediti vektorska jednakost $\overrightarrow{TM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NT} = \vec{0}$. Iz te jednakosti izrazimo traženi vektor $\overrightarrow{NT}$ i primijenimo prethodno dobivene vektorske jednakosti, pa dobijemo:

$$\overrightarrow{NT} = -\overrightarrow{TM} - \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{NM} = -\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KL} - \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{KM}.$$

25.1.) 119°. Radi određenosti, označimo sa S sjecište povučenih tangenata. Promotrimo kružni luk $\overset{\frown}{DB}$ (dobijemo ga krećući se po zadanoj kružnici od točke D točke B u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu). Središnji kut nad tim lukom jednak je kutu $\angle DAB$. Kut $\angle BCD$, čiju mjeru tražimo, jednak je obodnom kutu nad tim lukom. Prema Teoremu u obodnom i središnjem kutu mora vrijediti jednakost:

$$m(\angle BCD) = \frac{1}{2} \cdot m(\angle DAB),$$

pri čemu je s m označena funkcija koja svakom kutu pridružuje njegovu mjeru. Nadalje, lako se vidi da je $m(\angle DAB)$ može izračunati i tako da se od 360° oduzme mjera kuta A u četverokutu $BSDA$. Dakle,

$$m(\angle BCD) = \frac{1}{2} \cdot m(\angle DAB) = \frac{1}{2} \cdot \left(360^\circ - m(\angle A)\right) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot m(\angle A).$$

No, u uočenom četverokutu $BSDA$ kutovi kod vrhova B i D su pravi kutovi (jer je riječ o kutovima koje zatvaraju tangente povučene u tim točkama sa pravcima AB i AD kojima pripadaju polumjeri zadane kružnice), pa zbroj mjere kuta kod vrha A i mjere kuta kojega zatvaraju tangente (tj. mjere kuta kod vrha S) u tom četverokutu mora biti jednak $360^\circ - \left(90^\circ + 90^\circ\right) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$. To znači da mora vrijediti jednakost:

$$m(\angle A) + m(\angle S) = 180^\circ,$$

iz koje je

$$m(\angle A) = 180^\circ - m(\angle S).$$

Uvrštavanjem ove jednakosti u jednakost $m(\angle BCD)=180^\circ-\frac{1}{2}\cdot m(\angle A)$ dobijemo:

$$m(\angle BCD)=180^\circ-\frac{1}{2}\cdot\left(180^\circ-m(\angle S)\right),$$
$$m(\angle BCD)=180^\circ-\frac{1}{2}\cdot 180^\circ+\frac{1}{2}\cdot m(\angle S),$$
$$m(\angle BCD)=180^\circ-90^\circ+\frac{1}{2}\cdot m(\angle S),$$
$$m(\angle BCD)=90^\circ+\frac{1}{2}\cdot m(\angle S).$$

Preostaje uvrstiti $m(\angle S)=58^\circ$ u dobivenu jednakost, te konačno dobiti:

$$m(\angle BCD)=90^\circ+\frac{1}{2}\cdot 58^\circ=90^\circ+29^\circ=119^\circ.$$

2.) 10. Za određivanje tražene duljine dvaput ćemo primijeniti kosinusov teorem. Kosinus unutrašnjega kuta pri vrhu T trokuta čije stranice imaju duljine 6 cm, 4 cm i 8 cm jednak je:

$$\cos(\angle T)=\frac{6^2+8^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 8}=\frac{36+64-16}{96}=\frac{84}{96}=\frac{7}{8}.$$

Preostaje primijeniti kosinusov teorem na trokut RST. Duljine dviju stranica toga trokuta su $14+6=20$ cm i $8+7=15$ cm, kosinus kuta nasuprot preostaloj (trećoj) stranici trokuta jednak je $\frac{7}{8}$, pa je tražena duljina jednaka:

$$\left|\overline{RS}\right|=\sqrt{20^2+15^2-2\cdot 20\cdot 15\cdot\frac{7}{8}}=\sqrt{400+225-525}=\sqrt{100}=10\text{ cm}.$$

