

1. **C.** Interval  $A$  tvore svi realni brojevi koji su jednaki ili veći od  $-3$  i strogo manji od  $7$ . Interval  $B$  tvore svi realni brojevi koji su strogo veći od  $1$  i jednaki ili veći od  $15$ . Presjek tih intervala tvore realni brojevi koji imaju sva četiri navedena svojstva. Lako vidimo da se ta četiri svojstva mogu „sažeti“ u dva, tj. da presjek tvore svi realni brojevi koji su strogo veći od  $1$  i strogo manji od  $7$ . Zbog toga je rješenje zadatka skup  $\langle 1, 7 \rangle$ .
2. **B.** Primijetimo najprije da je nužno  $x \neq 0$ . Znamo da vrijedi ekvivalencija:  $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a) \vee (x \leq -a)$ . Stoga moramo riješiti dvije nejednadžbe:

$$\begin{aligned} \text{I. } \frac{36}{x} \geq 17 &\Leftrightarrow \frac{36}{x} - 17 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{36 - 17 \cdot x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (36 - 17 \cdot x \geq 0) \wedge (x > 0) \\ (36 - 17 \cdot x \leq 0) \wedge (x < 0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (-17 \cdot x \geq -36) \wedge (x > 0) \\ (-17 \cdot x \leq -36) \wedge (x < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x \leq \frac{36}{17}\right) \wedge (x > 0) \\ \left(x \leq \frac{36}{17}\right) \wedge (x < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \left(x \leq \frac{36}{17}\right) \wedge (x > 0) \\ &\Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{36}{17}\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \frac{36}{x} \leq -17 &\Leftrightarrow \frac{36}{x} + 17 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{36 + 17 \cdot x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (36 + 17 \cdot x \leq 0) \wedge (x > 0) \\ (36 + 17 \cdot x \geq 0) \wedge (x < 0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (17 \cdot x \leq -36) \wedge (x > 0) \\ (17 \cdot x \geq -36) \wedge (x < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x \leq -\frac{36}{17}\right) \wedge (x > 0) \\ \left(x \geq -\frac{36}{17}\right) \wedge (x < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \left(x \geq -\frac{36}{17}\right) \wedge (x < 0) \\ &\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{36}{17}, 0\right). \end{aligned}$$

Stoga svi realni brojevi zadovoljavaju zadanu nejednakost tvore skup  $\left[-\frac{36}{17}, 0\right) \cup \left(0, \frac{36}{17}\right] = \left[-\frac{36}{17}, \frac{36}{17}\right] \setminus \{0\}$ . Budući da je  $\frac{36}{17} = 2\frac{2}{17}$ , u navedenom se skupu nalazi točno četiri cijela broja:  $-2, -1, 1$  i  $2$ .

3. **B.** Izrazimo najprije udaljenost od Zagreba do Kutine u centimetrima:

$$72 \text{ km} = 72000 \text{ m} = 7\,200\,000 \text{ cm}.$$

1 cm na karti odgovara 4 800 000 cm u prirodi, pa udaljenosti od 7 200 000 cm u prirodi odgovara udaljenosti od  $\frac{7\,200\,000}{4\,800\,000} = 1.5$  cm na karti.

4. **B.** Imamo redom:

$$S = 100 \cdot (S + P) \Leftrightarrow S = 100 \cdot S + 100 \cdot P \Leftrightarrow S - 100 \cdot S = 100 \cdot P \Leftrightarrow -99 \cdot S = 100 \cdot P \Leftrightarrow P = -\frac{99}{100} \cdot S.$$

5. A. Sredimo zadani izraz primjenom formule za kvadrat binoma:

$$b^2 \cdot (2 \cdot a - 1)^2 + a \cdot (b^2 + 4) = b^2 \cdot (4 \cdot a^2 - 4 \cdot a + 1) + a \cdot (b^2 + 4) =$$

$$4 \cdot a^2 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b^2 + b^2 + a \cdot b^2 + 4 \cdot a = 4 \cdot a^2 \cdot b^2 - 3 \cdot a \cdot b^2 + b^2 + 4 \cdot a.$$

Dakle, sređeni izraz sadrži član  $-3 \cdot a \cdot b^2$ .

6. C. Obujam kugle i obujam kocke moraju biti jednaki. Označimo li s  $a$  duljinu brida kocke, onda imamo redom:

$$a^3 = \frac{4}{3} \cdot 10^3 \cdot \pi, \quad \sqrt[3]{\quad}$$

$$a = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3} \cdot \pi} = 16.11991954 \approx 16.12 \text{ cm.}$$

7. D. Imamo redom:

$$(f \circ g)\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left[g\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = f\left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 7\right] = f(-1 - 7) = f(-8) =$$

$$= (-8)^2 + 1 = 64 + 1 = 65.$$

8. D. Zapišimo najprije broj  $w = 8 \cdot i$  u trigonometrijskom obliku. Tom broju pridružena je točka  $W = (0, 8)$  Gaussove ravnine. Spojnica ishodišta Gaussove ravnine i točke  $W$  ima duljinu 8, a s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut čija je mjera  $\frac{\pi}{2}$  radijana. Zbog toga je  $w = 8 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Preostaje primijeniti de Moivreovu formulu za korjenovanje kompleksnoga broja:

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi}{3}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi + 4 \cdot k \cdot \pi}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot k + 1}{6} \cdot \pi\right), k = 0, 1, 2 \Rightarrow$$

$$z_0 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot 0 + 1}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$z_1 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot 1 + 1}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{5}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{5}{6} \cdot \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5}{6} \cdot \pi\right)\right] = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_2 = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{4 \cdot 2 + 1}{6} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right)\right] = 2 \cdot (0 - i) = -2 \cdot i.$$

Dobivenim rješenjima pridružene su redom točke  $Z_0 = (\sqrt{3}, 1)$ ,  $Z_1 = (-\sqrt{3}, 1)$  i  $Z_2 = (0, -2)$ .

Iz slike vidimo da se točka  $Z_2$  podudara s točkom pridruženom kompleksnom broju  $z_4$ .

9. D. Neka je  $ABCD$  zadani trapez, pri čemu su  $\overline{AB}$  dulja osnovica,  $\overline{CD}$  kraća osnovica, a  $\overline{BC}$  i  $\overline{AD}$  krakovi trapeza. Prema podacima u zadatku, vrijedi jednakost:  $|\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{AD}|$ .

Povucimo dijagonalu  $\overline{BD}$ . Označimo:  $y := \angle BDC$ ,  $\gamma := \angle BCD$ . Neka je  $\alpha$  tražena mjera kuta  $\angle BAD$ . Kutovi  $\angle ABD$  i  $\angle BDC$  su kutovi uz priječnicu (transverzal), pa imaju iste mjere. Zbog toga je  $\angle ABD = \angle BDC = y$ . Trokut  $\triangle BCD$  je jednakokrani jer je  $|\overline{BC}| = |\overline{CD}|$  i kutovi  $\angle BDC$  i  $\angle DBC$  su kutovi uz osnovicu  $\overline{BD}$  toga trokuta. Zbog toga je  $\angle DBC = \angle BDC = y$ , pa je  $\alpha = \angle BAD = \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = y + y = 2 \cdot y$ . Preostaje iskoristiti činjenicu da je zbroj mjera kutova u svakom trokutu, pa posebno i u trokutu  $\triangle ABD$ , jednak  $180^\circ$ :

$$\begin{aligned}\angle ABD + \angle BAD + \angle BDA &= 180^\circ, \\ y + 2 \cdot y + 105^\circ &= 180^\circ, \\ 3 \cdot y &= 180^\circ - 105^\circ, \\ 3 \cdot y &= 75^\circ, \quad |:3 \\ y &= 25^\circ.\end{aligned}$$

Dakle, tražena mjera je  $\alpha = 2 \cdot y = 2 \cdot 25^\circ = 50^\circ$ .

10. A. Znamo da u svakom trokutu vrijedi nejednakost  $|a - b| < c < a + b$ . Budući da je  $a = 2 \cdot b$ , to znači da mora vrijediti nejednakost  $|2 \cdot b - b| < c < 2 \cdot b + b$ , odnosno, zbog  $b > 0$ , nejednakost  $b < c < 3 \cdot b$ . Dakle, pretpostavka  $a = 2 \cdot b$  povlači nejednakost  $b < c$ . Nasuprot veće stranice trokuta nalazi se i veći kut trokuta, pa iz posljednje nejednakosti izravno slijedi  $\beta < \gamma$ , odnosno, ekvivalentno,  $\gamma > \beta$ .

11. D. Odredimo najprije vrijednost  $x$  tako da zadani vektori budu okomiti. Zadani vektori će biti okomiti ako i samo ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli. Zbog toga imamo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 3 \cdot x + (-4) \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot x - 36 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot x = 36 \Leftrightarrow x = 12.$$

Zbog toga je  $\vec{b} = 12 \cdot \vec{i} + 9 \cdot \vec{j}$ . Preostaje izračunati omjer duljina vektora  $\vec{b}$  i vektora  $\vec{a}$ :

$$\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{12^2 + 9^2}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{144 + 81}}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3.$$

12. B. Odredimo najprije vrijednost  $m$  za koju je točna tvrdnja u zadatku. Prema Vièteovim formulama, za rješenja  $x_1$  i  $x_2$  zadane jednadžbe vrijede jednakosti  $x_1 + x_2 = -m$  i  $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot m + 3$ . Tako imamo:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-m}{2 \cdot m + 3}.$$

Prema uvjetu zadatka, taj zbroj mora biti jednak 10, pa dobivamo:

$$\begin{aligned}
 \frac{-m}{2 \cdot m + 3} &= 10, \quad / \cdot (2 \cdot m + 3) \\
 -m &= 10 \cdot (2 \cdot m + 3), \\
 -m &= 20 \cdot m + 30, \\
 -m - 20 \cdot m &= 30, \\
 -19 \cdot m &= 30, \quad / : (-19) \\
 m &= -\frac{30}{19} = -1\frac{11}{19}.
 \end{aligned}$$

Lako vidimo da je dobivena vrijednost  $m$  strogo veća od  $-2$  i strogo manja od  $0$ , pa ona pripada intervalu  $\langle -2, 0 \rangle$ .

**13. B.** Primjenom formula za kvadrat binoma i razliku kvadrata imamo redom:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{a+1}{5 \cdot a - a^2} + \frac{2 \cdot a + 2}{a^2 - 25} \right) : \frac{a+1}{a^2 + 10 \cdot a + 25} &= \left[ \frac{a+1}{a \cdot (5-a)} + \frac{2 \cdot (a+1)}{a^2 - 5^2} \right] : \frac{a+1}{a^2 + 2 \cdot 5 \cdot a + 5^2} = \\
 &= \left[ \frac{a+1}{a \cdot (5-a)} + \frac{2 \cdot (a+1)}{(a-5) \cdot (a+5)} \right] : \frac{a+1}{(a+5)^2} = \left[ \frac{-(a+1) \cdot (a+5) + 2 \cdot a \cdot (a+1)}{a \cdot (a-5) \cdot (a+5)} \right] : \frac{(a+5)^2}{a+1} = \\
 &= \left[ \frac{(a+1) \cdot (-a-5+2 \cdot a)}{a \cdot (a-5) \cdot (a+5)} \right] : \frac{(a+5)^2}{a+1} = \frac{(a+1) \cdot (a-5)}{a \cdot (a-5) \cdot (a+5)} \cdot \frac{(a+5)^2}{a+1} = \frac{a+5}{a}.
 \end{aligned}$$

**14. C.** Ako  $1$  mL insekticida treba pomiješati s  $2$  L =  $2000$  mL vode, onda se  $750$  mL insekticida miješa s ukupno  $\frac{750}{1.5} \cdot 2000 = 1\,000\,000$  mL vode. Tako se dobiva otopina čiji je ukupni obujam  $1\,000\,000 + 750 = 1\,000\,750$  mL. Stoga je tražena površina jednaka  $P = \frac{1000750}{250} = 4003 \text{ m}^2$ .

**15. A.** Iz Slike 1. razabiremo da je  $g(x) < 0$  za  $x \in \langle \approx -1.9, \approx 1.1 \rangle$ , što znači da tražena funkcija  $f$  strogo pada na tom intervalu. (Znamo:  $f$  strogo pada na  $I \Leftrightarrow f' = g < 0$  na  $I$ .) To ujedno znači i da funkcija  $f$  strogo raste na intervalima  $\langle -\infty, \approx -1.9 \rangle$  i  $\langle \approx 1.1, +\infty \rangle$ . Jedini graf koji ima sva navedena svojstva prikazan je na Slici A. (Primijetimo da graf na Slici B. ima „suprotna“ svojstva, tj. da pripadna funkcija strogo pada na intervalima  $\langle -\infty, \approx -1.9 \rangle$  i  $\langle \approx 1.1, +\infty \rangle$ , a strogo raste na intervalu  $\langle \approx -1.9, \approx 1.1 \rangle$ .)

**16.**  $\approx 2.813657169$ . Imamo redom:

$$\frac{\sqrt{11+\frac{2}{5}}}{3 \cdot 0.4} = \frac{\sqrt{\frac{11 \cdot 5 + 2}{5}}}{1.2} = \frac{\sqrt{\frac{55+2}{5}}}{\frac{12}{10}} = \frac{\sqrt{\frac{57}{5}}}{\frac{6}{5}} = \sqrt{\frac{\frac{57}{5}}{\left(\frac{6}{5}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{57}{5}}{\frac{36}{25}}} = \sqrt{\frac{\frac{57}{5}}{\frac{36}{25}}} = \sqrt{\frac{19}{12}} = \sqrt{\frac{19 \cdot 5}{12 \cdot 1}} = \sqrt{\frac{95}{12}} \approx 2.813657169.$$

**17.**  $\approx 125$  otkucaja u minuti. Traženi puls jednak je  $P(2)$ . Izračunajmo tu vrijednost:

$$P(2) = 150 \cdot 2^{-0.13 \cdot 2} = 150 \cdot 2^{-0.26} = 125.26318791 \approx 125.$$

18. 1.)  $x \geq -\frac{9}{7}$  ili  $x \in \left(-\frac{9}{7}, +\infty\right)$ . Imamo redom:

$$\begin{aligned}
 3 \cdot (x-3) + 5 \cdot x^2 &\leq 5 \cdot x \cdot (x+2), \\
 3 \cdot x - 9 + 5 \cdot x^2 &\leq 5 \cdot x^2 + 10 \cdot x, \\
 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 - 5 \cdot x^2 - 10 \cdot x &\leq 9, \\
 (-7) \cdot x &\leq 9, \quad / : (-7) \\
 x &\geq -\frac{9}{7}.
 \end{aligned}$$

2.)  $(-2, -1)$ . Zapišimo najprije zadani sustav u standardnom obliku. Imamo:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{3} - 2 \cdot x = 3, \\ y - x = \frac{1}{2} \cdot x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 6 \cdot x = 9, \\ 2 \cdot y - 2 \cdot x = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \cdot x + y = 9, \\ 2 \cdot y - 2 \cdot x - x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \cdot x + y = 9, \\ -3 \cdot x + 2 \cdot y = 4. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe izrazimo nepoznanicu  $y$ :

$$y = 5 \cdot x + 9.$$

Uvrštavanjem ovoga izraza u drugu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\begin{aligned}
 -3 \cdot x + 2 \cdot (5 \cdot x + 9) &= 4, \\
 -3 \cdot x + 10 \cdot x + 18 &= 4, \\
 7 \cdot x &= 4 - 18, \\
 7 \cdot x &= -14, \quad / : 7 \\
 x &= -2.
 \end{aligned}$$

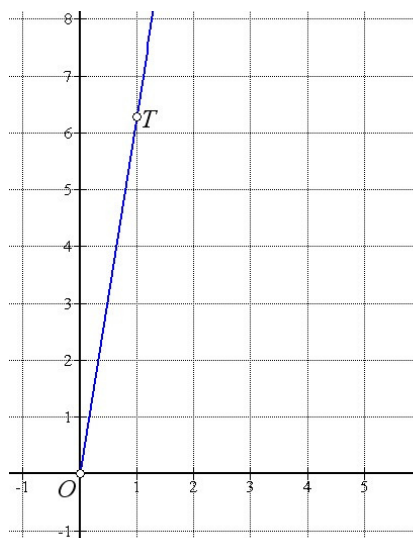
Tako sada lagano izračunamo:

$$y = 5 \cdot (-2) + 9 = -10 + 9 = -1.$$

19. 1.)  $\sqrt{10}$  jed. duljine. Koristeći formulu za udaljenost točaka u ravnini dobivamo:

$$d(P, R) = \sqrt{(5-2)^2 + \left(-\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

2.) **Vidjeti Sliku 1.** Crtamo graf funkcije  $O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r$ . Ta funkcija je linearna funkcija čija je domena  $[0, +\infty)$ . Njezin je graf polupravac čija je početna točka  $(0, O(0)) = (0, 0)$ , tj. ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Za crtanje toga polupravca dovoljno je zadati još jednu njegovu točku. Očito je  $O(1) = 2 \cdot \pi$ , pa u koordinatni sustav ucrtamo točku  $T = (1, 2 \cdot \pi)$  i polupravcem je spojimo s ishodištem. Dobivamo Sliku 1.



Slika 1.

20. 1.)  $3^{-2a-4}$ . Budući da su  $81 = 3^4$  i  $27 = 3^3$ , imamo redom:

$$\frac{3^{2a-1}}{81^a} \cdot 27^{-1} = \frac{3^{2a-1}}{(3^4)^a} \cdot (3^3)^{-1} = \frac{3^{2a-1}}{3^{4a}} \cdot 3^{3(-1)} = \frac{3^{2a-1}}{3^{4a}} \cdot 3^{-3} = 3^{2a-1-4a-3} = 3^{-2a-4}$$

2.)  $1+i$ . Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{Z}$  vrijedi jednakost  $i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} = 0$ . Naime,

$$i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} = i^{4k} \cdot (1 + i + i^2 + i^3) = i^{4k} \cdot (1 + i + (-1) + (-i)) = i^{4k} \cdot 0 = 0.$$

Posebno, za  $k=0$  dobivamo  $i^0 + i^{4 \cdot 0 + 1} + i^{4 \cdot 0 + 2} + i^{4 \cdot 0 + 3} = 1 + i + i^2 + i^3 = 0$ , dok za  $k=1$  imamo  $i^{4 \cdot 1} + i^{4 \cdot 1 + 1} + i^{4 \cdot 1 + 2} + i^{4 \cdot 1 + 3} = i^4 + i^5 + i^6 + i^7 = 0$ . Zbog toga su zbroj prvih četiriju pribrojnika i zbroj drugih četiriju pribrojnika jednaki nuli, pa preostaje:

$$S = 0 + 0 + i^8 + i^9 = i^8 + i^9 = (i^4)^2 + (i^4)^2 \cdot i = 1^2 + 1^2 \cdot i = 1 + 1 \cdot i = 1 + i.$$

21. 1.)  $-3$ . Očitamo:  $a = 0.48$ ,  $b = -2.4$ ,  $c = 0$ . Tražena vrijednost jednaka je drugoj koordinati tjemenca grafa pripadne parabole:

$$f_{\min} = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = \frac{4 \cdot 0.48 \cdot 0 - 2.4^2}{4 \cdot 0.48} = \frac{0 - 5.76}{1.92} = -\frac{5.76}{1.92} = -\frac{576}{192} = -3.$$

2.) Vidjeti Sliku 2. Za crtanje grafa zadane kvadratne funkcije potrebne su nam njezine nultočke i koordinate njezina tjemenca. Odredimo najprije nultočke. U tu svrhu riješimo jednadžbu  $f(x) = 0$ . Imamo redom:

$$0.48 \cdot x^2 - 2.4 \cdot x = 0, \quad / : 0.48$$

$$x^2 - 5 \cdot x = 0,$$

$$x \cdot (x - 5) = 0,$$

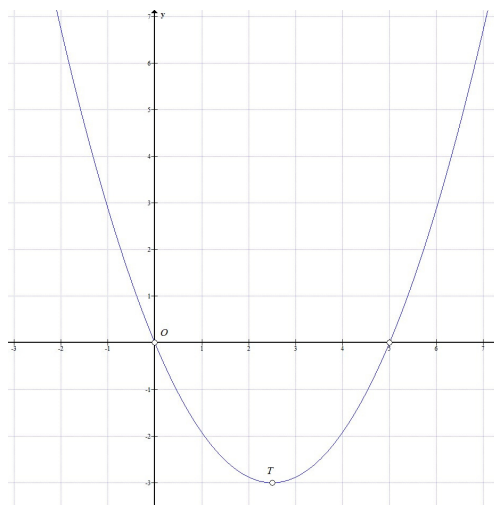
$$x = 0 \text{ ili } x - 5 = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 5.$$

Dakle, graf zadane funkcije siječe os apscisa u točkama  $(0, 0)$  (riječ je o ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini) i  $(5, 0)$ . Preostaje odrediti tjeme parabole. Drugu koordinatu toga tjemena izračunali smo u 1.) i ona iznosi  $-3$ . Stoga odredimo prvu koordinatu:

$$x_T = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{-2.4}{2 \cdot 0.48} = \frac{2.4}{0.96} = \frac{240}{96} = \frac{5}{2}.$$

Stoga je tjeme parabole točka  $T = \left(\frac{5}{2}, -3\right)$ . Preostaje ucrtati dobivene točke u pravokutni koordinatni sustav i spojiti ih parabolom. Tako dobivamo Sliku 2.



Slika 2.

**22. 1.) 6:42 ili 6 sati i 42 minute.** Odredimo najprije vrijeme između 7:00 i 8:00 sati u kojemu je broj minuta proteklih od 7:00 sati četiri puta manji od broja minuta preostalih do 8:00 sati. Neka je  $x$  broj minuta proteklih od 7:00 sati. Tada je  $60 - x$  broj minuta preostalih do 8:00 sati. Mora vrijediti jednakost:  $4 \cdot x = 60 - x$ , a odatle slijedi  $5 \cdot x = 60$ , odnosno  $x = 12$ . Dakle, u 7:12 sati vrijeme proteklo od 7 sati (12 minuta) bit će četiri puta manje od vremena preostalog do 8:00 sati (to je  $8:00 - 7:12 = 48$  minuta). Prema uvjetu zadatka, to vrijeme nastupa za pola sata, pa je traženo vrijeme jednako:

$$(7 \text{ sati i } 12 \text{ minuta}) - 30 \text{ minuta} = (7 \text{ sati i } 0 \text{ minuta}) - 18 \text{ minuta} = (6 \text{ sati i } 60 \text{ minuta}) - 18 \text{ minuta} = 6 \text{ sati i } 42 \text{ minute} = 6:42.$$

**2.)  $\approx 3.5\%$ .** Neka je  $p$  traženi postotak. Broj stanovnika na kraju prve godine jednak je  $S_1 = 1\,635\,000 + \frac{P}{100} \cdot 1\,635\,000 = 1\,635\,000 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)$ . Broj stanovnika na kraju druge godine jednak je

$$\begin{aligned} S_2 &= 1\,635\,000 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) + \frac{P}{100} \cdot 1\,635\,000 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) = \\ &= 1\,635\,000 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) = 1\,635\,000 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^2. \end{aligned}$$

Indukcijom lako slijedi da je broj stanovnika na kraju  $n$ -te godine jednak  $S_n = 1\,635\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ . Prema uvjetu zadatka je  $S_6 = 2\,010\,000$ , pa dobivamo eksponencijalnu jednadžbu:

$$1\,635\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 2\,010\,000.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$1\,635\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 2\,010\,000, \quad / : 1\,635\,000$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{134}{109}, \quad / \sqrt[6]{\phantom{x}}$$

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}},$$

$$\frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1,$$

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1\right) = 3.501437925445 \approx 3.5.$$

**23. 1.)**  $x = 1$ . Lijeva strana jednadžbe definirana je kad god je  $x + 8 \geq 0$ , tj. kad god je  $x \geq -8$ .

Nadalje, zapišemo li jednadžbu u obliku  $\sqrt{x+8} = x+2$ , vidimo da je lijeva strana dobivene jednadžbe nenegativan realan broj, pa takva mora biti i njezina desna strana. Odatle dobivamo uvjet  $x+2 \geq 0$ , odnosno  $x \geq -2$ . Uvjeti  $x \geq -8$  i  $x \geq -2$  zajedno daju uvjet  $x \geq -2$ . Stoga u nastavku rješavamo zadanu jednadžbu uvažavajući taj uvjet. Imamo redom:

$$\sqrt{x+8} = x+2, \quad / ^2$$

$$x+8 = (x+2)^2,$$

$$x+8 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2,$$

$$x^2 + 4 \cdot x + 4 - x - 8 = 0,$$

$$x^2 + 3 \cdot x - 4 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-3-5}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Zbog uvjeta  $x \geq -2$  rješenje  $x_2 = -4$  ne dolazi u obzir. Stoga je jedino rješenje zadatka  $x = x_1 = 1$ .



2.)  $x=13$ . Jednadžba ima smisla kad god su  $x-5>0$  i  $\log_2(x-5)>0$ . Iz prve nejednakosti slijedi  $x>5$ , a iz druge  $x-5>2^0$ , odnosno  $x-5>1$ , odnosno  $x>6$ . Uvjeti  $x>5$  i  $x>6$  zajedno daju uvjet  $x>6$ , pa zadanu jednadžbu rješavamo uvažavajući taj uvjet. Imamo redom:

$$\log_3 \log_2(x-5)=1, \quad / 3^{\wedge}$$

$$\log_2(x-5)=3^1,$$

$$\log_2(x-5)=3, \quad / 2^{\wedge}$$

$$x-5=2^3,$$

$$x-5=8,$$

$$x=13.$$

Dobiveno rješenje zadovoljava uvjet  $x>6$ , pa je  $x=13$  jedino rješenje zadane jednadžbe.

24. 1.)  $(-\infty, 2]$ . Znamo da za svaki  $x \geq 0$  vrijedi nejednakost  $\sqrt{x} \geq 0$ . Stoga imamo redom:

$$\sqrt{x} \geq 0, \quad / \cdot (-1)$$

$$-\sqrt{x} \leq 0, \quad / +2$$

$$-\sqrt{x} + 2 \leq 0 + 2,$$

$$2 - \sqrt{x} \leq 2,$$

$$f(x) \leq 2.$$

Dakle, za svaki  $x \in D_f$  vrijedi  $f(x) \leq 2$ , pa zaključujemo da je traženi skup vrijednosti interval  $(-\infty, 2]$ .

2.)  $x = \log_a b$ . Riješimo jednadžbu  $f(x) = 0$ . Imamo:

$$f(x) = 0,$$

$$a^x - b = 0,$$

$$a^x = b, \quad / \log_a$$

$$x = \log_a b.$$

25. 1.)  $\frac{15}{2} = 7.5$ . Neka su  $a$  i  $b$  duljine stranica paralelograma označene tako da vrijedi nejednakost  $a \geq b$ . Nadalje, neka su  $v_a$  i  $v_b$  redom duljine visina na stranicu  $a$ , odnosno stranicu  $b$ . Duljoj stranici paralelograma odgovara kraća visina, pa zbog nejednakosti  $a \geq b$  slijedi  $v_a \leq v_b$ . Budući da se duljine visina odnose kao 5:8, zaključujemo da je  $v_a : v_b = 5 : 8$ . To znači da postoji (strogo pozitivan) realan broj  $k$  takav da vrijede jednakosti  $v_a = 5 \cdot k$  i  $v_b = 8 \cdot k$ . Primijenimo formulu za površinu paralelograma:

$$P = a \cdot v_a = b \cdot v_b,$$

$$a \cdot 5 \cdot k = b \cdot 8 \cdot k, \quad / : 5 \cdot k$$

$$a = \frac{8}{5} \cdot b.$$

Uvažavajući tu jednakost, slijedi da je opseg paralelograma jednak:

$$O = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot \left( \frac{8}{5} \cdot b + b \right) = 2 \cdot b \cdot \left( 1 + \frac{8}{5} \right) = 2 \cdot b \cdot \left( \frac{5+8}{5} \right) = 2 \cdot b \cdot \frac{13}{5} = \frac{26}{5} \cdot b.$$

Prema zahtjevu zadatka, taj broj mora biti jednak 39. Tako dobivamo jednadžbu  $\frac{26}{5} \cdot b = 39$  čije rješenje je  $b = \frac{15}{2} = 7.5$ .

2.)  $\approx 220.13$ . Neka su  $x$  cijena skupljega proizvoda, a  $y$  cijena jeftinijega proizvoda. Iz podataka u zadatku dobivamo jednadžbu:

$$x + \left( y - \frac{30}{100} \cdot y \right) = 374.23.$$

Izrazimo  $x$  iz ove jednakosti. Imamo:

$$\begin{aligned} x + \left( 1 - \frac{30}{100} \right) \cdot y &= 374.23, \\ x + \left( \frac{100-30}{100} \right) \cdot y &= 374.23, \\ x + \frac{70}{100} \cdot y &= 374.23, \\ x + \frac{7}{10} \cdot y &= 374.23, \\ x &= 374.23 - \frac{7}{10} \cdot y. \end{aligned}$$

Vrijednost  $x$  ne može biti strogo negativan realan broj i mora biti strogo veća od  $y$  (jer je  $x$  skuplji proizvod), što znači da moraju vrijediti nejednakosti:

$$0 \leq y < 374.23 - \frac{7}{10} \cdot y.$$

Riješimo tu nejednadžbu. Imamo redom:

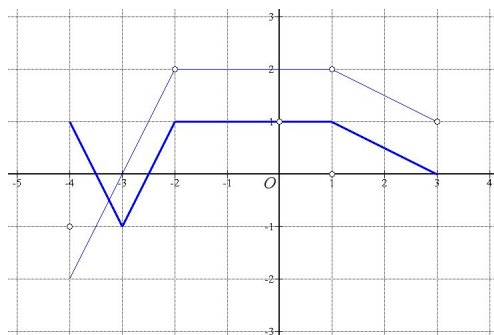
$$\begin{aligned} y &< 374.23 - \frac{7}{10} \cdot y, \\ \frac{7}{10} \cdot y + y &< 374.23, \\ y \cdot \left( \frac{7}{10} + 1 \right) &< 374.23, \\ y \cdot \left( \frac{7+10}{10} \right) &< 374.23, \\ \frac{17}{10} \cdot y &< 374.23, \quad / \cdot \frac{10}{17} \\ 0 \leq y &< \frac{374.23 \cdot 10}{17} = \frac{3742.3}{17} = 220.1352941. \end{aligned}$$

Tražena cijena mora imati najviše dvije znamenke iza decimalne točke (jer ne postoji tisućiti, desetstisućiti, ... dio kune), pa zaključujemo da je  $y_{\max} = 220.13$  kn. (Zaokruživanje **obavezno** provodimo naniže zbog znaka strogo manje.)

26. 1.)  $3; \frac{1}{2}$ . Iz podatka da graf funkcije  $f$  prolazi točkom  $P$  zaključujemo da vrijedi jednakost  $f(0) = 3$ . Točka  $P$  je točka maksimuma funkcije  $P$ , pa zaključujemo da je maksimum funkcije  $f$  jednak 3. Međutim, maksimum funkcije  $f(x) = A \cdot \cos(B \cdot x)$  u općem je slučaju jednak  $A$  i postiže se kad je  $\cos(B \cdot x) = 1$ , odnosno kad je  $B \cdot x = 2 \cdot k \cdot \pi$ , za  $k \in \mathbb{Z}$ . Tako zaključujemo da je  $A = 3$ .

Razmak između prvih koordinata uzastopnih ekstrema jednak je polovici temeljnoga perioda zadane funkcije. Dakle,  $\frac{T}{2} = 2 \cdot \pi - 0$ , a odatle je  $T = 4 \cdot \pi$ . No, s druge je strane  $T = \frac{2 \cdot \pi}{B}$ , pa iz jednadžbe  $\frac{2 \cdot \pi}{B} = 4 \cdot \pi$  slijedi  $B = \frac{1}{2}$ .

- 2.) Vidjeti Sliku 3. Funkcija apsolutne vrijednosti „prebacuje“ dio grafa iznad segmenta  $[-4, -3]$  iznad osi apscisa simetrično s obzirom na tu os. Oduzimanje jedinice pomiče (translatira) svaku točku grafa za 1 jedinicu duljine prema dolje. Tako dobivamo Sliku 3.



Slika 3.

27. 1.)  $p \dots y = \sqrt{3} \cdot x - 5$ . Koeficijent smjera pravca  $p$  jednak je  $k = \operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$ . Stoga je jednadžba toga pravca:

$$p \dots y - (-2) = \sqrt{3} \cdot (x - \sqrt{3}),$$

$$p \dots y + 2 = \sqrt{3} \cdot x - 3,$$

$$p \dots y = \sqrt{3} \cdot x - 3 - 2,$$

$$p \dots y = \sqrt{3} \cdot x - 5.$$

- 2.)  $K \dots (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$ . Središte kružnice je točka  $S = (-3, 2)$ . Kružnica prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravlini, pa je kvadrat njezina polumjera jednak kvadratu udaljenosti točke  $S$  i ishodišta:

$$r^2 = (-3 - 0)^2 + (2 - 0)^2 = (-3)^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13.$$

Dakle, jednadžba kružnice glasi:  $K \dots (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$ .

3.) 20. Podijelimo jednadžbu krivulje s 576, pa dobijemo:

$$\frac{9 \cdot x^2}{576} - \frac{16 \cdot y^2}{576} = 1,$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Zaključujemo da se radi o hiperboli kojoj je duljina velike poluosi  $a = \sqrt{64} = 8$ , a duljina male poluosi  $b = \sqrt{36} = 6$ . Razmak između žarišta (fokusa) te hiperbole jednak je  $2 \cdot e$ , gdje je  $e$  linearni ekscentricitet hiperbole. Tako slijedi:

$$d(F_1, F_2) = 2 \cdot e = 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \cdot \sqrt{64 + 36} = 2 \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 10 = 20.$$

28. 1.) 1, 3, 5 ili neki drugi redosljed tih brojeva. Uočimo da je  $12 - 4 \cdot x = 4 \cdot (3 - x)$ . Tako redom imamo:

$$\begin{aligned} (3-x)^3 &= 12 - 4 \cdot x, \\ (3-x)^3 &= 4 \cdot (3-x), \\ (3-x)^3 - 4 \cdot (3-x) &= 0, \\ (3-x) \cdot [(3-x)^2 - 4] &= 0, \\ (3-x) \cdot (9 - 6 \cdot x + x^2 - 4) &= 0, \\ (3-x) \cdot (x^2 - 6 \cdot x + 5) &= 0, \\ 3-x &= 0 \text{ ili } x^2 - 6 \cdot x + 5 = 0, \\ x_1 = 3 \text{ ili } x_{2,3} &= \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \\ x_1 = 3, x_2 &= \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5, x_3 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

2.)  $x \in \left\langle -\infty, \frac{3}{2} \right\rangle$ . Uočimo da je  $4^x = (2^2)^x = 2^{2 \cdot x}$ . Imamo redom:

$$\begin{aligned} 2^{2 \cdot x+1} + 4^x &< 24, \\ 2^{2 \cdot x} \cdot 2^1 + 2^{2 \cdot x} &< 24, \\ 2^{2 \cdot x} \cdot (2^1 + 1) &< 24, \\ 2^{2 \cdot x} \cdot (2 + 1) &< 24, \\ 2^{2 \cdot x} \cdot 3 &< 24, \quad / : 3 \\ 2^{2 \cdot x} &< 8, \\ 2^{2 \cdot x} &< 2^3, \\ 2 \cdot x &< 3, \\ x &< \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left\langle -\infty, \frac{3}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

3.) **5.28 litara.** Ako u boci ima 6 litara 30%-tnoga alkohola, onda je obujam čistoga alkohola u boci  $6 \cdot \frac{3}{10} = 1.8$  litara. Dakle, u boci je na početku bilo 1.8 litara alkohola i  $6 - 1.8 = 4.2$  litre vode.

Neka su  $a$  obujam ishlapjeloga alkohola i  $v$  obujam ishlapjele vode. Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost  $a = 2 \cdot v$ . Obujam preostalog alkohola iznosi  $1.8 - a$ , a obujam preostale vode  $4.2 - v$ . Ukupni obujam preostale tekućine jednak je  $6 - a - v$ . Postotni udio obujma preostalog alkohola u tom obujmu iznosi 25%, pa mora vrijediti jednakost

$$\frac{1.8 - a}{6 - a - v} = \frac{25}{100}.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ \frac{1.8 - a}{6 - a - v} = \frac{25}{100} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ \frac{1.8 - a}{6 - a - v} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ 4 \cdot (1.8 - a) = 6 - a - v \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ 7.2 - 4 \cdot a = 6 - a - v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ -4 \cdot a + a + v = 6 - 7.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot v, \\ -3 \cdot a + v = -1.2. \end{cases} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe sustava u drugu dobivamo  $-3 \cdot 2 \cdot v + v = -1.2$ , odnosno  $-6 \cdot v + v = -1.2$ , odnosno  $-5 \cdot v = -1.2$ . Odatle je  $v = \frac{1.2}{5} = 0.24$ , pa je  $a = 2 \cdot v = 2 \cdot 0.24 = 0.48$ . Dakle, preostali obujam tekućine u boci jednak je  $6 - a - v = 6 - 0.24 - 0.48 = 5.28$  litara.

29. 1.)  $\left(\frac{5}{2}, 4\right]$ . Funkcija drugoga korijena je definirana ako i samo ako je radikand (izraz pod drugim korijenom) nenegativan. Odatle dobivamo uvjet  $4 \cdot x - x^2 \geq 0$ . Nadalje, logaritamska funkcija je definirana ako i samo ako je logaritmand (izraz pod logaritmom) strogo pozitivan. Odatle dobivamo uvjet  $2 \cdot x - 5 > 0$ . Tako smo dobili sustav nejednadžbi:

$$\begin{cases} 4 \cdot x - x^2 \geq 0, \\ 2 \cdot x - 5 > 0. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav. Prvu nejednadžbu najlakše je riješiti grafički. Polinom  $p(x) = -x^2 + 4 \cdot x$  ima vodeći koeficijent  $-1$ . Njegove nultočke dobijemo rješavanjem jednadžbe  $-x^2 + 4 \cdot x = 0$ , odnosno jednadžbe  $-x \cdot (x - 4) = 0$ . Lako očitamo  $x_1 = 0$  i  $x_2 = 4$ . Zbog toga je  $p(x) \geq 0$  na segmentu određenom nultčkama polinoma  $p$ . Dakle, skup svih rješenja prve nejednadžbe je segment  $[0, 4]$ .

Iz druge nejednadžbe odmah slijedi  $2 \cdot x > 5$ , odnosno  $x > \frac{5}{2}$ . Skup svih rješenja ove nejednadžbe je otvoreni interval  $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ .

Tražena prirodna domena je presjek dobivenih skupova. Lako vidimo da je  $[0, 4] \cap \left\langle \frac{5}{2}, +\infty \right\rangle = \left( \frac{5}{2}, 4 \right]$  i to je tražena domena.

2.)  $t... y = \frac{1}{7} \cdot x + \frac{9}{7}$  ili  $x - 7 \cdot y + 9 = 0$ . Odredimo najprije drugu koordinatu točke u kojoj je povučena tangenta. Prva koordinata te točke jednaka je 5, pa je druga koordinata jednaka  $f(5) = \frac{3 \cdot 5 - 1}{5 + 2} = \frac{15 - 1}{7} = \frac{14}{7} = 2$ . Dakle, tangentu povlačimo u točki  $T = (5, 2)$ .

Koeficijent smjera povučene tangente jednak je vrijednosti prve derivacije funkcije  $f$  u točki 5. Stoga najprije odredimo prvu derivaciju funkcije  $f$ . Koristimo pravilo za deriviranje količnika:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3 \cdot x - 1)' \cdot (x + 2) - (3 \cdot x - 1) \cdot (x + 2)'}{(x + 2)^2} = \frac{(3 \cdot 1 - 0) \cdot (x + 2) - (3 \cdot x - 1) \cdot (1 + 0)}{(x + 2)^2} = \\ &= \frac{3 \cdot (x + 2) - (3 \cdot x - 1) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{3 \cdot x + 6 - 3 \cdot x + 1}{(x + 2)^2} = \frac{7}{(x + 2)^2}. \end{aligned}$$

Zbog toga je koeficijent smjera tangente jednak:

$$k = f'(1) = \frac{7}{(5 + 2)^2} = \frac{7}{7^2} = \frac{1}{7}.$$

Preostaje napisati jednadžbu tangente:

$$t... y - 2 = \frac{1}{7} \cdot (x - 5)$$

$$t... y = \frac{1}{7} \cdot x - \frac{5}{7} + 2$$

$$t... y = \frac{1}{7} \cdot x + \frac{9}{7}$$

ili u implicitnom obliku

$$t... y = \frac{1}{7} \cdot x + \frac{9}{7} \quad / \cdot 7$$

$$t... 7 \cdot y = x + 9,$$

$$t... x - 7 \cdot y + 9 = 0.$$

3.)  $x = \frac{\pi}{3}$ . Primijetimo najprije da su sva tri razlomka definirana za  $x \in \langle 0, \pi \rangle \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ .

Zadani izrazi tvore tri uzastopna člana aritmetičkoga niza ako i samo ako je srednji član jednak aritmetičkoj sredini prvoga i trećega člana. Tako redom imamo:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x}{2},$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin x} &= \frac{\frac{1}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{2}, \\
 \frac{1}{\sin x} &= \frac{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{2}, \\
 \frac{1}{\sin x} &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x}, \\
 \frac{1}{\sin x} &= \frac{1}{2 \sin x \cdot \cos x}, \\
 \frac{1}{\sin x} &= \frac{1}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}, \\
 \sin x &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \\
 \sin x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x &= 0, \\
 \sin x \cdot (1 - 2 \cdot \cos x) &= 0.
 \end{aligned}$$

Ako bi bilo  $\sin x = 0$ , onda drugi član niza ne bi bio definiran. Zato mora biti  $1 - 2 \cdot \cos x = 0$ , odnosno  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Ova jednačba u skupu  $\langle 0, \pi \rangle \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$  ima jedinstveno rješenje  $x = \frac{\pi}{3}$ .

4.)  $\approx 19^\circ 11' 18''$ . Neka su  $P$  polovište stranice  $\overline{AB}$  i  $t := |\overline{CP}|$ . Trokut  $APC$  je pravokutan s pravim kutom pri vrhu  $C$ . Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$|\overline{AP}|^2 = |\overline{CP}|^2 + |\overline{AC}|^2 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \right)^2 = |\overline{CP}|^2 + |\overline{AC}|^2 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{2} \cdot 12 \right)^2 = t^2 + |\overline{AC}|^2 \Leftrightarrow 6^2 = t^2 + |\overline{AC}|^2.$$

Primjenom kosinusova poučka na trokut  $\triangle CPB$  dobivamo:

$$\begin{aligned}
 |\overline{CP}|^2 &= |\overline{BC}|^2 + |\overline{BP}|^2 - 2 \cdot |\overline{BC}| \cdot |\overline{BP}| \cdot \cos \angle PBC, \\
 t^2 &= 8^2 + \left( \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot \cos \beta, \\
 t^2 &= 8^2 + \left( \frac{1}{2} \cdot 12 \right)^2 - 8 \cdot 12 \cdot \cos \beta, \\
 t^2 &= 8^2 + 6^2 - 96 \cdot \cos \beta,
 \end{aligned}$$

Preostaje primijeniti kosinusov poučak na trokut  $\triangle ABC$ :

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 - 2 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| \cdot \cos \angle ABC,$$

$$|\overline{AC}|^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos \beta,$$

$$|\overline{AC}|^2 = 12^2 + 8^2 - 192 \cdot \cos \beta.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav:

$$\begin{cases} 6^2 = t^2 + |\overline{AC}|^2, \\ t^2 = 8^2 + 6^2 - 96 \cdot \cos \beta, \\ |\overline{AC}|^2 = 12^2 + 8^2 - 192 \cdot \cos \beta. \end{cases}$$

Iz ovih jednadžbi treba odrediti  $\cos \beta$ . Zbrojimo drugu i treću jednadžbu, pa u dobiveni izraz uvrstimo prvu jednadžbu:

$$t^2 + |\overline{AC}|^2 = 8^2 + 6^2 - 96 \cdot \cos \beta + 12^2 + 8^2 - 192 \cdot \cos \beta,$$

$$6^2 = 8^2 + 6^2 - 96 \cdot \cos \beta + 12^2 + 8^2 - 192 \cdot \cos \beta,$$

$$0 = 8^2 - 96 \cdot \cos \beta + 12^2 + 8^2 - 192 \cdot \cos \beta,$$

$$96 \cdot \cos \beta + 192 \cdot \cos \beta = 8^2 + 12^2 + 8^2,$$

$$288 \cdot \cos \beta = 64 + 144 + 64,$$

$$288 \cdot \cos \beta = 272,$$

$$\cos \beta = \frac{272}{288} = \frac{17}{18}.$$

Odatle slijedi  $\beta = 19.1881364537 \approx 19^\circ 11' 18''$ .

30.  $12 \cdot \pi$  cm. Označimo sa  $S$  središte stavljenе kugle. Neka ta kugla dira izvodnice stošca u točkama  $D_1$  i  $D_2$ . Neka je  $C$  vrh stošca. Tada je trokut  $\triangle SCD_1$  pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu  $D_1$  jer je pravac  $CD_1$  tangenta kružnice čiji je polumjer  $\overline{SD_1}$ . Označimo li s  $\alpha$  mjeru kuta  $\angle SCD_1$ , onda iz pravokutnoga trokuta  $\triangle SCD_1$  slijedi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\overline{SD_1}|}{|\overline{CD_1}|} = \frac{10}{|\overline{CD_1}|}.$$

Neka je  $S_1$  središte osnovke stošca (kružnice). Zbog simetrije, točka  $S_1$  pripada pravcu  $\overline{CS}$  i nužno se nalazi na dužini  $\overline{CS}$ . Naime, ako bi točka  $S_1$  bila izvan dužine  $\overline{CS}$ , onda bi cijela kugla bila stavljenа unutar stošca i dodirivala bi osnovku stošca, što je suprotno pretpostavci da stavljenа kugla dodiruje samo izvodnice stošca.

Neka je  $A$  točka na pravcu  $CD_1$  takva da je  $|\overline{S_1A}| = r_s$  = polumjer osnovke stošca. Promotrimo trokut  $S_1CA$ . Taj trokut je pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu  $S_1$  jer



je pravac  $CS_1$  pravac na kojemu leži visina stošca (spojnica vrha stošca i središta osnovke stošca je pravac na kojemu leži visina stošca). U tom trokutu znamo duljine dviju stranica:  $|\overline{AC}| = s = 15$ ,  $|\overline{S_1C}| = v = 9$ , pa primjenom Pitagorina poučka izračunamo:

$$r_s = |\overline{AS_1}| = \sqrt{s^2 - v^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12.$$

(Mjerne jedinice za duljinu namjerno izostavljamo i prešutno pretpostavljamo da je riječ o centimetrima.) No, mjera kuta kod vrha  $C$  u trokutu  $S_1CA$  je također  $\alpha$ , pa slijedi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_s}{v} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

Naposljetku, neka je  $S_2$  središte kružnice u kojoj se dodiruju kugla i plašt stošca. Ponovno zbog simetrije, i točka  $S_2$  pripada pravcu  $CS$ . Uočimo trokut  $\Delta S_2CD_1$ . Pravci  $S_2D_1$  i  $S_1A$  su usporedni, pa je trokut  $\Delta S_2CD_1$  pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu  $S_2$ . No, mjera kuta kod vrha  $C$  i u tom trokutu je također  $\alpha$ , pa slijedi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\overline{S_2D_1}|}{|\overline{CS_2}|} = \frac{r}{|\overline{CS_2}|} = \frac{r}{\sqrt{|\overline{CD_1}|^2 - |\overline{S_2D_1}|^2}} = \frac{r}{\sqrt{|\overline{CD_1}|^2 - r^2}},$$

gdje je  $r$  polumjer kružnice u kojoj se dodiruju kugla i plašt stošca.

Tako smo dobili tri različita izraza za  $\operatorname{tg} \alpha$ . Svi oni određuju istu veličinu, pa moraju biti međusobno jednaki. Stoga mora vrijediti:

$$\frac{4}{3} = \frac{10}{|\overline{CD_1}|} = \frac{r}{\sqrt{|\overline{CD_1}|^2 - r^2}}.$$

Iz prve jednakosti odmah slijedi  $|\overline{CD_1}| = \frac{15}{2}$ , odnosno  $|\overline{CD_1}|^2 = \frac{225}{4}$ . Slijedi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\right)^2 &= \frac{r}{|\overline{CD_1}|^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{16}{9} = \frac{r^2}{\frac{225}{4} - r^2} \Leftrightarrow 16 \cdot \left(\frac{225}{4} - r^2\right) = 9 \cdot r^2 \Leftrightarrow \\ 900 - 16 \cdot r^2 &= 9 \cdot r^2 \Leftrightarrow 16 \cdot r^2 + 9 \cdot r^2 = 900 \Leftrightarrow 25 \cdot r^2 = 900 \Leftrightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je traženi opseg jednak  $O = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 6 \cdot \pi = 12 \cdot \pi$  cm.

Pripremio:  
**mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač**