1. **C.** Imamo redom:

$$1+\frac{\sin 50^\circ}{2}\approx 1+\frac{0.7660444431}{2}\approx 1.383022221\approx 1.38302.$$

2. **C**. Dijeljenjem promjera čestice bakterije s 100 dobivamo da je traženi promjer virusa jednak:

$$d=0.001\cdot 10^{-3}:100=10^{-3}\cdot 10^{-3}:10^{2}=10^{-3-3-2}=10^{-8}\ \text{m}.$$

3. **C.** Koristeći pravila za algebarske operacije s razlomcima zaključujemo da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x\cdot x+y\cdot y}{x\cdot y}=\frac{x^2+y^2}{x\cdot y},$$
$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{x\cdot x-y\cdot y}{x\cdot y}=\frac{x^2-y^2}{x\cdot y},$$
$$\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=\frac{x\cdot y}{y\cdot x}=\frac{x\cdot y}{x\cdot y}=1,$$
$$\frac{x}{y}:\frac{y}{x}=\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}=\frac{x\cdot x}{y\cdot y}=\frac{x^2}{y^2}.$$

Prvi, drugi i četvrti dobiveni rezultat ovise o vrijednostima brojeva x i y, tj. nisu konstantni. Treći dobiveni rezultat jednak je konstanti 1 za sve dopustive x i y.

4. **B**. Koeficijent 1.3 množi vrijednost varijable d koja označava iznos u američkim dolarima. Odatle zaključujemo da jedan američki dolar vrijedi $1.3\cdot 1=1.3$ eura. Da nema troškova usluge zamjene valute, za iznos od d američkih dolara dobili bismo ukupno $1.3\cdot d$ eura. Međutim, zbog tih troškova, iznos $1.3\cdot d$ umanjen je za 1.2 američka dolara. Dakle, troškovi usluge zamjene valute iznose 1.2 američka dolara (bez obzira na iznos američkih dolara koji treba promijeniti).

5. **D**. Neka je d duljina cijele staze. Duljine koje je trkač istrčao u svakoj pojedinoj minuti tvore geometrijski niz kojemu je prvi član $g_1=\frac{30}{100}\cdot d=0.3\cdot d$, a količnik $q=1+\frac{5}{100}=1+0.05=1.05$. Zbroj prvih triju članova toga niza jednak je:

$$S_3=g_1\cdot\frac{q^3-1}{q-1}=0.3\cdot d\cdot\frac{1.05^3-1}{1.05-1}=0.3\cdot d\cdot\frac{1.157625-1}{0.05}=$$
$$=0.3\cdot d\cdot\frac{0.157625}{0.05}=0.94575\cdot d.$$

To znači da je trkaču za istrčati preostalo još

$$d_1 = d - S_3 = d - 0.94575 \cdot d = (1 - 0.94575) \cdot d = 0.05425 \cdot d = \frac{5.425}{100} \cdot d = 5.425\% \cdot d$$

jedinica duljine, odnosno 5.425% duljine cijele staze. Dakle, trkaču je za istrčati preostalo više od 4% duljine cijele staze.

6. **B**. Osnovno svojstvo svakoga polinoma 1. stupnja oblika $p(x) = k \cdot x + l$, gdje su $k, l \in \mathbb{R},\ k \neq 0,$ je: ako se vrijednost nezavisne varijable x promijeni za $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$ onda se vrijednost polinoma p promijeni za $k \cdot a$.

Iz zadane tablice vidimo da ako se vrijednost varijable x poveća sa 1 na 3, tj. za $3 - 1 = 2,$ onda će se vrijednost polinoma p smanjiti sa 3 na -3, tj. smanjiti za $3 - (-3) = 6,$ odnosno promijeniti za -6. Kad se vrijednost varijable x poveća s 1 na 2, tj. za $2 - 1 = 1$, onda će smanjenje vrijednosti polinoma p biti upola manje, tj. njegova vrijednost će se smanjiti za $\frac{6}{2} = 3$ i iznosit će $3 - 3 = 0.$ Dakle, u prazno polje tablice treba upisati 0.

Zadatak smo alternativno (ali duljim načinom) mogli riješiti tako da odredimo jednadžbu zadanoga pravca:

$$\begin{aligned} p \ldots\ y - 3 &= \frac{-3-3}{3-1} \cdot (x-1), \\ y &= \frac{-6}{2} \cdot (x-1) + 3, \\ y &= (-3) \cdot (x-1) + 3, \\ y &= (-3) \cdot x + 3 + 3, \\ y &= (-3) \cdot x + 6. \end{aligned}$$

Uvrštavajući $x = 2$ u tu jednadžbu dobivamo:

$$y = (-3) \cdot 2 + 6 = -6 + 6 = 0.$$

7. **A**. Translatirajmo vektor $\vec{b}$ tako da njegova početna točka bude krajnja točka vektora $\vec{a}$. Potom translatirajmo vektor $\vec{c}$ tako da njegova početna točka bude krajnja točka translatiranoga vektora $\vec{b}$. Tako će krajnja točka vektora $\vec{c}$ biti početna točka vektora $\vec{a}$. To znači da vrijedi jednakost

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

Iz te jednakosti lagano dobivamo:

$$\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}.$$

8. **A**. Usporedbom zadane jednadžbe kružnice s općom jednadžbom kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ zaključujemo da vrijede sljedeće tri jednakosti:

$$\begin{cases} -p = 2, \\ -q = -7, \\ r^2 = 4. \end{cases}$$

Iz prve od njih dobivamo $p = -2$, a iz druge $q = 7$. Zbog prirodnoga uvjeta $r > 0$, iz treće jednakosti slijedi $r = \sqrt{4} = 2$. Dakle, središte kružnice je točka $S = (-2, 7)$, a njezin je polumjer $r = 2$.

9. **A**. Imamo redom:

$$\begin{aligned} & x \cdot y - y^2 + (x-y)^2 + x - y = \\ & = y \cdot (x-y) + (x-y)^2 + x - y = \\ & = y \cdot (x-y) + (x-y)^2 + (x-y) = \\ & = (x-y) \cdot (y + (x-y) + 1) = \\ & = (x-y) \cdot (y + x - y + 1) = \\ & = (x-y) \cdot (x+1). \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da se u rastavu zadanoga izraza na faktore pojavljuje izraz $x+1$.

10. **C**. Zapišimo zadani broj ovako:

$$\begin{aligned} & 25^{10} \cdot 4^{13} = \left(5^2\right)^{10} \cdot \left(2^2\right)^{13} = 5^{2 \cdot 10} \cdot 2^{2 \cdot 13} = 5^{20} \cdot 2^{26} = 5^{20} \cdot 2^{20} \cdot 2^6 = \\ & = (5 \cdot 2)^{20} \cdot 2^6 = 2^6 \cdot 10^{20}. \end{aligned}$$

Prvi faktor ne sadrži nijednu nulu. Drugi faktor sadrži ukupno 20 nula. Zbog toga zadani broj sadrži 20 nula, tj. u njemu se znamenka 0 pojavljuje ukupno 20 puta.

11. **B**. Najvjerojatniji je onaj događaj čiji skup povoljnih ishoda ima najviše elemenata (jer su sva četiri skupa povoljnih događaja konačni skupovi). Naime, u svim četirima događajima skup mogućih ishoda je isti (jedna kalendarska godina).
Svaka kalendarska godina ima ili 52 ili 53 tjedna, pa je ukupan broj petaka jednak 52 ili 53.

Analogno, ukupan broj subota ili nedjelja u jednoj kalendarskoj godini jednak je ili $52+52=104$ ili $53+52=105$ ili $53+53=106.$
Svaki travanj ima točno 30 dana.
Svaka jesen obuhvaća 8 dana u rujnu, 31 dan u listopadu, 30 dana u studenom i 20 dana u prosincu, tj. ukupno $8+31+30+20=89$ dana.
Tako zaključujemo da skup povoljnih ishoda u događaju **B** ima najviše elemenata (104, 105 ili 106), pa je taj događaj najvjerojatniji.

12. D. Neka je N masa voća ubrana 2019. godine (iskazana u kg). Tada je masa voća ubrana 2020. godine jednaka $3\cdot N$. Masa voća ubrana 2021. godine jednaka je $N+3\cdot N-1200=4\cdot N-1200.$ Ta masa mora biti strogo veća od 5000, pa dobivamo nejednadžbu

$$4\cdot N-1200>5000.$$

Riješimo tu nejednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned} &4\cdot N>5000+1200,\\ &4\cdot N>6200, \quad /:4\\ &N>1550. \end{aligned}$$

Dakle, u 2019. godini ubrano je više od 1550 kg voća.

13. D. Znamo da je u jednakostraničnom trokutu svaka težišnica ujedno i simetrala kuta pri vrhu iz kojega je povučena, simetrala stranice trokuta na koju je povučena i visina na stranicu trokuta na koju je povučena. Zbog toga se podudaraju sve četiri karakteristične točke trokuta (ortocentar, središte trokutu opisane kružnice, središte trokutu upisane kružnice i težište).

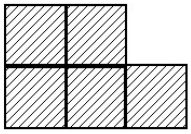
Prema teoremu o težištu, težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 računajući od vrha trokuta iz kojega je povučena ta težišnica. Iz gornjih svojstava i teorema o težištu zaključujemo da je duljina bilo koje visine jednakostraničnoga trokuta trostruko veća od polumjera tom trokutu upisane kružnice. Također, ta je duljina jednaka zbroju polumjera trokutu opisane kružnice i polumjera trokutu upisane kružnice, pri čemu je polumjer trokutu opisane kružnice dvostruko veći od polumjera trokutu upisane kružnice. Zaključujemo da su tvrdnje **A**, **B** i **C** točne.

Međutim, duljina visine trokuta **nije** dvostruko veća od polumjera trokutu opisane kružnice. Naime, polumjer trokutu opisane kružnice jednak je $\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$ duljine visine trokuta. Odatle zaključujemo da je duljina visine trokuta jednaka

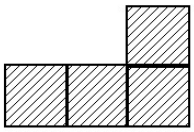
$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ polumjera trokutu opisane kružnice. To zapravo znači da je duljina visine trokuta za 50% veća od polumjera trokutu opisane kružnice.

Dakle, tvrdnja **D** je netočna.

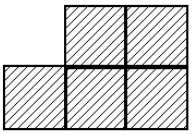
14. **C**. Promatramo li tijelo sa strane 1, vidjet ćemo geometrijski lik oblika:



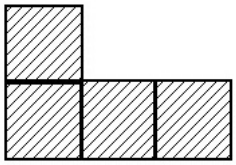
Promatramo li tijelo sa strane 2, vidjet ćemo geometrijski lik oblika:



Promatramo li tijelo sa strane 3, vidjet ćemo geometrijski lik oblika:



Promatramo li tijelo sa strane 4, vidjet ćemo geometrijski lik oblika:



Dakle, tražena strana je strana 3.

15. **B**. Neka je r traženi polumjer. On je polumjeru kružnice opisane trokutu kojemu je jedna stranica zadana tetiva, a kut nasuprot toj stranici jednak obodnom kutu nad zadanom tetivom. Primjenom sinusova poučka odmah dobijemo:

$$2 \cdot r = \frac{d}{\sin\alpha},$$

$$r = \frac{1}{2 \cdot \sin\alpha} \cdot d = \frac{1}{2 \cdot \sin 80^\circ} \cdot 15 = \frac{15}{2 \cdot \sin 80^\circ} \approx 7.6156995891 \approx 7.62 \text{ cm}.$$

16. B. Podnožje tornja, točka u kojoj je postavljen mjerni instrument i vrh tornja određuju vrhove pravokutnoga trokuta, pri čemu je vrh pravoga kuta u podnožju tornja. Navedeno svojstvo vrijedi *neovisno o točki u kojoj je postavljen mjerni instrument*.