3.) $18\cdot\sqrt{3}$. Pobočje tvore tri pravokutnika. Svaki od njih ima jednu stranicu čija je duljina jednaka visini prizme, a drugu stranicu jednaku jednoj od stranica baze. Tako odmah slijedi:

$$P=a\cdot v+b\cdot v+c\cdot v=(a+b+c)\cdot v=(8+7+3)\cdot\sqrt{3}=18\cdot\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

Napomena: Površina pobočja *bilo koje* uspravne prizme jednaka je umnošku opsega baze (osnovke) i duljine visine te prizme. Dokaz te tvrdnje je potpuno analogan rješenju gornjega zadatka.

26.1.) $\left\langle -\frac{3}{8}, +\infty \right\rangle$**.** Logaritmand (izraz pod logaritmom) mora biti strogo pozitivan, pa dobivamo:

$$\begin{aligned} &8 \cdot x + 3 > 0, \\ &8 \cdot x > -3, \quad / : 8 \\ &x > \frac{-3}{8}. \end{aligned}$$

Dakle, zadana funkcija je definirana za sve realne brojeve koji su strogo veći od $-\frac{3}{8}$. Oni tvore interval $\left\langle -\frac{3}{8}, +\infty \right\rangle$. Taj skup je tražena prirodna domena.

2.) $(0,1 + \log_{\frac{1}{2}} 3) = (0,1 - \log_2 3)$.**.** Prva koordinata sjecišta grafa *bilo koje* funkcije f definirane u 0 sa osi ordinata je upravo 0, dok je druga koordinata toga sjecišta jednaka $f(0)$. Izračunajmo $f(0)$ koristeći osnovna svojstva logaritamske funkcije:

$$f(0) = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(8 \cdot 0 + 3) = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(0 + 3) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} 3 = 1 + \log_{2^{-1}} 3 = 1 - \log_2 3.$$

Dakle, traženo sjecište je $S = (0,1 + \log_{\frac{1}{2}} 3) = (0,1 - \log_2 3)$.

3.) $\frac{2}{8 \cdot x + 3.}$. Koristeći osnovna svojstva eksponencijalne i logaritamske funkcije imamo redom:

$$\begin{aligned} &(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(1 + \log_{\frac{1}{2}}(8 \cdot x + 3)\right) = g\left(1 + \log_{2^{-1}}(8 \cdot x + 3)\right) = \\ &= g\left(1 - \log_2(8 \cdot x + 3)\right) = 2^{1 - \log_2(8 \cdot x + 3)} = \frac{2^1}{2^{\log_2(8 \cdot x + 3)}} = \frac{2}{8 \cdot x + 3.} \end{aligned}$$

27.1.) $3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$. Koristeći pravilo deriviranja složene funkcije dobivamo:

$$f'(x) = \left(\sin^3 x\right)' = 3 \cdot (\sin x)^{3-1} \cdot (\sin x)' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x.$$

2.) $b > \frac{2}{5}$ **ili** $b \in \left\langle \frac{2}{5}, +\infty \right\rangle$. Eksponencijalna funkcija $f_1(x) = a^x$ je strogo rastuća ako i samo ako je baza te funkcije (a) strogo veća od 1. Tako dobivamo linearnu nejednadžbu 1. stupnja s jednom nepoznanicom:

$$10 \cdot b - 3 > 1.$$

Riješimo tu nejednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned} &10\cdot b-3>1,\\ &10\cdot b>1+3,\\ &10\cdot b>4, \quad /:10\\ &b>\frac{4}{10}=\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Dakle, zadana funkcija će biti rastuća ako i samo ako je $b>\frac{2}{5}$. Skup svih takvih realnih brojeva je interval $\left\langle \frac{2}{5},+\infty \right\rangle$.

3.) ***f*** **je neparna, a** ***g*** **nije ni parna, ni neparna.** Za funkciju g možemo dati odgovor bez promatranja slike/grafa jer je njezina domena $[1,5]$, a u tom se intervalu ne nalazi nijedan strogo negativan realan broj. (Da bi funkcija bila (ne)parna, njezina domena nužno mora sadržavati jednako mnogo pozitivnih i negativnih brojeva.)

Promatrajući sliku, vidimo da za svaki $x\in[0,2]$ vrijedi tvrdnja: $T=(x,f(x))\in\Gamma_f$ ako i samo ako $T_1=(-x,-f(x))\in\Gamma_f$. Dakle, „čim x promijeni predznak, onda i $f(x)$ promijeni predznak“, a to je upravo (slobodna i neprecizna) interpretacija neparne funkcije. Matematički formalno, rekli bismo da je graf funkcije f centralno simetričan s obzirom na ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava. Tako zaključujemo da je f neparna funkcija.

28. Jednadžba nema rješenja za $p=3$. Za $p\neq 3$ jednadžba ima jedinstveno rješenje $x=\frac{2\cdot p}{p-3}$. Iz zadane jednadžbe redom slijedi:

$$\begin{aligned} &p\cdot x-3\cdot x=2\cdot p,\\ &x\cdot(p-3)=2\cdot p. \end{aligned}$$

Sada moramo razlikovati točno dva slučaja:

1.) $p=3$. U ovom slučaju naša jednadžba glasi: $0\cdot x=6$. Ta jednadžba očito nema rješenja.

2.) $p\neq 3$. U ovom je slučaju $p-3\neq 0$, pa jednadžbu $x\cdot(p-3)=2\cdot p$ smijemo podijeliti s $p-3$. Tako dobijemo $x=\frac{2\cdot p}{p-3}$ i to je jedinstveno rješenje zadane jednadžbe.

29.1.) $n-1$. Prema definiciji funkcije faktorijela, a uz korištenje formule za razliku kvadrata, imamo redom:

$$\frac{n^2\cdot n!-n!}{(n+1)!}=\frac{n!\cdot\left(n^2-1\right)}{(n+1)\cdot n!}=\frac{n^2-1}{n+1}=\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n+1}=n-1.$$

2.) ≈ 3.672. Neka su a i α redom duljina stranice, te središnji kut pravilnoga sedmerokuta. Sedmerokut tvori ukupno sedam sukladnih jednakokračnih trokutova. Osnovica svakoga od tih trokutova je osnovica sedmerokuta, dok je kut nasuprot osnovici jednak središnjemu kutu pravilnoga sedmerokuta. Visinu v na osnovicu možemo odrediti primjenom trigonometrije pravokutnoga trokuta:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{v}{\frac{a}{2}}\Rightarrow v=\frac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

pa je površina sedmerokuta sedam puta veća od površine jednoga od uočenih sedam trokutova:

$$P=7\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot v=\frac{7}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{7}{4}\cdot a^2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Odavde izrazimo traženu duljinu stranice a:

$$\begin{aligned}
P&=\frac{7}{4}\cdot a^2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, && /\cdot\frac{4}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\\
a^2&=\frac{4}{7}\cdot P\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, && /\sqrt{}\\
a&=\sqrt{\frac{4}{7}\cdot P\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

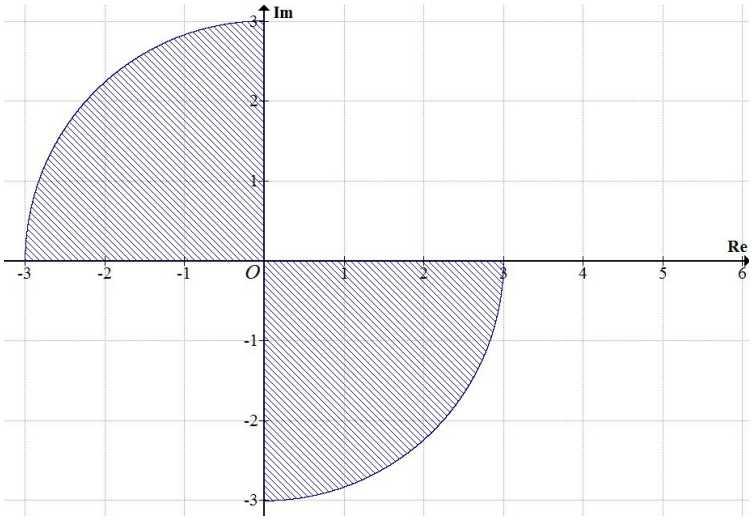
U ovaj izraz uvrstimo $P=49$ i $\alpha=\frac{360^\circ}{7}$, pa dobijemo:

$$a=\sqrt{\frac{4}{7}\cdot 49\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{360^\circ}{7}}{2}\right)}=\sqrt{28\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{7}\right)}\approx\sqrt{13.484089}\approx 3.672069\approx 3.672\text{ cm}.$$

3.) Vidjeti sliku 2. $P=\frac{9}{2}\cdot\pi.$ Prisjetimo se geometrijske interpretacije apsolutne vrijednosti kompleksnoga broja. U Gaussovoj ravnini taj pojam predstavlja duljinu spojnice točke pridružene nekom kompleksnom broju i ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava u Gaussovoj ravnini. To znači da, za $a\geq 0$, izraz $|z|\leq a$ zadaje skup svih točaka u Gaussovoj ravnini koje su od ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava u toj ravnini udaljene najviše za a jedinica duljine. No, to je upravo geometrijska definicija zatvorenoga kruga sa središtem u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini i polumjerom a. Dakle, izraz $|z|\leq 3$ u Gaussovoj ravnini zadaje središnji krug polumjera 3.

Izrazom $\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)\leq 0$ zadane su sve točke Gaussove ravnine koje se ili nalaze na nekoj od koordinatnih osi (u tom slučaju je navedeni umnožak jednak nuli) ili imaju svojstvo da su njihove koordinate različitih predznaka. Naime, umnožak dvaju realnih brojeva je strogo negativan ako i samo ako su ti brojevi različitih predznaka. Ako na trenutak zanemarimo koordinatne osi, onda točke Gaussove ravnine čije su koordinate različitih predznaka leže u II. I IV. kvadrantu te ravnine.

Dakle, traženi skup tvore dvije sukladne četvrtine središnjega kruga polumjera 3. Prva četvrtina nalazi se u II. kvadrantu (uključujući i koordinatne osi), a druga u IV. kvadrantu (uključujući i koordinatne osi). Traženi je skup prikazan na slici 2.



Slika 2.

Njegova je površina jednaka polovici površine kruga čiji je polumjer 3 jedinice duljine, pa lagano slijedi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\pi=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\pi=\frac{9}{2}\cdot\pi \text{ kv. jed.}$$

4.) -1 i 1. Riješimo najprije prvu jednadžbu. Primijetimo da vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned} 2.56&=\frac{256}{100}=\frac{64}{25}=\left(\frac{8}{5}\right)^2,\\ 0.625&=\frac{625}{1000}=\frac{5}{8}=\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}. \end{aligned}\quad :$$

Tako redom dobivamo:

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}\right)^{2\cdot y^2-3}=\left(\left(\frac{8}{5}\right)^{2}\right)^{0.5\cdot y},\\ &\left(\frac{8}{5}\right)^{(-1)\cdot\left(2\cdot y^2-3\right)}=\left(\frac{8}{5}\right)^{2\cdot 0.5\cdot y},\\ &\left(\frac{8}{5}\right)^{(-2)\cdot y^2+3}=\left(\frac{8}{5}\right)^{y},\\ &(-2)\cdot y^2+3=y,\\ &2\cdot y^2+y-3=0. \end{aligned}$$

Prema zahtjevu zadatka, mora vrijediti jednakost $|x|=y$. Lijeva strana ove jednakosti je nenegativna, pa takva mora biti i desna strana. Dakle, u obzir dolazi jedino nenegativno rješenje jednadžbe $2\cdot y^2+y-3=0$, pa odredimo to rješenje:

$$2\cdot y^2+y-3=0\Rightarrow y=\frac{-1+\sqrt{1^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{-1+\sqrt{1-(-24)}}{4}=\frac{-1+\sqrt{1+24}}{4}=$$
$$=\frac{-1+\sqrt{25}}{4}=\frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Preostaje riješiti jednadžbu $|x|=1$. Prema definiciji funkcije apsolutne vrijednosti, odavde izravno slijedi $x_1=1$ i $x_2=-1$. To su svi realni brojevi koji su rješenje ovoga zadatka.

5.) $3\cdot x^2 - y^2 = 3.$ Neka je $T=(x_T, y_T)$ bilo koja točka koja ima svojstvo iz zadatka. Udaljenost od točke T do točke A iznosi:

$$d(T,A)=\sqrt{(x_T-2)^2+(y_T-0)^2}=\sqrt{(x_T-2)^2+y_T^2}.$$

Udaljenost točke T do pravca $2\cdot x-1=0 \Leftrightarrow 2\cdot x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ iznosi

$$d(T,p)=\left|x_T-\frac{1}{2}\right|.$$

Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti jednakost $d(T,A)=2\cdot d(T,p)$, pa uvrštavanjem gornjih izraza u navedenu jednakost dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x_T-2)^2+y_T^2}=2\cdot\left|x_T-\frac{1}{2}\right|,\\
&\sqrt{(x_T-2)^2+y_T^2}=\left|2\cdot\left(x_T-\frac{1}{2}\right)\right|,\\
&\sqrt{(x_T-2)^2+y_T^2}=|2\cdot x_T-1| \qquad /^2\\
&(x_T-2)^2+y_T^2=(2\cdot x_T-1)^2,\\
&x_T^2-4\cdot x_T+4+y_T^2=4\cdot x_T^2-4\cdot x_T+1,\\
&4\cdot x_T^2-4\cdot x_T+1-x_T^2+4\cdot x_T-4-y_T^2=0,\\
&3\cdot x_T^2-y_T^2-3=0.
\end{aligned}$$

(Kvadriranje u trećem koraku smo smjeli provesti jer su obje strane jednakosti nenegativni realni brojevi.) S obzirom da je T, prema pretpostavci, bila proizvoljna točka sa zadanim svojstvima, izostavljanjem indeksa dobivamo:

$$3\cdot x^2-y^2-3=0 \Leftrightarrow 3\cdot x^2-y^2=3..$$

Dakle, tražena krivulja je hiperbola $3\cdot x^2-y^2=3.$

30. $\left(\frac{3}{2},10\right).$ Graf funkcije f očito prolazi točkom $N=(4,5).$ To znači da mora vrijediti jednakost $f(4)=5.$ Uvrštavanjem tih podataka u pravilo funkcije f dobivamo:

$$\begin{aligned}
&f(4)=\frac{B-4\cdot 4}{4^2-4\cdot 4+5}+C,\\
&5=\frac{B-16}{16-16+5}+C,
\end{aligned}$$

$$5=\frac{B-16}{5}+C, \quad /\cdot 5$$
$$25=B-16+5\cdot C,$$
$$B+5\cdot C=25+16,$$
$$B+5\cdot C=41.$$

Iz podatka da u točki N funkcija f postiže lokalni minimum primjenom Fermatova teorema zaključujemo da je vrijednost prve derivacije funkcije f u točki $c=4$ jednaka nuli, tj. $f^{'}(4)=0$. Zbog toga odredimo $f^{'}$ i $f^{'}(4)$, pa izjednačimo potonji izraz sa nulom. Primjenom pravila za deriviranje količnika dviju funkcija i tablice derivacija elementarnih funkcija imamo redom:

$$f^{'}(x)=\frac{(B-4\cdot x)^{'}\cdot\left(x^2-4\cdot x+5\right)-(B-4\cdot x)\cdot\left(x^2-4\cdot x+5\right)^{'}}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}+(C)^{'}=$$
$$=\frac{\left((B)^{'}-4\cdot(x)^{'}\right)\cdot\left(x^2-4\cdot x+5\right)-(B-4\cdot x)\cdot\left(\left(x^2\right)^{'}-4\cdot(x)^{'}+(5)^{'}\right)}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}+0=$$
$$=\frac{(0-4\cdot 1)\cdot\left(x^2-4\cdot x+5\right)-(B-4\cdot x)\cdot\left(2\cdot x^{2-1}-4\cdot 1+0\right)}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}=$$
$$=\frac{(-4)\cdot\left(x^2-4\cdot x+5\right)-(B-4\cdot x)\cdot(2\cdot x-4)}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}=$$
$$=\frac{(-4)\cdot x^2+16\cdot x-20-2\cdot B\cdot x+8\cdot x^2+4\cdot B-16\cdot x}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}=$$
$$=\frac{4\cdot x^2-2\cdot B\cdot x+4\cdot B-20}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}\Rightarrow$$
$$f^{'}(4)=\frac{4\cdot 4^2-2\cdot B\cdot 4+4\cdot B-20}{\left(4^2-4\cdot 4+5\right)^2}=\frac{4\cdot 16-8\cdot B+4\cdot B-20}{(16-16+5)^2}=\frac{64-4\cdot B-20}{5^2}=\frac{44-4\cdot B}{25},$$
$$f^{'}(4)=0\Rightarrow 44-4\cdot B=0\Leftrightarrow 4\cdot B=44\Leftrightarrow B=11.$$

Sada iz $B+5\cdot C=41$ slijedi $11+5\cdot C=41\Leftrightarrow 5\cdot C=41-11\Leftrightarrow 5\cdot C=30\Leftrightarrow C=6.$ Dakle, $f(x)=\frac{11-4\cdot x}{x^2-4\cdot x+5}+6$, te

$$f^{'}(x)=\frac{4\cdot x^2-2\cdot 11\cdot x+4\cdot 11-20}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}=\frac{4\cdot x^2-22\cdot x+44-20}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}=\frac{4\cdot x^2-22\cdot x+24}{\left(x^2-4\cdot x+5\right)^2}.$$

Jedno rješenje jednadžbe $4\cdot x^2-22\cdot x+24=0$ već znamo: to je $x_1=4$. Drugo rješenje

lagano odredimo koristeći Vièteove formule. Umnožak obaju rješenja treba biti jednak $\frac{24}{4}=6$, pa je drugo rješenje jednako $x_2=\frac{6}{x_1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$. Da bismo odredili postiže li se za $x_2=\frac{3}{2}$ lokalni maksimum, trebamo provjeriti ima li funkcija f' različite predznake na dovoljno maloj okolini točke $\frac{3}{2}$ takvoj da toj okolini ne pripada točka 4. Uočimo da je nazivnik funkcije f' uvijek strogo pozitivan, pa je dovoljno provjeriti ima li izraz u brojniku te funkcije različite predznake na dovoljno maloj okolini točke $\frac{3}{2}$ takvoj da toj okolini ne pripada točka 4. U tu svrhu odredimo vrijednost brojnika npr. za $x=1$ i za $x=2$:

$$4\cdot 1^2-22\cdot 1+24=4\cdot 1-22+24=4-2=2,$$
$$4\cdot 2^2-22\cdot 2+24=4\cdot 4-44+24=16-20=-4.$$

Time smo potvrdili da funkcija f postiže lokalni maksimum za $x_2=\frac{3}{2}$. Izračunajmo vrijednost toga maksimuma:

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{11-4\cdot\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\cdot\frac{3}{2}+5}+6=\frac{11-6}{\frac{9}{4}-6+5}+6=\frac{5}{\frac{9}{4}-1}+6=\frac{5}{\frac{9-4}{4}}+6=\frac{5}{\frac{5}{4}}+6=4+6=10.$$

Dakle, tražena točka je $T=\left(\frac{3}{2},10\right)$.

Pripremio:

mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač