



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

1. A. Izračunajmo najprije prvi faktor. Dobivamo:

$$\frac{12!}{4!8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{4!8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{2} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495.$$

Stoga je zadani brojevni izraz jednak

$$495 \cdot 0.7^4 \cdot 0.3^8 = 495 \cdot 0.2401 \cdot 0.00006561 = 0.007797715695 \approx 0.0078.$$

Znamenka na mjestu stotisućinki jednaka je 9, pa znamenku 7 na mjestu desetisućinki prigodom zaokruživanja moramo povećati za 1.

2. A. Koristeći formulu za kvadrat binoma, imamo redom:

$$\begin{aligned}(3 \cdot x + 2)^2 - 5 &= (5 \cdot x - 7) \cdot (2 \cdot x + 1) - x^2, \\(3 \cdot x)^2 + 2 \cdot (3 \cdot x) \cdot 2 + 2^2 - 5 &= 10 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 5 \cdot x - 7 - x^2, \\9 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 10 \cdot x^2 + 14 \cdot x - 5 \cdot x + x^2 &= -7 - 4 + 5, \\21 \cdot x &= -6 \quad / : 21 \\x &= -\frac{6}{21} = -\frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = -\frac{2}{7}.\end{aligned}$$

3. C. Primijenit ćemo formulu

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100.$$

U tu formulu uvrstimo $p_1 = +20$ (jer imamo povećanje za 20%) i $p_2 = -30$ (jer imamo sniženje za 30%). Konačno dobijemo:

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{-30}{100}\right) - 100 = 100 \cdot (1+0.2) \cdot (1-0.3) - 100 = 100 \cdot 1.2 \cdot 0.7 - 100 = 84 - 100 = -16.$$

Dakle, krajnja cijena je za 16% niža od početne, tj. obje navedene promjene rezultirale su smanjenjem početne cijene za 16%.

4. D. 1 minuta ima 60 sekundi, pa x minuta ima $60 \cdot x$ sekundi. Dakle, vrijedi jednakost $y = 60 \cdot x$.
5. B. Oduzimanjem druge jednadžbe zadanoga sustava od njegove prve jednadžbe dobijemo



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

$2 \cdot \frac{1}{y} = 3 - 5$, odnosno $\frac{2}{y} = -2$. Invertiranjem ove jednakosti (uzimanjem recipročne vrijednosti svake strane jednadžbe) slijedi $\frac{y}{2} = -\frac{1}{2}$. Množenjem ove jednakosti s 2 dobijemo $y = -1$.

6. C. Označimo $y = \log_{\frac{1}{b}} x$. Tada primjenom pravila za logaritmiranje redom imamo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{b}\right)^y &= \frac{1}{x}, \\ (b^{-1})^y &= x^{-1}, \\ b^{-y} &= x^{-1} / \log_b \\ \log_b(b^{-y}) &= \log_b(x^{-1}), \\ -y &= -\log_b x, \\ y &= \log_b x.\end{aligned}$$

7. D. Količnici zadanih redova su redom $q_1 = \frac{-9}{3} = -3$, $q_2 = \frac{12}{6} = 2$, $q_3 = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$ i

$$q_4 = \frac{75}{125} = \frac{3}{5}. \text{ Njihove apsolutne vrijednosti su } |q_1| = 3, |q_2| = 2, |q_3| = \frac{3}{2} \text{ i } |q_4| = \frac{3}{5}.$$

Geometrijski red je konvergentan ako i samo ako je apsolutna vrijednost njegova količnika strogo manja od 1. Brojevi 3, 2 i $\frac{3}{2}$ su strogo veći od 1, a broj $\frac{3}{5}$ je strogo manji od 1. Stoga jedino četvrti red ima konačan zbroj i taj je zbroj jednak:

$$S = \frac{a_1}{1-q_4} = \frac{125}{1-\frac{3}{5}} = \frac{125}{\frac{5-3}{5}} = \frac{125 \cdot 5}{2} = \frac{625}{2}.$$

8. D. Prema pretpostavci je $x < 0$ i $y > 0$. Stoga je $(-6) \cdot y < 0$, te $x - 6 \cdot y < 0$. Dakle, broj čiju apsolutnu vrijednost određujemo je negativan, pa se ta apsolutna vrijednost dobiva promjenom njegova predznaka. Stoga je

$$|x - 6 \cdot y| = -(x - 6 \cdot y) = -x + 6 \cdot y.$$

9. B. Funkcija f_1 je polinom 1. stupnja čija je slika skup \mathbf{R} jer je riječ o bijekciji sa skupom \mathbf{R} u skup \mathbf{R} . Funkcija f_2 je eksponencijalna funkcija čija je slika upravo interval $\langle 0, +\infty \rangle$ jer



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

potenciranje broja 10 na bilo koju realnu vrijednost x uvijek daje strogo pozitivan realan broj. Funkcija f_3 je logaritamska funkcija čija je slika skup \mathbf{R} budući da je bilo koja logaritamska funkcija bijekcija sa skupom $\langle 0, +\infty \rangle$ u skup \mathbf{R} . Nапослјетку, funkcija f_4 poprima isključivo vrijednosti iz segmenta $[-1, 1]$, pa je njezina slika upravo taj segment.

10. B. Odmah imamo: $h(-2) = (f \circ g)(-2) = f[g(-2)] = f(-3) = -1$ jer iz tablice lagano očitamo da je $g(-2) = -3$ i $f(-3) = -1$.

11. B. Riješimo svaku jednadžbu zasebno:

$$\begin{aligned} \text{A. } |x+1.5| = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1.5 = 1 \\ x+1.5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 1.5 \\ x = -1 - 1.5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-0.5, -1.5\}; \\ \text{B. } \frac{2 \cdot x - 1}{3 \cdot x - 1} = \frac{2 \cdot x}{3 \cdot x + 1} &\stackrel{\text{uz pretpostavku } (3 \cdot x - 1) \cdot (3 \cdot x + 1) \neq 0}{\Rightarrow} (2 \cdot x - 1) \cdot (3 \cdot x + 1) = 2 \cdot x \cdot (3 \cdot x - 1) \\ &\Leftrightarrow 6 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2 \cdot x - 1 = 6 \cdot x^2 - 2 \cdot x \Leftrightarrow -x - 1 = 0 \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1 \\ \text{C. } \sqrt{x^2 + 2 \cdot x - 7} = x &\stackrel{\text{uz pretpostavku } x \geq 0}{\Rightarrow} x^2 + 2 \cdot x - 7 = x^2 \Leftrightarrow 2 \cdot x - 7 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x = 7 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \\ \text{D. } \log_3(5 \cdot x + 4) = 0 &\stackrel{\text{uz pretpostavku } 5 \cdot x + 4 > 0}{\Rightarrow} 5 \cdot x + 4 = 3^0 \Leftrightarrow 5 \cdot x + 4 = 1 \Leftrightarrow 5 \cdot x = 1 - 4 \\ &\Leftrightarrow 5 \cdot x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Dakle, jedini kandidat za traženo cijelobrojno rješenje je $x = -1$. Za $x = -1$ je $(3 \cdot x - 1) \cdot (3 \cdot x + 1) = [3 \cdot (-1) - 1] \cdot [3 \cdot (-1) + 1] = (-3 - 1) \cdot (-3 + 1) = (-4) \cdot (-2) = 8 \neq 0$, pa je taj broj rješenje jednadžbe **B**. Sva ostala rješenja su racionalni brojevi koji nisu cijeli.

12. B. Imamo redom:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin(3 \cdot x) + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2 \cdot \sin(3 \cdot x) = -1 \Leftrightarrow \sin(3 \cdot x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ 3 \cdot x &= \begin{cases} \frac{7}{6} \cdot \pi + 2 \cdot k \cdot \pi, & k \in \mathbf{Z} \\ \frac{11}{6} \cdot \pi + 2 \cdot l \cdot \pi, & l \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{7}{18} \cdot \pi + \frac{2}{3} \cdot k \cdot \pi, & k \in \mathbf{Z} \\ \frac{11}{18} \cdot \pi + \frac{2}{3} \cdot l \cdot \pi, & l \in \mathbf{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Iz uvjeta $x \in [0, \pi]$ dalje slijedi:



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 \leq \frac{7}{18} \cdot \pi + \frac{2}{3} \cdot k \cdot \pi \leq \pi, \\ 0 \leq \frac{11}{18} \cdot \pi + \frac{2}{3} \cdot l \cdot \pi \leq \pi, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{7}{18} + \frac{2}{3} \cdot k \leq 1, \\ 0 \leq \frac{11}{18} + \frac{2}{3} \cdot l \leq 1, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 - \frac{7}{18} \leq \frac{2}{3} \cdot k \leq 1 - \frac{7}{18}, \\ 0 - \frac{11}{18} \leq \frac{2}{3} \cdot l \leq 1 - \frac{11}{18}, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{18} \leq \frac{2}{3} \cdot k \leq \frac{18-7}{18}, \\ -\frac{11}{18} \leq \frac{2}{3} \cdot l \leq \frac{18-11}{18}, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{18} \leq \frac{2}{3} \cdot k \leq \frac{11}{18}, \\ -\frac{11}{18} \leq \frac{2}{3} \cdot l \leq \frac{7}{18}, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{11}{12}, \\ -\frac{11}{12} \leq l \leq \frac{7}{12}. \end{cases} \end{aligned}$$

Budući da k i l moraju biti cijeli brojevi, iz prve jednadžbe slijedi $k = 0$, a iz druge $l = 0$.

Stoga polazna jednadžba u segmentu $[0, \pi]$ ima točno dva različita rješenja, i to su $x_1 = \frac{7}{18}$

$$\text{i } x_2 = \frac{11}{18}.$$

13. A. Izračunajmo najprije površinu osnovke prizme:

$$B = \frac{V}{h} = \frac{540 \cdot \sqrt{3}}{10} = 54 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Osnovka prizme je šesterokut. Označimo li s a duljinu osnovice toga šesterokuta, onda je njegova površina šest puta veća od površine jednakostaničnoga trokuta s istom duljinom osnovice. Budući da je površina jednakostaničnoga trokuta čija stranica ima duljinu a jednaka $P_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$, slijedi da je površina šesterokuta $B = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$. Tako dobivamo jednadžbu:

$$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 = 54 \cdot \sqrt{3},$$

odnosno

$$\frac{3}{2} \cdot a^2 = 54.$$

Odatle je $a^2 = 36$, odnosno $a = 6$ cm. Oplošje prizme dobijemo kao zbroj dviju površina međusobno sukladnih šesterokuta (koji su osnovke prizme) i šest površina međusobno sukladnih pravokutnika kojima su stranice $a = 6$ cm i $h = 10$ cm. Stoga je traženo oplošje jednako:



RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

$$O = 2 \cdot B + 6 \cdot P_{\square} = 2 \cdot 54 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot 6 \cdot 10 = 108 \cdot \sqrt{3} + 360 \approx 547.0614872 \approx 547.06 \text{ cm}^2.$$

- 14. C.** Budući da je $\alpha + \gamma = 180^\circ$, te $\alpha + \angle TAD = 180^\circ$, zaključujemo da je $\angle TAD = \gamma$. Analogno iz $\beta + \delta = 180^\circ$ i $\delta + \angle TDA = 180^\circ$ slijedi $\angle TDA = \beta$. Primjenom sinusova poučka na trokut TAD dobijemo:

$$\frac{|TD|}{\sin \angle TAD} = \frac{|TA|}{\sin \angle TDA} \Leftrightarrow \frac{6}{\sin \gamma} = \frac{3}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{1}{2}.$$

Preostaje primijeniti sinusov poučak na trokut TBC . Označimo li $x = |AB|$, slijedi:

$$\frac{|TB|}{\sin \gamma} = \frac{|TC|}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{|TC|}{|TB|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{|TA| + |AB|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{3+x} \Leftrightarrow \frac{3+x}{10} = 2 \Leftrightarrow 3+x = 20$$

Odatle je $x = 17$. Dakle, duljina stranice AB iznosi 17 cm.

- 15. B.** Primijenit ćemo binomni poučak. Član koji sadrži x u binomnom razvoju $(3 \cdot x + 2)^7$ jednak je $\binom{7}{1} \cdot (3 \cdot x)^1 \cdot 2^{7-1} = 7 \cdot 3 \cdot x \cdot 2^6 = 21 \cdot 64 \cdot x = 1344 \cdot x$, a slobodni član u istom razvoju $2^7 = 128$. Analogno, član koji sadrži x u binomnom razvoju $(x - 1)^7$ jednak je $\binom{7}{1} \cdot x^1 \cdot (-1)^{7-1} = 7 \cdot x \cdot (-1)^6 = 7 \cdot x$, a slobodni član u tom razvoju $(-1)^7 = -1$. Član koji sadrži x u umnošku potencija tih binoma dobijemo kao zbroj umnoška člana koji sadrži x u prvom razvoju i slobodnoga člana u drugom razvoju i umnoška člana koji sadrži x u drugom razvoju i slobodnoga člana u prvom razvoju. Dakle, imamo:

$$1344 \cdot x \cdot (-1) + 7 \cdot x \cdot 128 = -1344 \cdot x + 896 \cdot x = -448 \cdot x.$$

Odatle slijedi da je traženi koeficijent jednak -448 .

- 16. 840.** Zapravo tražimo najmanji zajednički višekratnik brojeva 60 i 168. Rastavimo te brojeve na proste faktore:

$$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5; \\ 168 = 2 \cdot 84 = 2 \cdot 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7.$$

Odatle slijedi $NZV(60, 168) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$.

- 17. 260°.** Koristeći jednakost $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ dobivamo:



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

$$\frac{13}{9} \cdot \pi \text{ rad} = \frac{13}{9} \cdot 180^\circ = 13 \cdot 20^\circ = 260^\circ.$$

18. 1.) –2. Imamo redom:

$$2 \cdot 6^x = \frac{1}{18} \quad / : 2$$

$$6^x = \frac{1}{2},$$

$$6^x = \frac{1}{36},$$

$$6^x = \frac{1}{6^2},$$

$$6^x = (6^2)^{-1},$$

$$6^x = 6^{2(-1)},$$

$$6^x = 6^{-2},$$

a odavde usporedom eksponenata slijedi $x = -2$.

2.) $x \in (-\infty, -3] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty \right)$. Prisjetimo se da je umnožak dvaju realnih brojeva nenegativan ako i samo ako su oba faktora istodobno ili nenegativni realni brojevi ili nepozitivni realni brojevi. Stoga razlikujemo dva podslučaja:

$$\text{I. } \begin{cases} 2 \cdot x - 3 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x \geq 3 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

$$\text{II. } \begin{cases} 2 \cdot x - 3 \leq 0 \\ x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x \leq 3 \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow x \leq -3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3]$$

Skup svih rješenja polazne nejednadžbe je unija skupova dobivenih u ovim dvama podslučajevima. Dakle, $x \in (-\infty, -3] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty \right)$.



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

19. 1.) 20. Koristit ćemo osnovno pravilo za rješavanje razmjera, tj. da umnožak vanjskih članova razmjera treba biti jednak umnošku unutrašnjih članova razmjera. Tako iz razmjera $c : d = 2 : 5$ slijedi $5 \cdot c = 2 \cdot d$, a odatle dijeljenjem s 2 dobivamo $d = \frac{5}{2} \cdot c$. Preostaje uvrstiti dobivenu jednakost u drugu od dviju zadanih jednakosti i riješiti pripadnu linearu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$\begin{aligned}\frac{5}{2} \cdot c &= 2 \cdot c + 10 \quad / \cdot 2 \\ 5 \cdot c &= 4 \cdot c + 20, \\ 5 \cdot c - 4 \cdot c &= 20, \\ c &= 20.\end{aligned}$$

2.) 15. Četvrti član geometrijskoga niza kojemu je prvi član a_1 , a količnik q , računa se prema formuli $a_4 = a_1 \cdot q^3$. Stoga iz zadanih podataka slijedi:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_1 \cdot q^3 = 135 \end{cases}$$

Dijeljenjem druge jednadžbe s prvom dobivamo $q^3 = 27$, a odatle je $q = 3$ (kompleksna rješenja zanemarujemo jer promatramo niz realnih brojeva). Stoga je drugi član promatranoga niza jednak $a_2 = a_1 \cdot q = 5 \cdot 3 = 15$.

20. 1.) 4.3. Primjenom pravila za logaritmiranje imamo:

$$\begin{aligned}\text{pH} &= -\log(4.7 \cdot 10^{-5}) = -[\log(4.7) + \log(10^{-5})] = -\log(4.7) - (-5) = 5 - \log(4.7) \approx 5 - 0.67 \\ &= 4.33.\end{aligned}$$

Zaokruživanjem dobivanoga rezultata na jednu decimalu dobivamo pH = 4.3.

2.) $7.9 \cdot 10^{-8}$. Treba riješiti logaritamsku jednadžbu

$$-\log C = 7.1,$$

odnosno logaritamsku jednadžbu

$$\log C = -7.1.$$

Odavde antilogaritmiranjem dobivamo

$$C = 10^{-7.1} = 10^{-8+0.9} = 10^{-8} \cdot 10^{0.9} \approx 7.94 \cdot 10^{-8} \approx 7.9 \cdot 10^{-8}$$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

21. 1.) –7. Zapišimo zadani kompleksan broj u standardnom algebarskom zapisu:

$$\begin{aligned}z &= \frac{6+b \cdot i}{1-2 \cdot i} = \frac{(6+b \cdot i) \cdot (1+2 \cdot i)}{(1-2 \cdot i) \cdot (1+2 \cdot i)} = \frac{6+b \cdot i+12 \cdot i+2 \cdot b \cdot i^2}{1^2-(2 \cdot i)^2} = \frac{6+(b-12) \cdot i+2 \cdot b \cdot(-1)}{1-4 \cdot i^2} = \\&= \frac{6-2 \cdot b+(b-12) \cdot i}{1-4 \cdot(-1)} = \frac{6-2 \cdot b+(b-12) \cdot i}{1+4} = \frac{6-2 \cdot b+(b-12) \cdot i}{5} = \frac{6-2 \cdot b}{5}+\frac{b-12}{5} \cdot i\end{aligned}$$

Realni dio ovoga kompleksnoga broja je $\operatorname{Re}(z)=\frac{6-2 \cdot b}{5}$. Prema zahtjevu zadatka, taj broj treba biti jednak 4, pa dobivamo linearu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$\frac{6-2 \cdot b}{5}=4 .$$

Množenjem s 5 dobivamo jednadžbu

$$6-2 \cdot b=20,$$

odnosno

$$\begin{aligned}-2 \cdot b &= 20-6, \\-2 \cdot b &= 14.\end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s (-2) dobivamo $b=-7$.

2.) $5 \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}=5 \cdot \sqrt{2} \cdot\left(\cos \frac{\pi}{4}+i \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right)$. Zadanom kompleksnom broju pripada točka $Z=(5,5)$ u Gaussovoj ravnini, pa zaključujemo da se ta točka nalazi u prvom kvadrantu Gaussove ravnine, odnosno da je argument zadanoga kompleksnoga broja neki kut iz intervala $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Tako dobivamo:

$$|z|=\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2}=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{2 \cdot 5^2}=\sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2}=\sqrt{2} \cdot 5=5 \cdot \sqrt{2},$$

$$\operatorname{Arg} z=\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{5}\right)=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4} .$$

Stoga je traženi trigonometrijski oblik zadanoga kompleksnoga broja jednak

$$z=5 \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}=5 \cdot \sqrt{2} \cdot\left(\cos \frac{\pi}{4}+i \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right).$$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

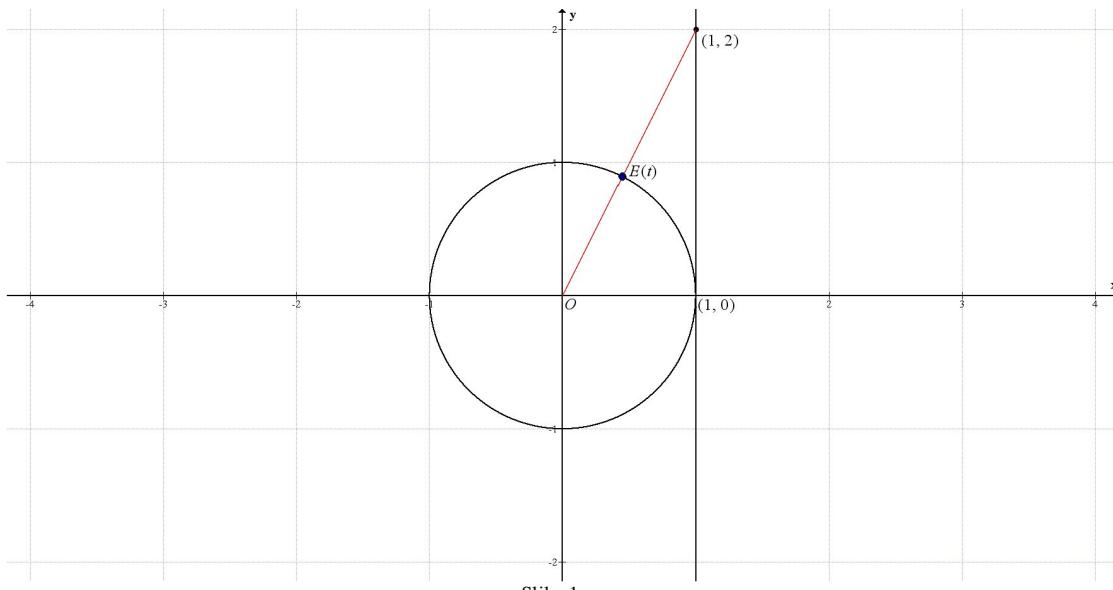
RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

22. 1.) $3 \cdot x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$. Primjenom pravila za deriviranje umnoška dviju funkcija i identiteta $(x^3)' = 3 \cdot x^2$, te $(\sin x)' = \cos x$ dobivamo:

$$f'(x) = (x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' = 3 \cdot x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x.$$

2.) $\langle d, l \rangle$. Derivacija zadane funkcije je strogo pozitivna na svim otvorenim intervalima na kojima je zadana funkcija strogo rastuća. Sa slike se vidi da funkcija f strogo raste na otvorenom intervalu $\langle d, l \rangle$, pa je na tom otvorenom intervalu i njezina derivacija strogo pozitivna.

23. 1.) **Vidjeti Sliku 1.** Iz zadanih podataka zaključujemo da tražena točka pripada prvom kvadrantu jer su jedino za točke iz toga kvadranta funkcije \cos i \tan strogo pozitivne. Prema definiciji funkcije tangens, traženu točku dobit ćemo kao sjecište pravca povučenoga kroz točke $(0, 0)$ i $(1, 2)$ i nacrtane kružnice. Dobivena točka prikazana je na Slici 1.



Slika 1.

2.) ≈ 262.22 . Brzinu zrakoplova najprije izrazimo u m/s:

$$v = 315 \text{ km/h} = \frac{315 \text{ 000 m}}{3 \text{ 600 s}} = \frac{3 \text{ 150 m}}{36 \text{ s}} = \frac{175}{2} \text{ m/s} = 87.5 \text{ m/s}.$$

U $t = 8$ sekundi zrakoplov priđe put

$$s = v \cdot t = 87.5 \text{ m/s} \cdot 8 \text{ s} = 700 \text{ metara.}$$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

$s = 700$ m je duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta kojemu je jedan šiljasti kut 22° . Tražena visina jednaka je duljini katete koja se nalazi nasuprot uočenu šiljastom kutu. Tako odmah dobivamo:

$$h = s \cdot \sin 22^\circ = 700 \cdot \sin 22^\circ \approx 700 \cdot 0.374606593415912 \approx 262.22461539 \approx 262.22 \text{ m.}$$

24. 1.) 48°11'23". Najmanji kut trokuta nalazi se nasuprot najmanjoj stranici trokuta, a to je stranica čija je duljina 7 cm. Označimo li taj kut s α , primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9}, \\ \cos \alpha &= \frac{64 + 81 - 49}{144}, \\ \cos \alpha &= \frac{96}{144} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Odatle slijedi $\alpha \approx 48.1896851042214^\circ \approx 48^\circ 11'23"$.

2.) 4.33. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a = 5$ cm. Uz standardne oznake u trokutu, tada su kutovi uz navedenu stranicu $\beta = 24^\circ 36'$ i $\gamma = 55^\circ$. Kut nasuprot stranici a jednak je

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (24^\circ 36' + 55^\circ) = 180^\circ - 79^\circ 36' = 100^\circ 24'.$$

Za izračunavanje površine trokuta potrebna nam je duljina još jedne stranice trokuta (b ili c). Opredijelimo se npr. za izračun duljine stranice b . Primijenimo sinusov poučak:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow b = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot a.$$

Stoga je tražena površina jednaka:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot a \cdot \sin \gamma = \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \alpha} \cdot a^2.$$

U tu formulu uvrstimo $a = 5$, $\alpha = 100^\circ 24' = 100.4^\circ$, $\beta = 24^\circ 36' = 24.6^\circ$ i $\gamma = 55^\circ$:

$$P = \frac{\sin 24.6^\circ \cdot \sin 55^\circ}{2 \cdot \sin 100.4^\circ} \cdot 5^2 = \frac{0.41628079226 \cdot 0.819152044}{2 \cdot 0.9835714708} \cdot 25 \approx 4.333661458 \text{ cm}^2.$$

Zaokružimo li ovaj rezultat na dvije decimalne, dobijemo $P \approx 4.33 \text{ cm}^2$.



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

25. 1.) $\frac{11}{17} \cdot \sqrt{17}$. Koristeći formulu za udaljenost točke od pravca dobivamo::

$$d(T, p) = \frac{|5 - 4 \cdot 6 + 8|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|5 - 24 + 8|}{\sqrt{1+16}} = \frac{|-11|}{\sqrt{17}} = \frac{11}{\sqrt{17}} = \frac{11}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{11}{17} \cdot \sqrt{17}$$

2.) **33°41'24"** ili **0.5880026 radijana**. Zapišimo jednadžbu zadanoga pravca u eksplisitnom obliku:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x - 3 \cdot y - 7 &= 0 \\ -3 \cdot y &= -2 \cdot x + 7 \quad / :(-3) \\ y &= \frac{2}{3} \cdot x - \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Označimo mjeru traženoga kuta s φ . Tangens kuta φ jednak je koeficijentu smjera zadanoga pravca. Taj je koeficijent jednak $\frac{2}{3}$, pa dobivamo trigonometrijsku jednadžbu:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3}.$$

Ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33.6900675^\circ \approx 33^\circ 41'24''$.

Napomena: Mjeru kuta φ mogli smo iskazati i u radijanima. Tada se dobije $\varphi \approx 0.5880026$ radijana. Ovaj način rješavanja je korektniji s obzirom na definicije trigonometrijskih funkcija, odnosno kuta između dvaju pravaca. Naime, inverz funkcije tangens je funkcija čija je domena skup \mathbf{R} , a slika interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Stoga

je $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)$ zapravo mjera kuta iskazana u radijanima koju naknadno možemo iskazati u stupnjevima.

3.) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ ili $x^2 + y^2 + 6 \cdot x - 4 \cdot y + 4 = 0$. Iz podatka da zadana kružnica dira os y slijedi da je udaljenost njezina središta do osi y jednaka polumjeru kružnice. Udaljenost točke $S = (-3, 2)$ do osi y jednak je apsolutnoj vrijednosti prve koordinate te točke, tj. $d(S, Oy) = |-3| = 3$. Zbog toga je polumjer kružnice jednak $r = 3$. Tako lagano dobijemo da opći oblik jednadžbe kružnice glasi:



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 3^2,$$

odnosno

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Ovu jednadžbu možemo zapisati i u razvijenom obliku. Kvadriranjem dobivamo:

$$x^2 + 6 \cdot x + 9 + y^2 - 4 \cdot y + 4 = 9,$$

odnosno, nakon reduciranja,

$$x^2 + y^2 + 6 \cdot x - 4 \cdot y + 4 = 0.$$

- 26. 1.)** $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$. Zadana funkcija je neprava racionalna funkcija (brojnik i nazivnik su polinomi jednakoga (točnjem prvoga) stupnja). Prirodno područje definicije bilo koje racionalne funkcije dobije se tako da se iz skupa **R** „izbacuje“ sve realne nultočke nazivnika te funkcije. Iz jednadžbe

$$x - 2 = 0$$

lako slijedi $x = 2$, i to je jedina realna nultočka nazivnika zadane funkcije. Dakle, traženi skup dobit ćemo tako da iz skupa **R** „izbacimo“ samo broj 2. To „izbacivanje“ naznačavamo koristeći znak \. Stoga je konačno $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

- 2.)** $-3; 0; 0; -\frac{3}{2}$. Sjecište grafa zadane funkcije s osi apscisa dobivamo tako da brojnik funkcije izjednačimo s nulom i riješimo pripadnu jednadžbu po nepoznanici x . Dobijemo li pritom rješenje $x = 2$, zanemarujemo ga jer po **1.)** $x = 2$ ne pripada prirodnu području definicije zadane funkcije. Odmah dobivamo:

$$3 + x = 0,$$

a odatle je $x = -3$. Stoga je jedino sjecište grafa zadane funkcije s osi apscisa točka $S_1 = (-3, 0)$.

Sjecište grafa zadane funkcije s osi ordinata dobivamo tako da u funkciju (ako je to moguće) uvrstimo $x = 0$. Prema rješenju zadatka **1.)** $x = 0$ pripada prirodnu području definicije zadane funkcije, pa možemo računati $f(0)$:

$$f(0) = \frac{3+0}{0-2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

Dakle, graf zadane funkcije siječe os ordinata u točki $S_2 = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$. Za razliku od sjecišta



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

graфа s osи apscisa, ovo je sjecište uvijek jedinstveno (ako postoji, naravno).

Zaključimo: Tražene točke su $S_1 = (-3, 0)$ i $S_2 = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

- 27. 1.) 16 · π.** Izračunajmo najprije duljinu visine stošca (h). Znamo da je $r = 4$ cm i $s = 5$ cm, pa primjenom Pitagorina poučka nalazimo:

$$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \text{ cm.}$$

Stoga je traženi obujam stošca jednak

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \pi \cdot 3 = 16 \cdot \pi \text{ cm}^3.$$

- 2.) $\frac{8}{5} \cdot \pi$ radijana ili 288° .** Razvijanjem plašta stošca u ravnini dobijemo kružni isječak

čiji je polumjer $r_1 = s = 5$ cm, a duljina pripadnoga luka $l = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 4 \cdot \pi = 8 \cdot \pi$. Iz formule za duljinu kružnoga isječka

$$l = r_1 \cdot \alpha ,$$

pri čemu je α središnji kut isječka (iskazan u radijanima), odmah dobivamo:

$$\alpha = \frac{l}{r_1} = \frac{8}{5} \cdot \pi \text{ radijana.}$$

Iskažemo li dobivenu mjeru u stupnjevima, dobit ćemo:

$$\alpha = \frac{8}{5} \cdot 180^\circ = 288^\circ.$$

- 28. 1.) Vidjeti Sliku 2.** Zadani skup točaka je pravac. Svaki pravac određen je bilo kojim svojim dvjema međusobno različitim točkama. U ovom je slučaju podesno uzeti $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$, pa izračunati pripadne vrijednosti varijable y :

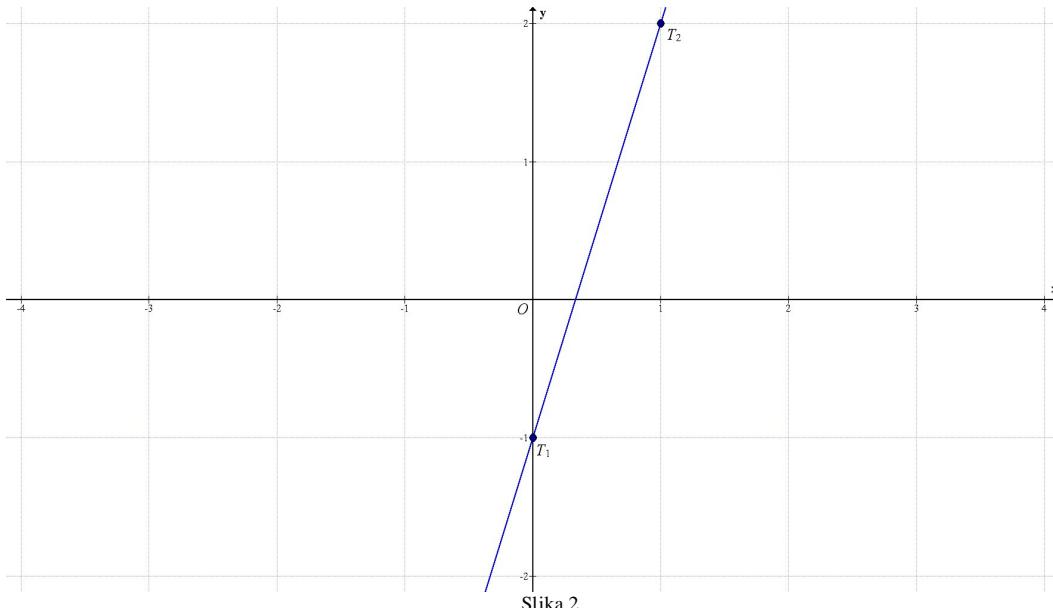
$$\begin{aligned} y_1 &= 3 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1, \\ y_2 &= 3 \cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Dakle, zadani pravac prolazi točkama $T_1 = (0, -1)$ i $T_2 = (1, 2)$. Ucrtamo te točke u zadani pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa ih spojimo pravcem. Dobivena krivulja prikazana je na Slici 2.



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)



Slika 2.

2.) Vidjeti Sliku 3. Graf funkcije f je parabola. Bilo koja parabola jednoznačno je određena zadavanjem bilo kojih triju njezinih različitih točaka. Obično određujemo tjeme parabole i njezina sjecišta s osi apscisa. Stoga najprije očitamo koeficijente pripadne kvadratne funkcije:

$$a = 1, b = -2, c = -3.$$

Računamo koordinate tjemena parabole:

$$T = \left(-\frac{b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \right) = \left(-\frac{-2}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot (-3) - (-2)^2}{4 \cdot 1} \right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{-12 - 4}{4} \right) = \left(1, -\frac{16}{4} \right) = (1, -4)$$

Sjecišta parabole s osi apscisa određujemo rješavajući jednadžbu $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - (-12)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

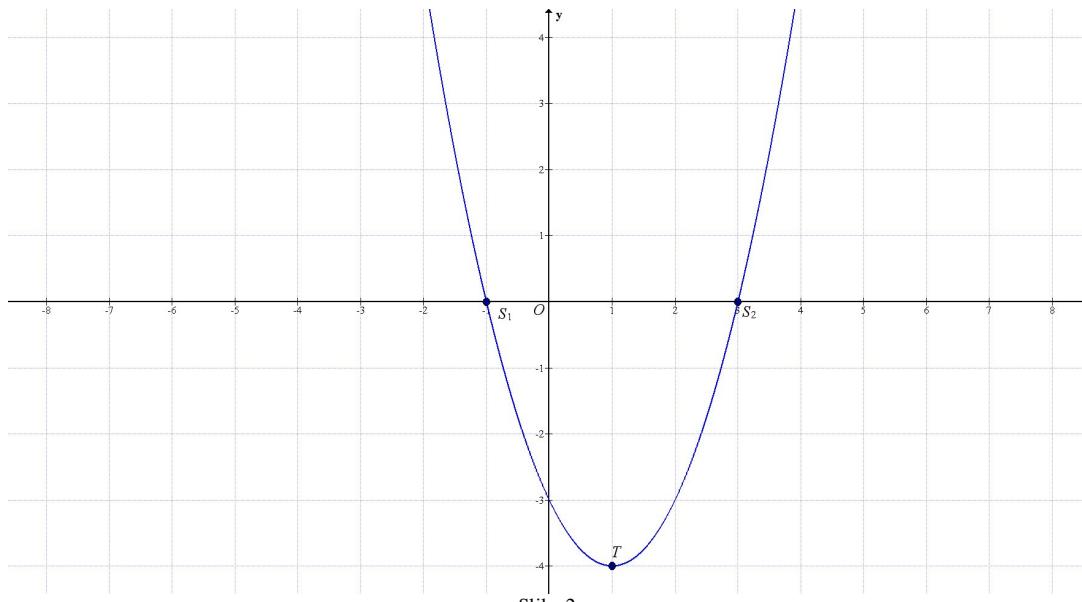
Dakle, sjecišta parabole s osi apscisa su točke $S_1 = (-1, 0)$ i $S_2 = (3, 0)$.



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

Ucrtamo točke T , S_1 i S_2 u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa kroz njih provučemo parabolu. Dobivena krivulja prikazana je na Slici 2.



Slika 2.

3.) $y = 6 \cdot x - 19$. Vrijednost funkcije f za $x = 4$ jednaka je

$$f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 16 - 8 - 3 = 5.$$

Dakle, na parabolu sa Slike 2. treba povući tangentu u točki $D = (4, 5)$. Koeficijent smjera te tangente jednak je vrijednosti prve derivacije funkcije f za $x = 4$. Stoga najprije odredimo $f'(x)$ koristeći pravila za deriviranje zbroja funkcija i tablicu derivacija:

$$f'(x) = (x^2)' - 2 \cdot (x)' - (3)' = 2 \cdot x - 2 \cdot 1 - 0 = 2 \cdot x - 2.$$

Tako je koeficijent smjera tangente (označimo ga s k_t) jednak

$$k_t = f'(4) = 2 \cdot 4 - 2 = 8 - 2 = 6.$$

Preostaje napisati jednadžbu pravca koji prolazi točkom D i ima koeficijent smjera k_t :

$$\begin{aligned}y - y_D &= k_t \cdot (x - x_D), \\y - 5 &= 6 \cdot (x - 4), \\y &= 6 \cdot x - 24 + 5, \\y &= 6 \cdot x - 19.\end{aligned}$$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

29. 1.) –6. Odmah imamo:

$$2 \otimes 5 = 2 - 2 \cdot 5 + 2 = 2 - 10 + 2 = -6.$$

2.) 133; 13 455. Neka su a_1 i d redom prvi član, odnosno razlika zadanoga aritmetičkoga niza. Iz zadanih podataka dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} a_1 + (200-1) \cdot d = 99 \\ a_1 + (268-1) \cdot d = 167 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 199 \cdot d = 99 \\ a_1 + 267 \cdot d = 167 \end{cases}$$

Oduzimanjem prve jednadžbe sustava od druge jednadžbe sustava dobivamo

$$68 \cdot d = 68.$$

Odatle je $d = 1$. Uvrštavanjem $d = 1$ u bilo koju jednadžbu sustava lako nalazimo $a_1 = -100$. Stoga je 234. član zadanoga niza jednak

$$a_{234} = a_1 + (234-1) \cdot d = -100 + 233 \cdot 1 = -100 + 233 = 133.$$

Nadalje, niz brojeva $a_{235}, a_{236}, \dots, a_{312}$ je konačan aritmetički niz s (istom) razlikom $d = 1$ i prvim članom $a_{235} = a_{234} + d = 133 + 1 = 134$. U tom konačnom aritmetičkom nizu ima ukupno $n = 312 - 235 + 1 = 78$ članova. Njihov je zbroj jednak

$$S = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_{235} + (n-1) \cdot d] = \frac{78}{2} \cdot [2 \cdot 134 + (78-1) \cdot 1] = 39 \cdot (268 + 77) = 39 \cdot 345 = 13\,455.$$

3.) $a = \frac{p - 2 \cdot b \cdot v}{b + 2 \cdot v}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} p &= a \cdot b + 2 \cdot (a + b) \cdot v, \\ p &= a \cdot b + 2 \cdot a \cdot v + 2 \cdot b \cdot v, \\ p - 2 \cdot b \cdot v &= a \cdot b + 2 \cdot a \cdot v, \\ p - 2 \cdot b \cdot v &= a \cdot (b + 2 \cdot v) \quad / : (b + 2 \cdot v) \\ a &= \frac{p - 2 \cdot b \cdot v}{b + 2 \cdot v}. \end{aligned}$$

4.) $\frac{a+1}{2 \cdot a+b}$. Iz prva dva člana u brojniku razlomka izlučimo a , a nazivnik razlomka rastavimo koristeći formulu za razliku kvadrata. Dobivamo:



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

$$\frac{2 \cdot a^2 - a \cdot b + 2 \cdot a - b}{4 \cdot a^2 - b^2} = \frac{a \cdot (2 \cdot a - b) + (2 \cdot a - b)}{(2 \cdot a)^2 - b^2} = \frac{(2 \cdot a - b) \cdot (a + 1)}{(2 \cdot a - b) \cdot (2 \cdot a + b)} = \frac{a + 1}{2 \cdot a + b}$$

5.) $a > \frac{18}{5}$ ili $a \in \left(\frac{18}{5}, +\infty \right)$. Riješimo zadani jednadžbu po nepoznanci x . Imamo redom:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x \cdot (a + 3) + a \cdot (x - 5) &= 3 \cdot a \cdot x - 6 \\ 2 \cdot a \cdot x + 6 \cdot x + a \cdot x - 5 \cdot a &= 3 \cdot a \cdot x - 6 \\ 2 \cdot a \cdot x + 6 \cdot x + a \cdot x - 3 \cdot a \cdot x &= 5 \cdot a - 6 \\ 6 \cdot x = 5 \cdot a - 6 &\quad / : 6 \\ x = \frac{5 \cdot a - 6}{6} \end{aligned}$$

Zahtjev $x > 2$ iskazujemo u obliku nejednadžbe

$$\frac{5 \cdot a - 6}{6} > 2.$$

Tu nejednadžbu riješimo uobičajenim postupkom:

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot a - 6}{6} &> 2 \quad / \cdot 6 \\ 5 \cdot a - 6 &> 12 \\ 5 \cdot a &> 12 + 6 \\ 5 \cdot a &> 18 \quad / : 5 \\ a &> \frac{18}{5} \end{aligned}$$

Dakle, zadana jednadžba ima rješenje strogo veće od 2 ako i samo ako je $a > \frac{18}{5}$ ili, ekvivalentno, $a \in \left(\frac{18}{5}, +\infty \right)$.

30. $P = \frac{51}{5} = 10.2$ kv. jed. Kod radijvektora, tj. vektora čija je početna točka ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini, koeficijent uz \vec{i} jednak je prvoj koordinati krajnje točke toga radijvektora, a koeficijent uz \vec{j} drugoj koordinati krajnje točke toga



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

vektora. Stoga iz podatka $\overrightarrow{OA} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$ slijedi $A = (-2, 1)$. Nadalje, neka je $B = (x_B, y_B)$. Tada je

$$\overrightarrow{AB} = (x_B + 2) \cdot \vec{i} + (y_B - 1) \cdot \vec{j}.$$

Prema uvjetu zadatka je $\overrightarrow{AB} = 5 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$, pa izjednačavanjem koeficijenata uz \vec{i} i \vec{j} dobivamo dvije linearne jednadžbe od kojih svaka ima točno jednu nepoznalicu:

$$\begin{cases} x_B + 2 = 5 \\ y_B - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 - 2 \\ y_B = -3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 \\ y_B = -2 \end{cases} \Rightarrow B = (3, -2).$$

Preostaje odrediti koordinate točke C . Neka je $C = (x_C, y_C)$. Iz podatka da je vektor \overrightarrow{AC} usporedan s vektorom \vec{i} zaključujemo da je koeficijent uz vektor \vec{j} u izrazu za vektor \overrightarrow{AC} jednak 0. No,

$$\overrightarrow{AC} = (x_C + 2) \cdot \vec{i} + (y_C - 1) \cdot \vec{j},$$

pa iz zahtjeva da koeficijent uz vektor \vec{j} bude jednak 0 slijedi

$$y_C - 1 = 0.$$

Odatle je $y_C = 1$. Dakle, $C = (x_C, 1)$. Prvu koordinatu točke C odredit ćemo iz posljednjega zahtjeva $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Najprije je

$$\overrightarrow{BC} = (x_C - 3) \cdot \vec{i} + [1 - (-2)] \cdot \vec{j} = (x_C - 3) \cdot \vec{i} + (1 + 2) \cdot \vec{j} = (x_C - 3) \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j},$$

pa

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \cdot (x_C - 3) - 3 \cdot 3 = 5 \cdot x_C - 15 - 9 = 5 \cdot x_C - 24,$$

te iz $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznalicom

$$\begin{aligned} 5 \cdot x_C - 24 &= 0, \\ 5 \cdot x_C &= 24. \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 5 slijedi $x_C = \frac{24}{5}$. Tako smo dobili:



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – lipanj 2013. (viša razina)

$$A = (-2, 1), B = (3, -2), C = \left(\frac{24}{5}, 1 \right).$$

Preostaje izračunati traženu površinu. Ona je jednaka polovici umnoška duljine stranice AC i duljine visine povučene na tu stranicu iz vrha B . Lako se vidi da je

$$|AC| = \left| \frac{24}{5} - (-2) \right| = \left| \frac{24}{5} + 2 \right| = \frac{24}{5} + 2 = \frac{24 + 2 \cdot 5}{5} = \frac{24 + 10}{5} = \frac{34}{5}.$$

Pokažimo da je udaljenost točke $T = (x_T, y_T)$ od pravca $y = a$ jednaka

$$d = |a - y_T|.$$

Iz točke T povucimo okomicu na pravac $y = a$. Pravac $y = a$ je usporedan s osi apscisa, pa okomica na taj pravac nužno mora biti usporedna s osi ordinata. Stoga njezina jednadžba ima oblik $x = b$. Budući da ona mora prolaziti točkom T , koordinate te točke moraju zadovoljavati jednadžbu te okomice. Stoga odmah dobivamo

$$b = x_T.$$

Dakle, jednadžba okomice iz točke T na pravac $y = a$ glasi $x = x_T$. Ta okomica siječe pravac $y = a$ u točki $T_1 = (x_T, a)$. Prema definiciji udaljenosti točke od pravca, udaljenost točke T od pravca $y = a$ jednaka je udaljenosti točaka T i T_1 . Ta je udaljenost jednaka

$$d = |TT_1| = \sqrt{(x_T - x_{T_1})^2 + (a - y_{T_1})^2} = \sqrt{0^2 + (a - y_T)^2} = \sqrt{(a - y_T)^2} = |a - y_T|,$$

što smo i željeli pokazati.

Duljina visine h iz vrha B na stranicu AC jednaka je udaljenosti točke B od pravca na kojem leži stranica AC . Točke A i C imaju međusobno jednakе druge koordinate, pa je jednadžba pravca kroz te dvije točke

$$y = 1.$$

Dakle, duljina visine h jednaka je udaljenosti točke B od pravca $y = 1$. Prema netom dokazanoj tvrdnji, ta je udaljenost jednaka

$$h = d = |1 - (-2)| = |1 + 2| = |3| = 3.$$

Stoga je tražena površina jednaka

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{34}{5} \cdot 3 = \frac{17}{5} \cdot 3 = \frac{51}{5} = 10.2 \text{ kv. jed.}$$