Neka su d i h redom tražena udaljenost, odnosno visina tornja. Iz zadane slike primjenom osnovnih trigonometrijskih relacija i gore navedenoga svojstva slijedi:

$$\operatorname{tg} 28^\circ = \frac{h}{60.7}.$$

Približimo li se tornju za d metara u odnosu na točku u kojoj je na početku bio postavljen mjerni instrument, dobit ćemo novi pravokutan trokut u kojemu je:

$$\operatorname{tg}\left(28^\circ + 5^\circ\right) = \frac{h}{60.7 - d}.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 28^\circ = \dfrac{h}{60.7}, \\ \operatorname{tg}\left(28^\circ + 5^\circ\right) = \dfrac{h}{60.7 - d}. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe toga sustava je

$$h = 60.7 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ.$$

Uvrštavanjem te jednakosti u drugu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}\left(28^\circ + 5^\circ\right) = \frac{60.7 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ}{60.7 - d}, \\ &(60.7 - d) \cdot \operatorname{tg} 33^\circ = 60.7 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ, \\ &60.7 \cdot \operatorname{tg} 33^\circ - d \cdot \operatorname{tg} 33^\circ = 60.7 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ, \\ &-d \cdot \operatorname{tg} 33^\circ = 60.7 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ - 60.7 \cdot \operatorname{tg} 33^\circ, \quad / : (-\operatorname{tg} 33^\circ) \\ &d = \frac{60.7 \cdot \operatorname{tg} 33^\circ - 60.7 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ}{\operatorname{tg} 33^\circ} = \frac{60.7 \cdot \left(\operatorname{tg} 33^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ\right)}{\operatorname{tg} 33^\circ} \approx 11.001224 \approx 11 \text{ m}. \end{aligned}$$

17. B. Polumjer bazena jednak je $r = \frac{3.7}{2} = 1.85\,\text{m}$. Visina vode u bazenu iznosi $h = 0.65$ m, pa je volumen vode u bazenu jednak:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h = 1.85^2 \cdot \pi \cdot 0.65 = 2.224625 \cdot \pi \text{ m}^3.$$

Zbog toga je tražena masa klora jednaka

$$m=\frac{V}{10}\cdot 150=V\cdot 15=2.224625\cdot\pi\cdot 15=33.369375\cdot\pi\approx 104.83298335\text{ g}\approx 105\text{ g}.$$

18. C. Rotacijom šiljastokutnoga trokuta oko bilo koje njegove stranice dobivamo rotacijsko tijelo koje tvore dva stošca spojena bazama. Polumjer osnovke *svakoga* od tih dvaju stožaca jednak je duljini visine trokuta povučene na stranicu oko koje rotira trokut. *Zbroj* duljina visina tih stožaca jednak je duljini stranice oko koje rotira trokut.

19. C. Duljina visine bilo koje od četiriju pobočaka jednaka je:

$$v=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=\sqrt{\frac{5}{4}\cdot a^2}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{a^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot a.$$

Zbog toga je traženo oplošje jednako:

$$O=B+P=a^2+4\cdot\frac{a\cdot v}{2}=a^2+2\cdot a\cdot v=a^2+2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot a=$$
$$=a^2+a^2\cdot\sqrt{5}=a^2\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)\text{ kv. jed.}$$

20. A. Koristeći jednakost $\lim\limits_{n}\left(\frac{1}{n}\right)=0$ odmah dobivamo:

$$L=\lim_{n}\left(\frac{1:n}{n+1:n}\right)=\lim_{n}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right)=\lim_{n}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=\frac{0}{1+0}=\frac{0}{1}=0.$$

21. C. Primijetimo da je vodeći koeficijent (koeficijent uz x^2) zadane funkcije jednak -1, odnosno strogo negativan. To znači da zadana funkcija ima globalni maksimum. Iz podatka o slici funkcije zaključujemo da je taj maksimum jednak 3. Tako dobivamo jednadžbu:

$$\frac{4\cdot(-1)\cdot k-(-2)^2}{4\cdot(-1)}=3.$$

Riješimo je na uobičajen način:

$$\frac{(-4)\cdot k-4}{-4}=3,$$

$$\frac{(-4)\cdot k}{-4}-\frac{4}{-4}=3,$$
$$k-(-1)=3,$$
$$k=3+(-1)=3-1=2.$$

22. A. Primijenit ćemo f''-test. Najprije odredimo:

$$f'(x)=\left(2\cdot x^4\right)'+\left(6\cdot x^2\right)'+\left(4\right)'=2\cdot\left(x^4\right)'+6\cdot\left(x^2\right)'+0=2\cdot 4\cdot x^{4-1}+6\cdot 2\cdot x^{2-1}=$$
$$=8\cdot x^3+12\cdot x=4\cdot x\cdot\left(2\cdot x^2+3\right),$$
$$f''(x)=\left(8\cdot x^3\right)'+\left(12\cdot x\right)'=8\cdot\left(x^3\right)'+12\cdot\left(x\right)'=8\cdot 3\cdot x^{3-1}+12\cdot 1=24\cdot x^2+12=12\cdot\left(2\cdot x^2+1\right).$$

Primijetimo da vrijede nejednakosti:

$$\left.\begin{array}{l}2\cdot x^2+1>0,\\ 2\cdot x^2+3>0\end{array}\right\}\forall x\in\mathbb{R}.$$

Naime, svaki član tih izraza je strogo pozitivan, pa su oba izraza – kao zbrojevi strogo pozitivnih realnih brojeva – strogo pozitivna.

Iz jednadžbe $f'(x)=0$ zbog gornje primjedbe izravno slijedi $x=0$. Također zbog gornje primjedbe zaključujemo da je $f''(0)>0$, a odatle da f ima lokalni minimum za $x=0$. Prema tome, zadana funkcija ima točno jedan lokalni ekstrem. Taj minimum se postiže za $x=0$ i iznosi $f(0)=0+0+4=4$.

23. D. 1. način: Riješimo zadanu jednadžbu na uobičajeni način koristeći osnovna svojstva logaritama:

$$\log_4\left(\frac{2\cdot x}{x-1}\right)=2,$$
$$\frac{2\cdot x}{x-1}=4^2,$$
$$\frac{2\cdot x}{x-1}=16,\qquad /\cdot\frac{x-1}{2}$$
$$x=8\cdot(x-1),$$
$$x=8\cdot x-8,$$
$$x-8\cdot x=-8,$$
$$(-7)\cdot x=-8,\qquad /:(-7)$$
$$x=\frac{8}{7}.$$

Primijetimo da vrijede nejednakosti

$$2\cdot\frac{8}{7}>0,$$
$$\frac{8}{7}-1>0,$$

pa zaključujemo da su oba logaritmanda strogo veća od nule, odnosno da je svaki član zadane jednadžbe dobro definiran.

Preostaje zaključiti da je $\frac{8}{7}\in\langle 1,+\infty\rangle$.

2. način: Pretpostavimo da zadana jednadžba ima barem jedno rješenje. Ta pretpostavka je korektna jer su ponuđeni odgovori „konkretni“ intervali, tj. među tim odgovorima nema odgovora „Jednadžba nema rješenja.“ Tada to rješenje nužno mora zadovoljavati nejednakosti:

$$\begin{cases}2\cdot x>0,\\ x-1>0,\end{cases}$$

jer oba logaritmanda (izraza pod logaritmom) moraju biti strogo pozitivna da bi logaritam bio definiran. Standardno riješimo ovaj sustav dviju linearnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom:

$$\begin{cases}2\cdot x>0, & /:2\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}x>0,\\ x>1\end{cases}\Rightarrow$$
$$x>1\Leftrightarrow$$
$$x\in\langle 1,+\infty\rangle.$$

Odatle zaključujemo da je traženi interval $\langle 1,+\infty\rangle$.

Napomena: **Da je među ponuđenim odgovorima bio ponuđen odgovor „Jednadžba nema rješenja.“, ne bismo mogli primijeniti 2. način. U tom bismo slučaju zadatak mogli riješiti samo na prvi način.**

24. D. Imamo redom:

$$100\cdot 2^{\frac{t}{15}}=300,\quad /:100$$

$$2^{\frac{t}{15}} = 3, \quad / \log_2$$
$$\frac{t}{15} = \log_2 3, \quad / \cdot 15$$
$$t = 15 \cdot \log_2 3 = 15 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} \approx 23.77443751 \approx 24 \text{ sata.}$$

25. $\frac{1}{4}$. Primijetimo da je količnik *bilo kojega* realnoga broja različitoga od nule i njemu suprotnoga broja jednak –1. Doista,

$$a : (-a) = -(a : a) = -1, \ \forall a \neq 0.$$

Kad tom količniku dodamo 5, dobijemo $-1+5=4$. Recipročna vrijednost broja 4 jednaka je $\frac{1}{4}$.

26. Bilo koji realan broj jednak ili manji od 23 ili jednak ili veći od 50. Interval $\langle 23, 50 \rangle$ sadrži sve realne brojeve koji su strogo veći od 23 i strogo manji od 50. Komplement toga intervala u skupu $\mathbb{R}$ je skup svih realnih brojeva koji su jednaki ili manji od 23 ili jednaki ili veći od 50. Simbolima zapisano,

$$\mathbb{R} \setminus \langle 23, 50 \rangle = \langle -\infty, 23] \cup [50, +\infty \rangle.$$

Tom skupu pripadaju npr. brojevi 23, 22, 21, 20, … i 50, 51, 52, 53, ….

27. $7 - 8 \cdot i$. Koristit ćemo jednakost $\overline{\overline{z}} = z, \forall z \in \mathbb{C}$. Tako odmah imamo:

$$z = \overline{\overline{z}} = \overline{7 + 8 \cdot i} = 7 - 8 \cdot i.$$

28. 3^{n-1}. Prvi član zadanoga niza jednak je $a_1 = 1$, dok je količnik niza jednak $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$. Dakle, opći član zadanoga niza jednak je:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

29. 1.) $c = \frac{a^2 - b}{2}$. Odmah imamo:

$$a = \sqrt{b + 2 \cdot c}, \quad /^2$$
$$a^2 = b + 2 \cdot c,$$
$$a^2 - b = 2 \cdot c, \quad / : 2$$

$$c=\frac{a^2-b}{2}.$$

2.) $\sqrt[6]{y^5}$. Koristeći pravila za dijeljenje potencija s istom bazom imamo redom:

$$y^{\frac{3}{2}}:y^{\frac{2}{3}}=y^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}=y^{\frac{3\cdot 3-2\cdot 2}{2\cdot 3}}=y^{\frac{9-4}{6}}=y^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{y^5}.$$

30. 1.) 2000. Iz zadanih podataka zaključujemo da je

$$1\ \mathrm{dm}^3=\frac{1}{1.282}\ \text{oka}.$$

Znamo i da vrijedi jednakost $1\ \mathrm{m}^3=10^3\ \mathrm{dm}^3$. Tako konačno dobivamo:

$$2.564\ \mathrm{m}^3=2.564\cdot 10^3\ \mathrm{dm}^3=\frac{2.564\cdot 10^3}{1.282}\ \text{oka}=\frac{2564}{1.282}\ \text{oka}=2000\ \text{oka}.$$

2.) $10^{4.93}\approx 85113.80382\approx 85113.8$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&\log E=1.18+1.5\cdot 2.5,\\&\log E=1.18+3.75,\\&\log E=4.93,\\&E=10^{4.93}\approx 85113.80382\approx 85113.8.\end{aligned}$$

31. 1.) –7. Zadatak standardno možemo riješiti tako da izvršimo sve naznačene operacije i pojednostavnimo dobiveni izraz „do kraja“, ali možemo postupiti brže, kraće i lukavije. Primjenom formule za kvadrat binoma zaključujemo da je koeficijent uz n nastao kvadriranjem prvoga pribrojnika jednak $2\cdot 3\cdot(-1)=-6$. Član koji sadrži samo n u drugom pribrojniku dobijemo tako da n pomnožimo s konstantama u svakoj od dviju zagrada. Dakle, taj je član jednak $n\cdot(-1)\cdot 1=-n$, pa je koeficijent uz taj član jednak –1. Prema tome, rješenje zadatka je $-6+(-1)=-7$.

2.) $(a+b)\cdot(a-3\cdot b)$ **ili obratno**. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&a^2-2\cdot a\cdot b-3\cdot b^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2-4\cdot b^2=\\&=\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)-\left(2\cdot b\right)^2=(a-b)^2-\left(2\cdot b\right)^2=\\&=(a-b+2\cdot b)\cdot(a-b-2\cdot b)=(a+b)\cdot(a-3\cdot b).\end{aligned}$$

32. 1.) 1.1. Najviša izmjerena dnevna temperatura iznosi 24.3°C, a najniža 23.2°C. Razlika tih dviju vrijednosti jednaka je $24.3-23.2=1.1^\circ\mathrm{C}$.

2.) 24.12. Prvih pet članova silazno sortiranoga niza izmjerenih dnevnih temperatura su 24.3°C, 24.2°C, 24.1°C, 24.0°C i 24.0°C. Tražena prosječna vrijednost jednaka je njihovoj aritmetičkoj sredini:

$$\frac{24.3+24.2+24.1+2\cdot 24}{5}=\frac{120.6}{5}=24.12^{\circ}\mathrm{C}.$$

33. 1.) 216. Podijelimo najprije broj 855 u omjeru 10 : 9. Najprije izračunamo pripadni omjerni koeficijent:

$$k_1=\frac{855}{10+9}=\frac{855}{19}=45.$$

Zaključujemo da u višim razredima ima ukupno $9\cdot k_1=9\cdot 45=405$ učenika.

Preostaje podijeliti broj 405 u omjeru 7 : 8. Ponovno izračunamo pripadni omjerni koeficijent:

$$k_2=\frac{405}{7+8}=\frac{405}{15}=27.$$

Tako slijedi da je traženi broj djevojčica jednak $8\cdot k_2=8\cdot 27=216.$

2.) 1950.4. Neka je c današnja cijena trenirke (iskazana u kn). Tada je današnja cijena tenisica (iskazana u kn) jednaka

$$c+\frac{40}{100}\cdot c=\left(1+\frac{40}{100}\right)\cdot c=(1+0.4)\cdot c=1.4\cdot c.$$

Zbroj tih dvaju iznosa mora biti jednak 2208 kn, pa dobivamo jednadžbu:

$$c+1.4\cdot c=2208.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned}&(1+1.4)\cdot c=2208,\\&2.4\cdot c=2208,\quad /:2.4\\&c=920.\end{aligned}$$

Dakle, današnja cijena trenirke iznosi 920 kn.

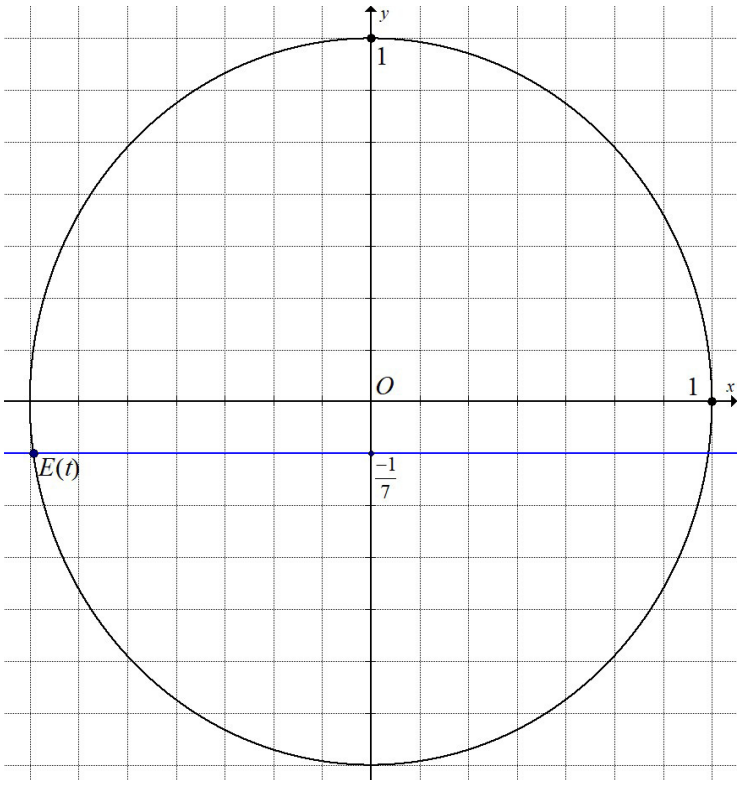
Cijena tenisica u sljedećem tjednu bit će jednaka

$$
\begin{aligned}
&1.4\cdot c-\frac{20}{100}\cdot 1.4\cdot c=\\
&=1.4\cdot c-0.2\cdot 1.4\cdot c=\\
&=1.4\cdot c-0.28\cdot c=\\
&=(1.4-0.28)\cdot c=\\
&=1.12\cdot c.
\end{aligned}
$$

Dakle, u tom će tjednu ukupna cijena obaju proizvoda biti jednaka

$$c+1.12\cdot c=(1+1.12)\cdot c=2.12\cdot c=2.12\cdot 920=1950.4 \text{ kn}.$$

34. 1.) Vidjeti sliku 1. Točka pridružena realnom broju t takva da su njezine obje koordinate strogo negativni realni brojevi nalazi se u trećem kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. U ovom ćemo je slučaju dobiti tako da u sliku ucrtamo pravac $y=\frac{-1}{7}$ i odredimo njegovo sjecište sa zadanom kružnicom u trećem kvadrantu. Dobivamo točku prikazanu na donjoj slici.



Slika 1.

2.) $\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\cdot\pi.$ Standardno riješimo zadanu trigonometrijsku jednadžbu koristeći identitet $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$ Imamo redom:

$$\begin{cases} 2\cdot x-\frac{3}{4}\cdot\pi=\frac{\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi, \\ 2\cdot x-\frac{3}{4}\cdot\pi=\frac{3}{4}\cdot\pi+2\cdot l\cdot\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cdot x=\frac{3}{4}\cdot\pi+\frac{\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi, \\ 2\cdot x=\frac{3}{4}\cdot\pi+\frac{3}{4}\cdot\pi+2\cdot l\cdot\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cdot x=\pi+2\cdot k\cdot\pi, \quad /:2 \\ 2\cdot x=\frac{3}{2}\cdot\pi+2\cdot l\cdot\pi, \quad /:2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi, \\ x=\frac{3}{4}\cdot\pi+l\cdot\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x\in\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3}{4}\cdot\pi+l\cdot\pi : l\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Odredimo koji elementi te unije skupova pripadaju segmentu $[0,\pi]$. Imamo redom:

$$0\le\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\le\pi, \quad /\cdot\frac{1}{\pi}$$

$$0\le\frac{1}{2}+k\le 1,$$

$$0-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2}\le k\le\frac{1}{2}.$$

Od svih cijelih brojeva ovu nejednakost zadovoljava jedino $k=0$.

Za $k=0$ dobivamo $x=\frac{\pi}{2}+0\cdot\pi=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$.

Provedimo analogno analizu i za drugi element skupovne unije. Imamo redom:

$$0\le\frac{3}{4}\cdot\pi+l\cdot\pi\le\pi, \quad /\cdot\frac{1}{\pi}$$

$$0\le\frac{3}{4}+l\le 1,$$

$$0-\frac{3}{4}\le\frac{3}{4}+l-\frac{3}{4}\le 1-\frac{3}{4},$$

$$\frac{-3}{4} \le l \le \frac{1}{4}.$$

Od svih cijelih brojeva ovu nejednakost zadovoljava jedino $l = 0$.

Za $l = 0$ dobivamo $x = \frac{3}{4} \cdot \pi + 0 \cdot \pi = \frac{3}{4} \cdot \pi + 0 = \frac{3}{4} \cdot \pi.$

Dakle, sva rješenja zadane jednadžbe koja pripadaju segmentu $[0, \pi]$ tvore dvočlani skup $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4} \cdot \pi \right\}.$

35. 1.) **10.** Zapišimo jednadžbu prvoga pravca u eksplicitnom obliku:

$$-2 \cdot y = -a \cdot x - 5, \quad / : (-2)$$
$$y = \frac{a}{2} \cdot x + \frac{5}{2}.$$

Zadani pravci će biti usporedni ako i samo ako imaju jednake koeficijente smjerova. Tako dobivamo jednadžbu

$$\frac{a}{2} = 5$$

čije jedinstveno rješenje je $a = 5 \cdot 2 = 10$. Dakle, tražena vrijednost je $a = 10$.

2.) $x^2 + (y-1)^2 = 16$ **ili** $x^2 + y^2 - 2 \cdot y - 15 = 0$. Iz slike vidimo da je središte zadane kružnice točka $S = (0,1)$. Ona prolazi točkom (0, 5), pa je njezin polumjer r jednak udaljenosti točaka (0, 5) i S. Tu je udaljenost vrlo lako izračunati:

$$r = 5 - 1 = 4.$$

Dakle, tražena jednadžba kružnice zapisana u općem obliku glasi:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 4^2,$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 16,$$

dok njezin zapis u razvijenom obliku glasi:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 - 16 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2 \cdot y + 1 - 16 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2 \cdot y - 15 = 0.$$

36. 1.) Primjenom Pitagorina poučka zaključujemo da je duljina hipotenuze zadanoga trokuta jednaka y, a duljina preostale (druge) katete z. Dakle, uz preostalu katetu (stranicu trokuta koja sa stranicom duljine x zatvara pravi kut) treba upisati z, a uz hipotenuzu (najdulju stranicu trokuta) treba upisati y.

2.) 6. Neka je $ADEF$ upisani romb čiji su vrhovi označeni tako da su $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$ i $F \in \overline{AC}$. Neka je a duljina stranice romba. Prema uvedenim je oznakama

$$\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{DE}\right| = \left|\overline{EF}\right| = \left|\overline{AF}\right| = a.$$

Trokutovi ABC i DBE su slični (npr. prema poučku K-K – imaju jedan zajednički kut pri vrhu B, a kut pri vrhu D je sukladan kutu pri vrhu A), pa dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{AC}\right|} = \frac{\left|\overline{DB}\right|}{\left|\overline{DE}\right|},\\
&\frac{15}{10} = \frac{\left|\overline{AB}\right| - \left|\overline{AD}\right|}{\left|\overline{DE}\right|},\\
&\frac{3}{2} = \frac{15-a}{a}, \quad / \cdot 2 \cdot a\\
&3 \cdot a = 2 \cdot (15-a),\\
&3 \cdot a = 30 - 2 \cdot a,\\
&3 \cdot a + 2 \cdot a = 30,\\
&5 \cdot a = 30, \quad / : 5\\
&a = 6.
\end{aligned}$$

Dakle, duljina stranice upisanoga romba jednaka je 6 cm.

37. 1.) $[-7,7]$. Koristimo jednakost: $-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&-1 \le \cos(4 \cdot x) \le 1, \quad / \cdot 7\\
&-7 \le 7 \cdot \cos(4 \cdot x) \le 7,\\
&-7 \le f(x) \le 7.
\end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je $R(f) = [-7,7]$.

2.) $-10 \cdot x + 15$. Koristeći osnovna pravila za deriviranje imamo redom:

$$\begin{aligned}
&f(x) = 15 \cdot x - 5 \cdot x^2 = -5 \cdot x^2 + 15 \cdot x \Rightarrow\\
&f'(x) = \left(-5 \cdot x^2\right)' + \left(15 \cdot x\right)' = (-5) \cdot \left(x^2\right)' + 15 \cdot \left(x\right)' = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 15 \cdot 1 = -10 \cdot x + 15.
\end{aligned}$$

38. 1.) –4. Najprije pojednostavnimo pravilo zadane funkcije za $x=2^{1500}$. Imamo redom:

$$f(x)=x-\sqrt{9+(x+7)\cdot\sqrt{x^2+2\cdot x+1}}=x-\sqrt{9+(x+7)\cdot\sqrt{(x+1)^2}}.$$

Za $x=2^{1500}$ vrijedi $\sqrt{(x+1)^2}=x+1$ jer je baza potencije prirodan (pa posebno i strogo pozitivan) broj. Tako dalje imamo:

$$f(x)=x-\sqrt{9+(x+7)\cdot(x+1)}=x-\sqrt{9+x^2+7\cdot x+x+7}=x-\sqrt{x^2+8\cdot x+16}=x-\sqrt{(x+4)^2}.$$

Za $x=2^{1500}$ vrijedi $\sqrt{(x+4)^2}=x+4$ jer je baza potencije prirodan (pa posebno i strogo pozitivan) broj. Tako konačno imamo:

$$\begin{aligned}&f(x)=x-(x+4)=x-x-4=-4\Rightarrow\\&f\left(2^{1500}\right)=-4.\end{aligned}$$

Napomena: Pravilo $f(x)=-4$ vrijedi za svaki $x\geq-1$. Može se pokazati da je prirodna domena te funkcije interval $\left[-4-3\cdot\sqrt{2},+\infty\right\rangle$.

2.) 13. Duljina brida najmanje kockice jednaka je $\sqrt[3]{0.125}=0.5$ cm. Duljine bridova svih kockica tvore aritmetički niz kojemu je prvi član 6.5, a razlika –0.5. Tražimo na kojoj se poziciji u tom nizu nalazi broj 0.5. Označimo li tu poziciju s n, onda mora vrijediti jednakost:

$$0.5=6.5+(n-1)\cdot(-0.5).$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned}&0.5=6.5-0.5\cdot n+0.5,\\&0.5\cdot n=6.5,\quad /:0.5\\&n=13.\end{aligned}$$

Dakle, Jakov je složio ukupno 13 kockica.

39. 1.) ≈ 24766.46. Traženu površinu izračunat ćemo kao zbroj površina dvaju trokutova dobivenih podjelom zadanoga lika dijagonalom koja ne sadrži nijedan od označenih kutova.

Prvi od tih dvaju trokutova ima stranice duge 210 m i 150 m, dok je mjera kuta među tim stranicama 58°44'. Njegova je površina jednaka

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 210 \cdot 150 \cdot \sin\left(58^\circ 44'\right) = 15750 \cdot \sin\left(58^\circ 44'\right) \approx 13\ 462.484639337 \text{ m}^2.$$

Treća stranica toga trokuta ujedno je i povučena dijagonala kojom smo podijelili zadani lik na dva trokuta. Kvadrat njezine duljine odredimo primjenom kosinusova poučka:

$$d^2 = 150^2 + 210^2 - 2 \cdot 150 \cdot 210 \cdot \cos\left(58^\circ 44'\right) = 66600 - 63000 \cos\left(58^\circ 44'\right) \text{m}^2.$$

Preostaje odrediti površinu drugoga od navedenih trokutova. Jedna njegova stranica ima duljinu d, druga duljinu 125 m, dok je mjera kuta nasuprot stranici duljine d 63°25'. Odredimo duljinu preostale (treće) stranice toga trokuta. Označimo li tu stranicu s a, ponovnom primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$\begin{aligned}
&d^2 = a^2 + 125^2 - 2 \cdot a \cdot 125 \cdot \cos\left(63^\circ 25'\right), \\
&66600 - 63000 \cdot \cos\left(58^\circ 44'\right) = a^2 + 15625 - 250 \cdot a \cdot \cos\left(63^\circ 25'\right), \\
&a^2 - 250 \cdot \cos\left(63^\circ 25'\right) \cdot a - 50975 + 63000 \cos\left(58^\circ 44'\right) = 0.
\end{aligned}$$

Jedino strogo pozitivno rješenje ove kvadratne jednadžbe je (približno) jednako

$$a \approx 202.243927978 \text{ m}.$$

Tako slijedi da je površina drugoga ranije navedenoga trokuta jednaka

$$P_2 \approx \frac{1}{2} \cdot 202.243927978 \cdot 125 \cdot \sin\left(63^\circ 25'\right) \approx 11303.97495374374 \text{ m}^2.$$

Prema tome, tražena je površina jednaka

$$P = P_1 + P_2 \approx 24766.459593 \approx 24766.46 \text{ m}^2.$$

2.) $k \in \left\langle -\infty, \frac{3 - 3 \cdot \sqrt{2}}{2} \right\rangle$. Zadanu funkciju najprije transformirajmo ovako:

$$f(x) = k \cdot x^2 + k - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x = (k-3) \cdot x^2 - 3 \cdot x + k.$$

Njezine će vrijednosti biti strogo negativne ako i samo ako vrijede nejednakosti:

$$\begin{cases} k - 3 < 0, \\ (-3)^2 - 4 \cdot k \cdot (k-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k<3, \\ 9-4\cdot k^2+12\cdot k<0 \quad /:(-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} k<3, \\ 4\cdot k^2-12\cdot k-9>0. \end{cases}$$

Skup svih rješenja prve nejednadžbe je $\langle -\infty, 3\rangle$.

Rješenja jednadžbe $4\cdot k^2-12\cdot k-9=0$ su $k_1=\frac{3-3\cdot\sqrt{2}}{2}$, $k_2=\frac{3+3\cdot\sqrt{2}}{2}$. Zbog toga je skup svih rješenja druge nejednadžbe

$$\mathbb{R}\setminus\left[\frac{3-3\cdot\sqrt{2}}{2},\frac{3+3\cdot\sqrt{2}}{2}\right]=\left\langle -\infty,\frac{3-3\cdot\sqrt{2}}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{3+3\cdot\sqrt{2}}{2},+\infty\right\rangle.$$

Presjek tih dvaju skupova je $\left\langle -\infty,\frac{3-3\cdot\sqrt{2}}{2}\right\rangle$. Dakle, traženi skup svih vrijednosti parametra k je $\left\langle -\infty,\frac{3-3\cdot\sqrt{2}}{2}\right\rangle$.

40. $0.463647609\ \text{rad}\approx 26^\circ 33' 54''$. Pretpostavimo da je jednadžba pravca zapisana u segmentnom obliku, tj. da je $p...\ \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, pri čemu su $m,n>0$ (jer pravac siječe pozitivne dijelove obiju koordinatnih osi). Iz podatka da pravac prolazi točkom $T=(8,16)$ zaključujemo da mora vrijediti jednakost:

$$\frac{8}{m}+\frac{16}{n}=1.$$

Iz te jednakosti izrazimo npr. varijablu n:

$$\frac{16}{n}=1-\frac{8}{m},$$
$$\frac{16}{n}=\frac{m-8}{m}, \quad /^{-1}$$
$$\frac{n}{16}=\frac{m}{m-8}, \quad /\cdot 16$$
$$n=\frac{16\cdot m}{m-8}.$$

Prema zahtjevu zadatka, mora vrijediti nejednakost $n>0$.

Brojnik razlomka $\frac{16\cdot m}{m-8}$ je strogo pozitivan (jer je, prema pretpostavci, $m>0$), pa će uvjet $n>0$ biti ispunjen bude li vrijedila nejednakost $m-8>0$. Odatle je $m>8$. Dakle, dodatni uvjet na vrijednost varijable m je $m>8$.

Površina trokuta kojega pravac p zatvara s objema koordinatnim osima jednaka je

$$P=\frac{m\cdot n}{2}=\frac{m\cdot\frac{16\cdot m}{m-8}}{2}=\frac{8\cdot m^2}{m-8}.$$

Primijetimo da je

$$\lim_{m\to+\infty}P=\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{8\cdot m^2}{m-8}\right)=+\infty,$$

što znači da trokut kojega pravac zatvara s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi, a čija bi površina bila maksimalna moguća, **ne postoji.** (Podsjetimo, nužno mora vrijediti nejednakost $m>8$.)

Potražimo trokut kojega pravac zatvara s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi, a čija je površina **minimalna** moguća. Tražimo globalni minimum funkcije $P=P(m)$ na intervalu $\langle 8,+\infty\rangle$. Primjenom osnovnih pravila deriviranja i algoritma za određivanje *lokalnih* ekstrema dobivamo redom:

$$\begin{aligned}P'(m)&=\frac{\left(8\cdot m^2\right)'\cdot(m-8)-8\cdot m^2\cdot(m-8)'}{(m-8)^2}=\\&=\frac{16\cdot m\cdot(m-8)-8\cdot m^2\cdot(1-0)}{(m-8)^2}=\\&=\frac{8\cdot m\cdot\left(2\cdot(m-8)-m\right)}{(m-8)^2}=\\&=\frac{8\cdot m\cdot\left(2\cdot m-16-m\right)}{(m-8)^2}=\\&=\frac{8\cdot m\cdot\left(m-16\right)}{(m-8)^2}.\end{aligned}$$

Prema pretpostavci je $m>8$, pa su nužno $m>0$ i $m-8>0$. Tako iz jednadžbe $P'(m)=0$ slijedi $m-16=0$, odnosno $m=16$.

Pokažimo da se za $m=16$ doista postiže najmanja moguća površina.

Uzimajući npr. $m=15$ i $m=17$ lako vidimo da vrijede nejednakosti $P'(15)<0$ i $P'(17)>0$. To znači da funkcija P strogo pada na intervalu $\langle 8,16\rangle$, a strogo raste na intervalu $\langle 16,+\infty\rangle$ jer osim $m=16$ ne postoji nijedna druga stacionarna točka funkcije P koja pripada njezinoj domeni, tj. skupu $\langle 8,+\infty\rangle$. Dakle, funkcija P doista postiže globalni minimum za $m=16$.

Sada lako izračunamo

$$n=\frac{16\cdot 16}{16-8}=\frac{256}{8}=32,$$

a potom i traženi kut (označimo ga s α):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{n}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$
$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0.463647609\text{ rad}\approx 26.565051177^\circ\approx 26^\circ 33' 54''.$$

pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač