TVZ POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE	**Matematika na državnoj maturi – viša razina**	**rješenja zadataka iz lipnja 2019.**

1. **C**. Zaokružimo li zadani broj na najbliži cijeli broj, dobit ćemo 5 (jer je prva znamenka iza decimalne točke 5).

Zaokružimo li zadani broj na jednu decimalu, dobit ćemo 4.6 jer je druga znamenka iza decimalne točke 7, tj. veća od 5.

Zaokružimo li zadani broj na dvije decimale, dobit ćemo 4.57 jer je treća znamenka iza decimalne točke 2, tj. manja od 5.

Zaokružimo li zadani broj na tri decimale, dobit ćemo 4.573 jer je četvrta znamenka iza decimalne točke 6, tj. veća od 5.

Odatle slijedi da zaokruživanje zadanoga broja na dvije decimale nije ispravno.

2. **A**. Pomaknemo li se od točke T po pravcu $x=-12$ za pet jediničnih dužina ulijevo, doći ćemo u točku $T_1=(-12-5,8)=(-17,8)$. Pomaknemo li se od te točke po istom pravcu za pet jediničnih dužina udesno, doći ćemo u točku $T_2=(-12+5,8)=(-7,8)$.

Analogno, pomaknemo li se od točke T po pravcu $y=8$ za pet jediničnih dužina prema gore, doći ćemo u točku $T_3=(-12,8+5)=(-12,13)$. Pomaknemo li se od te točke po istom pravcu za pet jediničnih dužina prema dolje, doći ćemo u točku $T_4=(-12,8-4)=(-12,4)$.

Dakle, rješenje zadatka je točka $T_1=(-17,8)$.

3. **B.** Iz zadane jednakosti izrazimo R. Pomnožimo zadanu jednakost sa $\frac{R}{Q\cdot v\cdot B}$.

Dobit ćemo:

$$R=\frac{m\cdot v^2}{Q\cdot v\cdot B}.$$

Ako je $v=0$, onda veličina R nije definirana (nazivnik je jednak nuli). Ako je $v\neq 0$, onda razlomak na desnoj strani smijemo skratiti sa v i dobiti:

$$R=\frac{m\cdot v}{Q\cdot B}.$$

***Napomena*: Službeni rezultat je točan uz dodatnu pretpostavku $v\neq 0$.**

4. **C**. Simetrala zadane dužine prolazi njezinim polovištem okomito na zadanu dužinu. Zbog toga je njezin koeficijent smjera suprotan i recipročan u odnosu na koeficijent smjera pravca kojemu pripada zadana dužina.

Odredimo najprije koordinate polovišta P zadane dužine:

$$P=\left(\frac{1+(-3)}{2},\frac{2+4}{2}\right)=\left(\frac{-2}{2},\frac{6}{2}\right)=(-1,3).$$

Sada izračunajmo koeficijent smjera simetrale:

$$k=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{x_A-x_B}{y_B-y_A}=\frac{1-(-3)}{4-2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Preostaje napisati jednadžbu simetrale (u eksplicitnom obliku) koristeći izraz za jednadžbu pravca kojemu su zadani koeficijent smjera i jedna točka pravca:

$$\begin{aligned}
&s\ldots\ y-3=2\cdot(x-(-1)),\\
&s\ldots\ y-3=2\cdot(x+1),\\
&s\ldots\ y=2\cdot x+2+3,\\
&s\ldots\ y=2\cdot x+5.
\end{aligned}$$

5. **D**. Prema definiciji funkcije apsolutne vrijednosti, nejednadžba $|x|<a$ ekvivalentna je nejednadžbi $-a<x<a.$ Riješimo svaku od četiriju ponuđenih nejednadžbi.

Prema gornjoj napomeni, nejednadžba $|x-6|<3$ ekvivalentna je nejednadžbi $-3<x-6<3.$ Svakoj strani ove nejednadžbe dodamo 6, pa dobijemo $3<x<9.$ Zbog toga je skup svih rješenja ove nejednadžbe interval $\langle 3,9\rangle$.

Analogno, nejednadžba $|x-3|<6$ ekvivalentna je nejednadžbi $-6<x-3<6.$ Svakoj strani ove nejednadžbe dodamo 3, pa dobijemo $-3<x<9.$ Zbog toga je skup svih rješenja ove nejednadžbe interval $\langle -3,9\rangle$.

Nejednadžba $|x+6|<3$ ekvivalentna je nejednadžbi $-3<x+6<3.$ Od svake strane ove nejednadžbe oduzmemo 6, pa dobijemo $-9<x<-3.$ Zbog toga je skup svih rješenja ove nejednadžbe interval $\langle -9,-3\rangle$.

Nejednadžba $|x+3|<6$ ekvivalentna je nejednadžbi $-6<x+3<6.$ Od svake strane ove nejednadžbe oduzmemo 3, pa dobijemo $-9<x<3.$ Zbog toga je skup svih rješenja ove nejednadžbe interval $\langle -9,3\rangle$, odnosno zadani interval.

6. **B.** Primijetimo najprije da mjera kuta nasuprot kraćoj stranici mora biti strogo manja od 63° jer se nasuprot stranici veće duljine nalazi kut veće mjere. Označimo li traženu mjeru s α, primjenom sinusova poučka i funkcije arkus sinus (koju smijemo primijeniti jer tražimo mjeru u intervalu $\langle 0,63^\circ\rangle$) dobivamo:

$$\frac{17}{\sin 63^\circ}=\frac{12}{\sin\alpha}\Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{12}{17}\cdot\sin 63^\circ\Rightarrow\alpha=\arcsin\left(\frac{12}{17}\cdot\sin 63^\circ\right)\approx 38.97239^\circ=38^\circ 58' 21''.$$

7. **A**. Pomaknimo (translatirajmo) vektor $\vec{c}$ u krajnju točku vektora $\vec{a}$, a iz krajnje točke vektora $\vec{b}$ nacrtajmo vektor jednak vektoru $\vec{b}$. Tako ćemo dobiti trokut u kojemu vrijedi jednakost: $\vec{a}+\vec{c}+(-2)\cdot\vec{b}=\vec{0}$. Odatle lagano slijedi $\vec{c}=-\vec{a}+2\cdot\vec{b}$.

Napomena: Zadatak se može riješiti i analitički. Postavimo pravokutni koordinatni sustav u ravnini tako da ishodište bude početna točka svih triju zadanih vektora. U tom koordinatnom sustavu standardno uvedimo osnovne jedinične vektore $\vec{i}$ i $\vec{j}$. Tada zadane vektore možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$:

$$\vec{a}=3\cdot\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=-\vec{i}+2\cdot\vec{j},\ \vec{c}=-5\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}.$$

Tražimo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ takve da vrijedi jednakost $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&-5\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}=\alpha\cdot\left(3\cdot\vec{i}+\vec{j}\right)+\beta\cdot\left(-\vec{i}+2\cdot\vec{j}\right),\\
&-5\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}=(3\cdot\alpha-\beta)\cdot\vec{i}+(\alpha+2\cdot\beta)\cdot\vec{j}\Rightarrow\\
&\begin{cases}3\cdot\alpha-\beta=-5,\\ \alpha+2\cdot\beta=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6\cdot\alpha-2\cdot\beta=-10,\\ \alpha+2\cdot\beta=3.\end{cases}
\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih jednadžbi dobivamo $7\cdot\alpha=-7$, a odatle je $\alpha=-1$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu sustava slijedi $\beta=3\cdot\alpha+5=3\cdot(-1)+5=-3+5=2$. Dakle, tražena linearna kombinacija je $\vec{c}=-\vec{a}+2\cdot\vec{b}$.

8. **B.** Prema pretpostavci, zadani trokutovi su slični, što znači da se duljina najduže stranica sličnoga trokuta dobije množenjem duljine najduže stranice zadanoga trokuta koeficijentom sličnosti k. Duljina najduže stranice sličnoga trokuta je 20 cm, duljina najduže stranice zadanoga trokuta je 12.5 cm, pa dobivamo jednadžbu:

$$20=k\cdot 12.5.$$

Odatle je $k=\frac{20}{12.5}=\frac{8}{5}$. Površina sličnoga trokuta dobiva se tako da se površina zadanoga trokuta pomnoži sa k^2. Ekvivalentno, površina zadanoga trokuta dobiva se tako da se površina sličnoga trokuta podijeli sa k^2. Tako slijedi da je traženi omjer jednak:

$$1:k^2=1:\left(\frac{8}{5}\right)^2=1:\frac{8^2}{5^2}=\frac{5^2}{8^2}=\frac{25}{64}=0.390625.$$

9. **D**. Zapišimo najprije zadani broj u standardnom (algebarskom) obliku. U tu svrhu pomnožimo brojnik i nazivnik s i i primijenimo osnovno svojstvo imaginarne jedinice, tj. jednakost $i^2 = -1$. Dobivamo:

$$z = \frac{(-i+1)\cdot i}{i\cdot i} = \frac{-i^2+i}{i^2} = \frac{-(-1)+i}{(-1)} = \frac{-(-1)}{(-1)} + \frac{i}{(-1)} = -1-i.$$

Tom broju u Gaussovoj ravnini pridružena je točka $Z = (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z) = (-1,-1)$. Ona se nalazi u trećem kvadrantu te ravnine, pa je traženi glavni argument jednak:

$$\varphi = \mathrm{Arg}(z) = \pi + \mathrm{arctg}\left|\frac{-1}{-1}\right| = \pi + \mathrm{arctg}(1) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\cdot\pi.$$

10. **D**. Zadanu jednadžbu najprije transformirajmo ovako:

$$\left(5^x\right)^2 - 7\cdot 5^x\cdot 5^1 + 250 = 0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 - 7\cdot 5^x\cdot 5 + 250 = 0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 - 35\cdot 5^x + 250 = 0.$$

Uvedimo zamjenu $t := 5^x$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu $t^2 - 35\cdot t + 250 = 0$. Koristeći Viètеove formule (tražimo dva broja čiji je zbroj 35, a umnožak 250) lako napamet nalazimo da su rješenja te jednadžbe $t_1 = 10$ i $t_2 = 25$.

Tako iz jednadžbe $5^x = 10$ slijedi $x_1 = \log_5 10 = \frac{1}{\log 5}$, a iz jednadžbe $5^x = 25$ slijedi $x_2 = 2$. Zbog toga je traženi zbroj jednak $x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{\log 5} \approx 3.43068$.

11. **A**. Najveća vrijednost funkcije $f_1(x) = \sin x$ jednaka je 1, pa je najveća vrijednost zadane funkcije jednaka $f_{\max} = 2\cdot 1 = 2$.

Najveća vrijednost funkcije f_1 postiže se za $x = \frac{\pi}{2} + 2\cdot k\cdot\pi$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$. Zbog toga dalje imamo:

$$3\cdot x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\cdot k\cdot\pi \Leftrightarrow 3\cdot x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2\cdot k\cdot\pi \Leftrightarrow 3\cdot x = \pi + 2\cdot k\cdot\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot x = (2\cdot k+1)\cdot\pi \Leftrightarrow x = (2\cdot k+1)\cdot\frac{\pi}{3}.$$

Dakle, svoju najveću vrijednost funkcija postiže u neparnim „višekratnicima“ broja $\frac{\pi}{3}$. Najmanji takav pozitivan „višekratnik“ dobiva se za $k = 0$ i jednak je $\frac{\pi}{3}$.

12. **B**. Koristeći definiciju kompozicije funkcija dobivamo redom:

$$f(x)=(f_2\circ f_1)(x)=f_2(f_1(x))=f_2(3-x)=-(3-x)+\sqrt{3-x}=x-3+\sqrt{3-x}.$$

13. C. Umnožak dvaju realnih brojeva je strogo negativan ako i samo ti brojevi imaju različite predznake. U ovom slučaju to znači da ako povučemo pravac čija je jednadžba $x=a$, onda će umnožak $f(a)\cdot g(a)$ biti strogo negativan ako taj pravac siječe zadane krivulje u različitim kvadrantima. Naime, pravac $x=a$ siječe graf funkcije f u točki $T_1=(a,f(a))$, a graf funkcije g u točki $T_2=(a,g(a))$. Ako su te točke u različitim kvadrantima, onda $f(a)$ i $g(a)$ imaju različite predznake, što i želimo dobiti.

Pravac $x=0$ (os ordinata) očito siječe obje krivulje u točkama kojima je druga koordinata strogo pozitivna. Zbog toga je umnožak $f(0)\cdot g(0)$ strogo pozitivan.

Pravac $x=1$ očito siječe graf funkcije f u točki $(1,0)$. Zbog toga je umnožak $f(1)\cdot g(1)$ jednak nuli, pa nije strogo negativan realan broj.

Pravac $x=3$ očito siječe graf funkcije f u četvrtom kvadrantu, a graf funkcije g u prvom kvadrantu. Zbog toga je umnožak $f(3)\cdot g(3)$ strogo negativan realan broj.

Pravac $x=4$ očito siječe grafove funkcija f i g u četvrtom kvadrantu. Zbog toga je umnožak $f(4)\cdot g(4)$ strogo pozitivan realan broj.

14. C. Najprije zamislimo da je desno od svakoga drveta, osim zadnjega, posađen točno jedan grm. Ukupan broj posađenih grmova za jedan je manji od ukupnoga broja svih stabala, tj. jednak je $238-1=237$.

Sada desno od svakoga stabla označenoga neparnim prirodnim brojem između 1 i 238 posadimo još jedan grm. Ukupan broj svih novoposađenih grmova jednak je ukupnom broju svih neparnih prirodnih brojeva koji su jednaki ili veći od 1, a manji od 238, tj. ukupnom broju svih neparnih prirodnih brojeva u intervalu $[1,238\rangle$. Ti brojevi tvore aritmetički niz čiji su prvi član 1, posljednji član 237 i razlika 2, pa iz jednadžbe

$$237=1+(k-1)\cdot 2$$

odmah slijedi

$$k=\frac{237-1}{2}+1=\frac{236}{2}+1=118+1=119.$$

Dakle, ukupan broj svih posađenih grmova jednak je $237+119=356$.

15. C. Brojevi koji su veći od 0 i jednaki ili manji od 10 tvore ukupno $65\%-25\%=$ $=40\%$ cijeloga skupa. To su ujedno pozitivni brojevi koji su jednaki ili manji od 10. Brojevi koji su veći od 10 tvore ukupno $100\%-65\%=35\%$ cijeloga skupa. Zbog toga je traženi omjer jednak $40\%:35\%=8:7$.

16. 1.) **840**. Traženi je broj najmanji zajednički višekratnik brojeva 60 i 168. Rastavimo svaki od tih dvaju brojeva na proste faktore, pa dobijemo:

$$60=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5,\ 168=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7,$$

otkuda slijedi da je traženi broj jednak $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=840$.

2.) $(x-11)\cdot(x-13)$ **ili** $(x-13)\cdot(x-11)$**.** Najprije pojednostavnimo zadani izraz koristeći formulu za kvadrat binoma. Imamo redom:

$$(x-7)^2-10\cdot(x-7)+24=x^2-2\cdot x\cdot 7+7^2-10\cdot x+70+24=$$
$$=x^2-14\cdot x+49-10\cdot x+70+24=x^2-24\cdot x+143.$$

Potom odredimo rješenja kvadratne jednadžbe $x^2-24\cdot x+143=0$. Dobivamo:

$$x^2-24\cdot x+143=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{24^2-4\cdot 1\cdot 143}}{2\cdot 1}=\frac{24\pm\sqrt{576-572}}{2}=\frac{24\pm\sqrt{4}}{2}=$$
$$=\frac{24\pm 2}{2}\Rightarrow x_1=\frac{24+2}{2}=\frac{26}{2}=13,\ x_2=\frac{24-2}{2}=\frac{22}{2}=11.$$

Preostaje primijeniti Osnovni poučak algebre, te je konačno:

$$x^2-24\cdot x+143=1\cdot(x-13)\cdot(x-11)=(x-13)\cdot(x-11).$$

17. 1.) **50.** Neka je t traženo vrijeme (iskazano u minutama). Nakon proteka toga vremena u prvoj će posudi ostati ukupno $250-t\cdot 3$ litara vode, dok će u drugoj posudi biti ukupno $2\cdot t$ litara vode. Ta dva volumena moraju biti jednaka, pa dobivamo jednadžbu:

$$250-t\cdot 3=2\cdot t.$$

Riješimo je na uobičajen način:

$$250=3\cdot t+2\cdot t\Leftrightarrow 5\cdot t=250\Leftrightarrow t=50.$$

2.) **46.** Neka su a i k redom ukupan broj sjedala u autobusu, odnosno ukupan broj sjedala u kombiju. U četirima kombijima ima ukupno $4\cdot k$ sjedala, a u šest autobusa ima ukupno $6\cdot a$ sjedala. Ukupan broj svih sjedala u četirima kombijima i

šest autobusa jednak je $4\cdot k+6\cdot a$. Prema zahtjevu zadatka taj broj mora biti jednak 356, pa dobivamo jednadžbu:

$$4\cdot k+6\cdot a=356 \Leftrightarrow 2\cdot k+3\cdot a=178.$$

Analogno, u dvama kombijima ima ukupno $2\cdot k$ sjedala, a u osam autobusa ima ukupno $8\cdot a$ sjedala. Ukupan broj svih sjedala u dvama kombijima i osam autobusa jednak je $2\cdot k+8\cdot a$. Prema zahtjevu zadatka taj broj mora biti jednak 448, pa dobivamo jednadžbu:

$$2\cdot k+8\cdot a=448.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 2\cdot k+3\cdot a=178, \\ 2\cdot k+8\cdot a=448. \end{cases}$$

Oduzmemo li prvu jednadžbu od druge, dobit ćemo $5\cdot a=270$, a odatle je $a=54$. Uvrštavanjem te vrijednosti npr. u prvu jednadžbu sustava dobivamo $2\cdot k+3\cdot 54=178,$ odnosno $2\cdot k=178-3\cdot 54 \Leftrightarrow 2\cdot k=178-162 \Leftrightarrow 2\cdot k=16 \Leftrightarrow k=8.$ Dakle, svaki autobus ima ukupno 54 sjedala, a svaki kombi 8, pa je u svakom autobusu za $54-8=46$ sjedala više nego u kombiju.

18.1.) $x\in[-3,1\rangle$. Riješimo zasebno svaku nejednadžbu. Dobivamo:

$$\begin{cases} 2\cdot x<5-3, \\ -x\le 7-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot x<2, \\ -x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ x\ge -3. \end{cases}$$

Dakle, skup svih rješenja zadane nejednadžbe je interval $[-3,1\rangle$.

2.) $\dfrac{4\cdot x+13}{2\cdot x+6}=\dfrac{4\cdot x+13}{2\cdot (x+3)}$. Koristeći formulu za razliku kvadrata dobivamo:

$$\frac{x-3}{2\cdot x+4}\cdot\frac{x+2}{x^2-9}+2=\frac{x-3}{2\cdot (x+2)}\cdot\frac{x+2}{(x-3)\cdot (x+3)}+2=\frac{1}{2\cdot (x+3)}+2=\frac{1}{2\cdot x+6}+2=$$
$$=\frac{1+2\cdot (2\cdot x+6)}{2\cdot x+6}=\frac{1+4\cdot x+12}{2\cdot x+6}=\frac{4\cdot x+13}{2\cdot x+6}=\frac{4\cdot x+13}{2\cdot (x+3)}.$$

19. 1.) Bilo koje dvije točke $T_1=(a-1,a)$ **i** $T_2=(-a-5,a)$, **gdje je** $a\ge -2$. Najprije nađimo sve $a\in\mathbb{R}$ za koje jednadžba $f(x)=a$ ima barem dva različita realna rješenja (po nepoznanici x). Najprije imamo:

$$|x+3|-2=a \Leftrightarrow |x+3|=a+2.$$

Lijeva strana ove jednakosti je nenegativan realan broj, pa takva mora biti i desna strana. Taj zaključak daje linearnu nejednadžbu $a+2\geq 0$, odnosno $a\geq -2$. Dakle, jednadžba $f(x)=a$ ima barem dva realna rješenja ako i samo ako je $a\geq -2$. Odredimo i eksplicitne formule za ta rješenja:

$$(x+3=a+2)\vee(x+3=-(a+2))\Leftrightarrow(x=a+2-3)\vee(x=-a-2-3)\Leftrightarrow(x=a-1)\vee(x=-a-5).$$

Dakle, sve tražene točke su $T_1=(a-1,a)$ i $T_2=(-a-5,a)$, gdje je $a\geq -2$. Odaberimo npr. $a=0$, pa dobivamo točke $T_1=(-1,0)$ i $T_2=(-5,0)$.

2.) (0, 5). Prva koordinata traženoga sjecišta jednaka je 0. Druga koordinata toga sjecišta jednaka je $f(0)$, pa izračunajmo tu vrijednost:

$$f(0)=10^0+4=1+4=5.$$

Dakle, tražena točka je $S=(0,5)$.

20.1.) 33. Ako prosječan broj bodova u svih šest provjera treba biti jednak 40, onda je ukupan broj bodova u svih šest provjera jednak $6\cdot 40=240$. U prvim četirima provjerama Marko je ostvario ukupno $42+42+35+38=157$ bodova. Dakle, u petoj i šestoj provjeri treba ostvariti još $240-157=83$ boda. U posljednjoj, šestoj provjeri može ostvariti najviše 50 bodova (jer toliko bodova može ostvariti u svakoj provjeri), pa u petoj provjeri treba ostvariti najmanje $83-50=33$ boda.

2.) 2025. Neka je S vrijednost automobila u trenutku kupovine (početkom 2015. godine). Na kraju 2015. godine vrijednost automobila iznosi $S-\frac{1}{8}\cdot S=\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot S=\frac{7}{8}\cdot S$. Na kraju 2016. godine vrijednost automobila iznosi $\frac{7}{8}\cdot S-\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot S=\frac{7}{8}\cdot S\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)=$ $=\frac{7}{8}\cdot S\cdot\frac{7}{8}=\left(\frac{7}{8}\right)^2\cdot S$ itd. Induktivno zaključujemo da vrijednost automobila na kraju n-te godine iznosi $\left(\frac{7}{8}\right)^n\cdot S$.

Tražimo najmanji $k\in\mathbb{N}$ za koji je $\left(\frac{7}{8}\right)^k\cdot S<\frac{1}{4}\cdot S$. Riješimo tu eksponencijalnu jednadžbu na uobičajen način. Najprije je podijelimo sa S, što smijemo učiniti jer je, prema prirodi zadatka, $S>0$. Dobivamo:

$$\left(\frac{7}{8}\right)^k<\frac{1}{4}\Leftrightarrow k\cdot\log\left(\frac{7}{8}\right)<\log\left(\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$k > \frac{\log\left(\frac{1}{4}\right)}{\log\left(\frac{7}{8}\right)} = \frac{\log 1 - \log 4}{\log 7 - \log 8} = \frac{0 - \log 4}{\log 7 - \log 8} = \frac{-\log 4}{\log 7 - \log 8} = \frac{\log 4}{\log 8 - \log 7} \approx 10.4$$

Najmanji $k \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi ova nejednakost je $k_{\min} = 11$. Dakle, tražena godina je 11. član niza 2015, 2016, 2017, 2018, …, tj. 2015. + 10 = 2025. godina.

21.1.) $\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{98} = 1$ **ili** $\frac{x^2}{98} + \frac{y^2}{196} = 1$**.** Pretpostavimo da je jednadžba elipse zapisana u obliku $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdje su a i b redom duljina velike, odnosno duljina male poluosi elipse. Žarišta elipse nalaze se na velikoj osi elipse, pa se preostala dva vrha kvadrata nalaze u tjemenima elipse na maloj osi.

Udaljenost tih dvaju tjemena s jedne je strane jednaka duljini male osi elipse, a s druge – prema podacima u zadatku - duljini dijagonale kvadrata. Tako dobivamo jednakost $2 \cdot b = 14 \cdot \sqrt{2}$, a odavde je $b = 7 \cdot \sqrt{2}$, odnosno $b^2 = \left(7 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 7^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 49 \cdot 2 = 98.$

Udaljenost između žarišta elipse također je jednaka duljini dijagonale kvadrata. Tako dobivamo jednakost $2 \cdot e = 14 \cdot \sqrt{2}$, a odavde je $e = 7 \cdot \sqrt{2}$. Znamo da je $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, pa uvrštavanjem $e = 7 \cdot \sqrt{2}$ i $b^2 = 98$ u tu jednakost dobivamo:

$$7 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{a^2 - 98}, \quad /^2$$
$$98 = a^2 - 98 \Leftrightarrow a^2 = 98 + 98 = 196.$$

Dakle, jednadžba elipse glasi $\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{98} = 1.$

Gornje razmatranje proveli smo uz (prešutnu) pretpostavku da velika os elipse pripada osi apscisa, a mala os elipse osi ordinata. Pretpostavimo li da velika os elipse pripada osi ordinata, a mala os osi apscisa, onda dobivamo još jedno rješenje: $\frac{x^2}{98} + \frac{y^2}{196} = 1.$ Dakle, zadatak ima dva rješenja: $\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{98} = 1$ i $\frac{x^2}{98} + \frac{y^2}{196} = 1$.

2.) $y = \frac{5}{4} \cdot x$ **i** $y = -\frac{5}{4} \cdot x$**.** Primijetimo da vrijedi jednakost $25 \cdot 16 = 400$. Neka su a i b redom duljina realne, odnosno imaginarne poluosi hiperbole. Iz jednadžbe hiperbole očitamo $b^2 = 25$ i $a^2 = 16$, otkuda su $b = 5$ i $a = 4$. Tako odmah dobivamo da tražene asimptote imaju jednadžbe $y = \frac{5}{4} \cdot x$ i $y = -\frac{5}{4} \cdot x$.

22.1.) 12. Promjer bunara je $1.2\text{ m} = 1.2 \cdot 10 = 12$ dm, pa je polumjer bunara dvostruko manji, tj. $r = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ dm. Površina osnovke ploče jednaka je razlici površine kvadrata stranice $2\text{ m} = 2 \cdot 10 = 20$ dm i površine kruga polumjera 6 dm:

$$B = 20^2 - 6^2 \cdot \pi = 400 - 36 \cdot \pi \text{ dm}^2.$$

Visina ploče h jednaka je njezinoj debljini, tj. $5\text{ cm} = 5 \cdot 10^{-1} = 0.5$ dm. Volumen ploče jednak je volumenu valjka kojemu osnovka ima površinu B, a visina duljinu h. Taj volumen jednak je

$$V = B \cdot h = 0.5 \cdot (400 - 36 \cdot \pi) = 200 - 18 \cdot \pi \text{ dm}^3.$$

Tako zaključujemo da je traženi najmanji broj vreća suhoga betona jednak:

$$n_{\min} = \left\lceil \frac{200 - 18 \cdot \pi}{12.5} \right\rceil = \left\lceil \frac{400 - 36 \cdot \pi}{25} \right\rceil = \lceil 11.5 \rceil = 12.$$

2.) 3. Neka su r polumjer osnovke (baze) stošca (i valjka), v_v visina valjka i v_s visina stošca. Volumen valjka jednak je $r^2 \cdot \pi \cdot v_v$, dok je volumen stošca jednak $\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v_s$. Prema zahtjevu zadatka, ti volumeni su jednaki, pa mora vrijediti jednakost:

$$\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v_s = r^2 \cdot \pi \cdot v_v \quad / \cdot \frac{3}{r^2 \cdot \pi} > 0$$
$$v_s = 3 \cdot v_v.$$

Dakle, visina stošca je tri puta veća od visine valjka.

23. 1.) $\frac{k-5}{2 \cdot k + 4}$. Sve članove koji sadrže nepoznanicu x prebacimo na lijevu stranu jednakosti, a sve one koji ne sadrže nepoznanicu x prebacimo na desnu stranu jednakosti. Pritom pazimo na promjenu predznaka prilikom prijelaza s jedne strane jednakosti na drugu. Dobivamo:

$$2 \cdot k \cdot x + 4 \cdot x = k - 5 \Leftrightarrow x \cdot (2 \cdot k + 4) = k - 5 \Leftrightarrow x = \frac{k-5}{2 \cdot k + 4}.$$

Dijeljenje izrazom $2 \cdot k + 4$ smjeli smo provesti jer je, zbog pretpostavke $k \neq -2$, vrijednost toga izraza različita od nule. (Izraz $2 \cdot k + 4$ poprima vrijednost 0 ako i samo ako je $2 \cdot k + 4 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot k = -4 \Leftrightarrow k = -2.$)

2.) $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ Iz zadane jednadžbe slijedi $\operatorname{tg}^2 x=3$, a odatle je $\left|\operatorname{tg} x\right|=\sqrt{3}$. Iz jednadžbe $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ slijedi $x=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)+k\cdot\pi=\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi,$ dok iz jednadžbe $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ slijedi $x=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+k\cdot\pi=-\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi.$ Dakle, sva rješenja zadane jednadžbe su dana izrazom $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

24.1.) $\frac{1}{2}=0.5$**.** Vrijednost izraza $\frac{2\cdot x^4-x}{5}$ je minimalna ako i samo ako je vrijednost izraza $2\cdot x^4-x$ minimalna. Prva derivacija izraza $2\cdot x^4-x$ je $2\cdot\left(x^4\right)'-(x)'=2\cdot 4\cdot x^{4-1}-1$ $=8\cdot x^3-1$. Izjednačimo li taj izraz sa nulom, dobit ćemo jednadžbu $8\cdot x^3-1=0$, odnosno jednadžbu $x^3=\frac{1}{8}$. Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $x=\frac{1}{2}$.

Sada primijetimo da je predznak izraza $8\cdot x^3-1$ negativan ako je $x\in\left\langle-\infty,\frac{1}{2}\right\rangle$, a pozitivan ako je $x\in\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right\rangle$. To znači da funkcija $f_1(x)=2\cdot x^4-x$ strogo pada na intervalu $\left\langle-\infty,\frac{1}{2}\right\rangle$, a strogo raste na intervalu $\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right\rangle$. Budući da intervali $\left\langle-\infty,\frac{1}{2}\right\rangle$ i $\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right\rangle$, te skup $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ u uniji daju skup $\mathbb{R}$, odnosno prirodnu domenu funkcije f_1, zaključujemo da f_1 postiže globalni minimum za $x=\frac{1}{2}$. Odatle slijedi da za isti x globalni minimum, tj. svoju najmanju vrijednost postiže i zadana funkcija.

2.) $3\cdot n+3$. Zadani broj transformirajmo ovako:

$$8^n\cdot 5^{3\cdot n+4}=\left(2^3\right)^n\cdot 5^{3\cdot n}\cdot 5^4=2^{3\cdot n}\cdot 5^{3\cdot n}\cdot 625=(2\cdot 5)^{3\cdot n}\cdot 625=625\cdot 10^{3\cdot n}.$$

Dakle, rješenje je broj oblika $625\underbrace{0\ldots0}_{3\cdot n\text{ nula}}$ koji očito ima ukupno $3\cdot n+3$ znamenaka.

25.1.) $\frac{7+\sqrt{13}}{2}\approx 5.30276.$ Neka je x tražena duljina. Tada je $\left|\overline{EB}\right|=\left|\overline{AB}\right|-\left|\overline{AE}\right|=7-x$. Prema pretpostavci zadatka, točka E nalazi se bliže točki B, što znači da je tražena duljina veća od polovice duljine stranice $\overline{AB}$, a manja od duljine te strane. Dakle, mora vrijediti jednakost $x\in\left\langle\frac{7}{2},7\right\rangle$.

Dokažimo da su trokuti AED i EBC slični. Oba ta trokuta su pravokutna. Nadalje, vrijede jednakosti

$$\begin{cases} \angle AED + 90^\circ + \angle CEB = 180^\circ, \\ \angle CEB + \angle ECB = 90^\circ. \end{cases}$$

Oduzimanjem druge jednakosti od prve dobivamo:

$$\begin{aligned} &\angle AED + 90^\circ + \angle CEB - (\angle CEB + \angle ECB) = 180^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow \\ &\angle AED + \angle CEB - \angle CEB - \angle ECB = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow \\ &\angle AED - \angle ECB = 0^\circ \Leftrightarrow \angle AED = \angle ECB. \end{aligned}$$

Dakle, mjera kuta kod vrha E u trokutu AED jednaka je mjeri kuta kod vrha C u trokutu EBC. Dakle, pravokutni trokutovi AED i EBC imaju par šiljastih kutova jednakih mjera, pa primjenom poučka K-K zaključujemo da su ti trokutovi slični, što smo i tvrdili.

Iz netom dokazane sličnosti trokutova AED i EBC slijedi razmjer

$$\begin{aligned} &\left|\overline{AE}\right| : \left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{BC}\right| : \left|\overline{BE}\right| \Leftrightarrow \\ &x : 3 = 3 : (7 - x) \Leftrightarrow \\ &x \cdot (7 - x) = 3 \cdot 3 \Leftrightarrow \\ &7 \cdot x - x^2 = 9 \Leftrightarrow \\ &x^2 - 7 \cdot x + 9 = 0. \end{aligned}$$

Tražimo ono rješenje ove kvadratne jednadžbe koje pripada intervalu $\left\langle \frac{7}{2}, 7 \right\rangle$. Ono je jednako:

$$x = \frac{7 + \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 + \sqrt{49 - 36}}{2} = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \approx 5.30276.$$

2.) 8. Neka su A_1, B_1 i C redom ortogonalna projekcija točke A na zadanu ravninu, ortogonalna projekcija točke B na zadanu ravninu i ortogonalna projekcija točke B na pravac AA_1. (Nacrtajte sliku!) Promotrimo trokut ABC. Prema konstrukciji točke C, taj trokut je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C. Duljina hipotenuze toga trokuta je $\left|\overline{AB}\right| = 13$. Duljina katete $\overline{BC}$ jednaka je duljini ortogonalne projekcije dužine $\overline{AB}$ na zadanu ravninu, tj. $\left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{A_1B_1}\right| = 5$. Duljina katete $\overline{AC}$ jednaka je zbroju udaljenosti točke A od ravnine i udaljenosti točke B od ravnine, tj.

$$\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AA_1}\right| + \left|\overline{A_1C}\right| = \left|\overline{AA_1}\right| + \left|\overline{BB_1}\right| = 4 + \left|\overline{BB_1}\right|.$$

Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$\left|\overline{AB}\right|^2 = \left|\overline{AC}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2 \Leftrightarrow 13^2 = \left(4 + \left|\overline{BB_1}\right|\right)^2 + 5^2 \Leftrightarrow \left(4 + \left|\overline{BB_1}\right|\right)^2 = 13^2 - 5^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(4 + \left|\overline{BB_1}\right|\right)^2 = 169 - 25 \Leftrightarrow \left(4 + \left|\overline{BB_1}\right|\right)^2 = 144 \Rightarrow 4 + \left|\overline{BB_1}\right| = \sqrt{144} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 + \left|\overline{BB_1}\right| = 12 \Leftrightarrow \left|\overline{BB_1}\right| = 12 - 4 \Leftrightarrow \left|\overline{BB_1}\right| = 8.$$

Dakle, tražena je udaljenost jednaka 8 jed. duljine.

3.) $\sqrt{13}$. Tražena duljina jednaka je polovici duljine vektora $\vec{a}$, pa odmah imamo:

$$\left|\frac{1}{2}\cdot\vec{a}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4^2+(-6)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{16+36} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{52} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 52} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 52} = \sqrt{13}.$$

26.1.) **19.** Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti jednakost $f(x) = f(12) + 2$. Uvrštavanjem pravila za f i izračunavanjem vrijednosti $f(12)$ dobivamo:

$$\frac{2}{7}\cdot x - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}\cdot 12 - \frac{3}{7} + 2, \quad /\cdot 7$$
$$2\cdot x - 3 = 2\cdot 12 - 3 + 14,$$
$$2\cdot x = 24 - 3 + 14 + 3,$$
$$2\cdot x = 38, \quad /:2$$
$$x = 19.$$

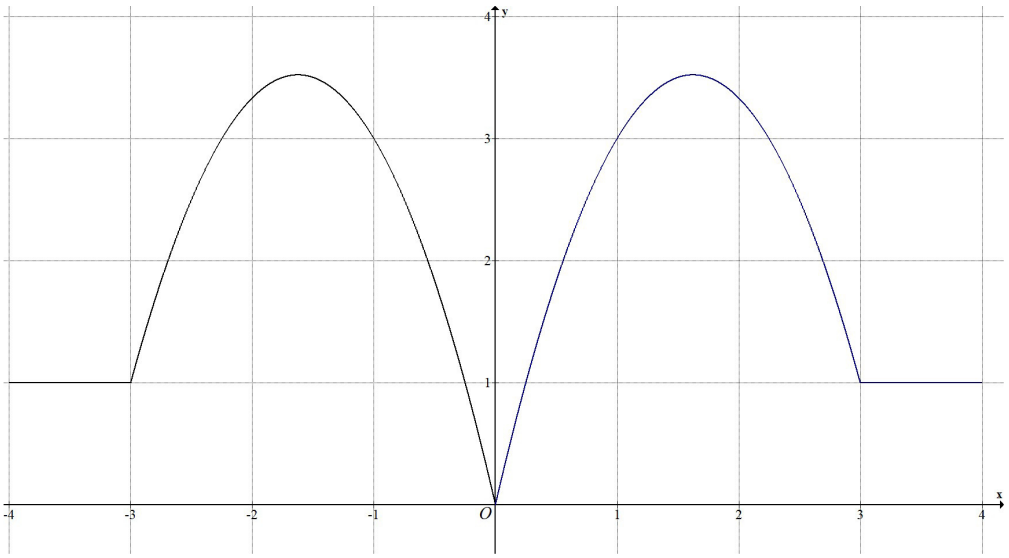
2.) $D(f) = \langle 13, +\infty\rangle$**.** Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $x^2 + 5 > 0$. To znači da je nazivnik razlomka u pravilu funkcije f uvijek strogo pozitivan, pa posebno i različit od nule. Dakle, jedini uvjet na vrijednost varijable x dobije se iz zahtjeva da izraz pod logaritmom mora biti strogo pozitivan:

$$x - 13 > 0 \Leftrightarrow x > 13.$$

Skup svih realnih brojeva koji su strogo veći od 13 je interval $\langle 13, +\infty\rangle$, pa je taj skup prirodna domena zadane funkcije.

3.) Vidjeti sliku 1. Iz definicije parne funkcije slijedi da graf funkcije f na segmentu $[-4, 4]$ mora biti osno simetričan s obzirom na os ordinata. Budući da se dio grafa funkcije f nalazi u drugom kvadrantu, traženi dio nalazit će se u prvom kvadrantu. Svakoj točki $(x, y) \in \Gamma(f)$ grafa funkcije iz drugoga kvadranta pridružit

ćemo točku $(-x, y)$ u prvom kvadrantu. (Grubo govoreći, „x promijeni predznak, a y ostane nepromijenjen.“) Tako dobivamo sliku 1.



Slika 1.

27.1.) $y = 5 \cdot x - 1$. Tangenta prolazi točkom $T = (1, f(1)) = (1, 1^3 + 2 \cdot 1 + 1) = (1, 1 + 2 + 1) = (1, 4)$ i ima koeficijent smjera jednak:

$$k = f'(1) = \left(\left(x^3 + 2 \cdot x + 1 \right)' \right)_{x=1} = \left(3 \cdot x^{3-1} + 2 \cdot 1 + 0 \right)_{x=1} = \left(3 \cdot x^2 + 2 \right)_{x=1} = 3 \cdot 1^2 + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5.$$

Koristeći izraz za jednadžbu pravca kojemu su zadani koeficijent smjera i jedna točka konačno dobivamo:

$$t \ldots y - 4 = 5 \cdot (x - 1),$$
$$t \ldots y = 5 \cdot x - 5 + 4,$$
$$t \ldots y = 5 \cdot x - 1.$$

2.) $9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 9 \cdot x \right)$. Koristeći pravilo deriviranja složene funkcije imamo redom:

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - 9 \cdot x \right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 9 \cdot x \right)' = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - 9 \cdot x \right) \cdot \left(\left(\frac{\pi}{4} \right)' - 9 \cdot (x)' \right) =$$
$$= -\sin\left(\frac{\pi}{4} - 9 \cdot x \right) \cdot (0 - 9 \cdot 1) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - 9 \cdot x \right) \cdot (-9) = 9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 9 \cdot x \right).$$

3.) $3 \cdot \sin(4 \cdot x)$**.** Koristeći formule za sinus i kosinus dvostrukoga kuta dobivamo:

$$f(x) = 12 \cdot \cos(2 \cdot x) \cdot \sin x \cdot \cos x = 6 \cdot \cos(2 \cdot x) \cdot (2 \cdot \sin x \cdot \cos x) = 6 \cdot \cos(2 \cdot x) \cdot \sin(2 \cdot x) =$$
$$= 3 \cdot (2 \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot \cos(2 \cdot x)) = 3 \cdot \sin(4 \cdot x).$$

28.–5 i 7. Primijetimo da je $x^2+2\cdot x+1=(x+1)^2$. To znači da racionalna funkcija na lijevoj strani jednadžbe nije definirana za $x=-1$ jer iz $(x+1)^2=0$ slijedi $x+1=0$, odnosno $x=-1$. Zbog toga ni izraz $x+1$ u brojniku racionalne funkcije ne može biti jednak nuli. Prema tome, navedena racionalna funkcija će poprimiti vrijednost 0 ako i samo ako je $x+5=0$ ili $(x-7)^2=0$. Iz prve jednakosti odmah slijedi $x=-5$, a druga je ekvivalentna jednakosti $x-7=0$ iz koje je $x=7$. Dakle, skup svih rješenja zadane jednadžbe je $S=\{-5,7\}$.

29.1.) 3450. Prema definiciji binomnoga koeficijenta vrijede identiteti:

$$\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2!}=\frac{n^2-n}{2},$$
$$\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)\cdot((n+1)-1)}{2!}=\frac{(n+1)\cdot(n+1-1)}{2}=\frac{(n+1)\cdot n}{2}=\frac{n^2+n}{2}.$$

Navedeni brojevi će biti prva tri člana aritmetičkoga niza ako je drugi član niza aritmetička sredina prvoga i trećega člana niza. Taj uvjet daje:

$$\frac{n^2-3\cdot n+36}{2}=\frac{\frac{n^2-n}{2}+\frac{n^2+n}{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{n^2-3\cdot n+36}{2}=\frac{\frac{n^2-n+n^2+n}{2}}{2}\Leftrightarrow$$
$$\frac{n^2-3\cdot n+36}{2}=\frac{\frac{2\cdot n^2}{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{n^2-3\cdot n+36}{2}=\frac{n^2}{2}\Leftrightarrow$$
$$n^2-3\cdot n+36=n^2\Leftrightarrow-3\cdot n+36=0\Leftrightarrow(-3)\cdot n=-36\Leftrightarrow n=12.$$

Dakle, prvi član niza je $\frac{12^2-12}{2}=\frac{144-12}{2}=\frac{132}{2}=66,$ a drugi član niza je $\frac{12^2-3\cdot12+36}{2}=\frac{144-36+36}{2}=\frac{144}{2}=72.$ Odatle slijedi da je razlika toga niza jednaka $72-66=6,$ pa je, prema formuli za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza, traženi zbroj prvih 25 njegovih članova jednak:

$$S=\frac{25}{2}\cdot(66+66+(25-1)\cdot6)=\frac{25}{2}\cdot(132+24\cdot6)=\frac{25}{2}\cdot(132+144)=\frac{25}{2}\cdot276=3450.$$

2.) 32 kn i 68 kn. Neka je C cijena proizvoda prije sniženja. Tada je cijena proizvoda snižena za $\frac{C}{100}\cdot C=\frac{C^2}{100}$ kn i iznosi 21.76 kn. Tako dobivamo jednadžbu:

$$C-\frac{C^2}{100}=21.76.$$

Riješimo tu kvadratnu jednadžbu na uobičajen način dodatno pretpostavljajući da je $C>0$. Imamo redom:

$$C-\frac{C^2}{100}=21.76 \Leftrightarrow C^2-100\cdot C+2176=0 \Leftrightarrow$$
$$C_{1,2}=\frac{100\pm\sqrt{100^2-4\cdot 1\cdot 2176}}{2\cdot 1}=\frac{100\pm\sqrt{10000-8704}}{2}=\frac{100\pm\sqrt{1296}}{2}=\frac{100\pm 36}{2}\Rightarrow$$
$$C_1=\frac{100+36}{2}=\frac{136}{2}=68,$$
$$C_2=\frac{100-36}{2}=\frac{64}{2}=32.$$

Dakle, moguće cijene proizvoda prije sniženja su 32 kn i 68 kn.

3.) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\approx 64.34109^\circ = 64^\circ 20' 28''$. Iz podatka da su bočne strane pravilne šesterostrane prizme kvadrati površine 36 cm^2 zaključujemo da je duljina osnovnoga brida te prizme, a time i duljina osnovnoga brida pravilne šesterostrane piramide jednaka $\sqrt{36}=6$ cm. Nadalje, iz podatka da su površine pobočja prizme i piramide međusobno jednake zaključujemo da svaki trokut koji tvori pobočje piramide ima površinu 36 cm^2. Duljina njegove osnovice je 6 cm, pa je duljina visine toga trokuta

$$v_b=\frac{2\cdot P}{a}=\frac{2\cdot 36}{6}=\frac{72}{6}=12 \text{ cm}.$$

Kosinus traženoga kuta jednak je omjeru duljine visine jednoga šest od karakterističnih trokutova osnovke piramide i duljine visine jedne pobočke. Označimo li traženu mjeru kuta s α, imamo:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}}{v_b}=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2\cdot v_b}\Rightarrow$$
$$\alpha=\arccos\left(\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2\cdot v_b}\right)=\arccos\left(\frac{6\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 12}\right)=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\approx 64.34109^\circ=64^\circ 20' 28''.$$

4.) Jednadžba nema rješenja. Zadanu jednadžbu najprije zapišimo u obliku:

$$a^{1+2\cdot\log x+4\cdot\log^2 x+8\cdot\log^3 x+\ldots}=a^{-7}.$$

Eksponent na lijevoj strani je beskonačan geometrijski red kojemu je prvi član jednak 1, a količnik $2\cdot\log x$. On će konvergirati ako i samo ako je $|2\cdot\log x|<1$, odnosno ako i samo ako je $2\cdot|\log x|<1$, tj. ako i samo ako je $|\log x|<\frac{1}{2}$. Uz taj uvjet njegov zbroj je jednak $\frac{1}{1-2\cdot\log x}$. Taj zbroj očito mora biti jednak –7, pa dalje imamo:

$$\frac{1}{1-2\cdot\log x}=-7\Leftrightarrow 1-2\cdot\log x=-\frac{1}{7}\Leftrightarrow(-2)\cdot\log x=-\frac{1}{7}-1\Leftrightarrow(-2)\cdot\log x=-\frac{8}{7}\Leftrightarrow\log x=\frac{4}{7}.$$

Dakle, mora biti $\log x=\frac{4}{7}$, što povlači $|\log x|=\frac{4}{7}>\frac{1}{2}$. To znači da nije zadovoljen uvjet $|\log x|<\frac{1}{2}$, pa zadana jednadžba nema rješenja.

5.) $a\in\langle 2,8\rangle$**.** Neka je $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ neka od kvadratnih funkcija sa svim zadanim svojstvima. Iz podatka da njezin graf prolazi točkom A zaključujemo da je $f(-1)=18$, što daje:

$$18=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c\Leftrightarrow a-b+c=18.$$

Analogno, iz podatka da graf funkcije f prolazi točkom B zaključujemo da je $f(1)=2$, što daje:

$$2=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c\Leftrightarrow a+b+c=2.$$

Ako kvadratna funkcija poprima samo pozitivne vrijednosti, onda je njezin vodeći koeficijent strogo pozitivan, a diskriminanta strogo negativna. To daje:

$$a>0,$$
$$b^2-4\cdot a\cdot c<0.$$

Tako smo dobili sljedeće uvjete:

$$\begin{cases} a-b+c=18, \\ a+b+c=2, \\ a>0, \\ b^2-4\cdot a\cdot c<0. \end{cases}$$

Zbrajanjem prve dvije jednakosti dobivamo $2\cdot a+2\cdot c=20,$ otkuda dijeljenjem sa 2 slijedi $a+c=10,$ odnosno $c=10-a.$ Oduzimanjem prve jednakosti od druge slijedi $2\cdot b=2-18\Leftrightarrow 2\cdot b=-16\Leftrightarrow b=-8.$ Uvrstimo $c=10-a$ i $b=-8$ u četvrtu nejednakost, pa dobijemo:

$$(-8)^2-4\cdot a\cdot(10-a)<0\Leftrightarrow 64-40\cdot a+4\cdot a^2<0\Leftrightarrow a^2-10\cdot a+16<0.$$

Ovu nejednadžbu riješimo na uobičajen način. Najprije riješimo pripadnu kvadratnu jednadžbu:

$$a^2-10\cdot a+16=0\Leftrightarrow a_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 1\cdot 16}}{2\cdot 1}=\frac{10\pm\sqrt{100-64}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{10\pm 6}{2}\Rightarrow$$
$$a_1=\frac{10+6}{2}=\frac{16}{2}=8,\ a_2=\frac{10-6}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

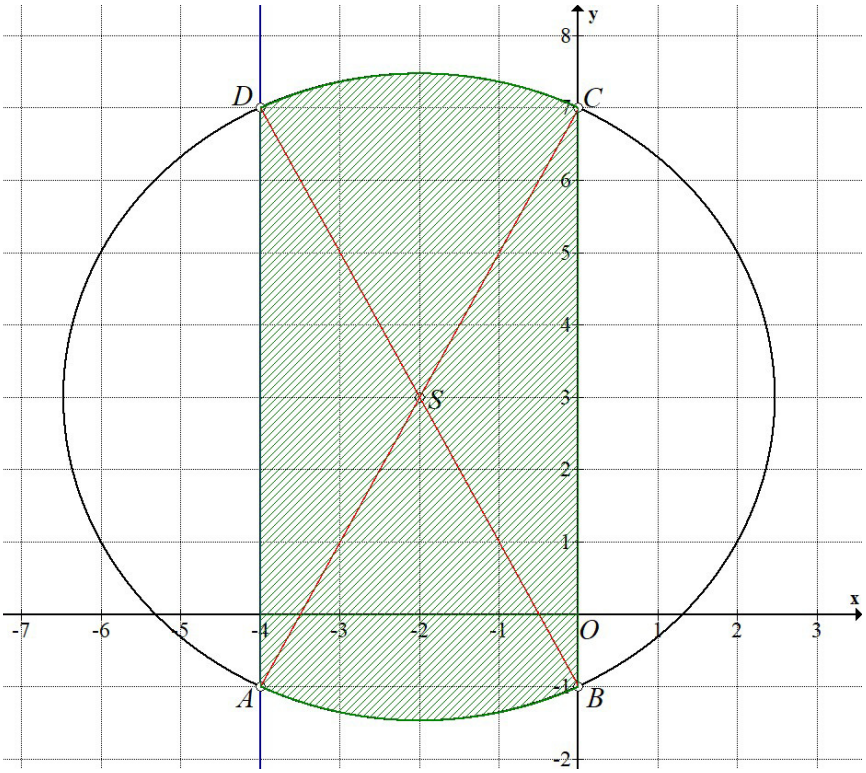
Budući da je koeficijent uz a^2 jednak 1, odnosno strogo pozitivan, izraz će biti strogo negativan na otvorenom intervalu određenom izračunanim rješenjima kvadratne jednadžbe, tj. za $a\in\langle 2,8\rangle$. Primijetimo da je za $a\in\langle 2,8\rangle$ trivijalno zadovoljen treći uvjet $a>0$, pa je taj interval ujedno i rješenje zadatka.

30. $P=16+20\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\approx 34.5459$ kv. jed. Nacrtajmo zadane pravce i kružnicu u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Središte kružnice je $S=(-2,3)$, a polumjer $r=\sqrt{20}$. Dobivamo sliku 2. Krivocrtni lik *ABCD* čiju površinu želimo izračunati šrafiran je zelenom bojom.

Odredimo najprije koordinate točaka *A*, *B*, *C* i *D*. U tu svrhu riješimo sustave dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x=-4, \\ (x+2)^2+(y-3)^2=20 \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x=0, \\ (x+2)^2+(y-3)^2=20. \end{cases}$$

U svakom od tih sustava prvu jednadžbu uvrstimo u drugu. Tako dobivamo:



Slika 2.

$$(-4+2)^2+(y-3)^2=20, \qquad (0+2)^2+(y-3)^2=20,$$
$$(-2)^2+(y-3)^2=20, \qquad 2^2+(y-3)^2=20,$$
$$4+(y-3)^2=20, \qquad 4+(y-3)^2=20,$$

što znači da je lik $ABCD$ osnosimetričan s obzirom na pravac $x=-2$. Zbog toga je kružni isječak SCD sukladan kružnom isječku SAB, a trokut SBC sukladan trokutu SAD. Prema tome, tražena površina bit će dvostruko veća od zbroja površine trokuta SBC i površine kružnoga isječka SCD.

Iz jednadžbe $4+(y-3)^2=20$ slijedi $(y-3)^2=20-4 \Leftrightarrow (y-3)^2=16 \Leftrightarrow y-3=-4$ ili $y-3=4 \Leftrightarrow y=-4+3=-1$ ili $y=4+3=7$. Dakle, koordinate točka A, B, C i D su redom $A=(-4,-1)$, $B=(0,-1)$, $C=(0,7)$ i $D=(-4,7)$.

Najprije izračunamo površinu trokuta SBC. Nju je lako izračunati jer znamo duljinu jedne osnovice toga trokuta i duljinu visine na tu osnovicu. Preciznije, znamo:

$$a:=\left|\overline{BC}\right|=1+7=8,$$
$$v_a=d(S,\overline{BC})=2,$$

pa je:

$$P_{\Delta SBC}=\frac{8\cdot 2}{2}=8 \text{ kv. jed.}$$

Izračunajmo površinu kružnoga isječka *SCD*. Znamo polumjer toga isječka. On je jednak polumjeru kružnice, tj. $r=\sqrt{20}$. Odredimo još mjeru središnjega kuta isječka. Označimo tu mjeru s α. Ona je ujedno i mjera šiljastoga kuta između pravaca *AC* i *BD*, pa najprije moramo odrediti koeficijente smjera tih pravaca. Tako imamo redom:

$$k_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{7-(-1)}{0-(-4)}=\frac{7+1}{0+4}=\frac{8}{4}=2,$$

$$k_{BD}=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{7-(-1)}{-4-0}=\frac{7+1}{-4}=\frac{8}{-4}=-2,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_{BD}-k_{AC}}{1+k_{BD}\cdot k_{AC}}=\frac{-2-2}{1+(-2)\cdot 2}=\frac{-4}{1+(-4)}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}\Rightarrow$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\text{ rad.}$$

Zbog toga je površina kružnoga isječka *SCD* jednaka:

$$P_{SCD}=\frac{r^2\cdot\alpha}{2}=\frac{20\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)}{2}=10\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\text{ kv. jed.}$$

Dakle, tražena površina je jednaka:

$$P=2\cdot(P_{\Delta SBC}+P_{SCD})=2\cdot\left(8+10\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)=16+20\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\approx 34.5459\text{ kv. jed.}$$

Napomena: Mjeru kuta α iskazali smo u radijanima jer ta mjera omogućuje korektnu primjenu funkcije arkus tangens (čija je slika interval $\left\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ u kojemu su „mjerne jedinice“ radijani). Međutim, izrazimo li α u stupnjevima, onda su:

$$P_{SCD}=\frac{r^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360}\approx\frac{20\cdot\pi\cdot 53.1301}{360}=\frac{\pi\cdot 53.1301}{18},$$

$$P=2\cdot(P_{\Delta SBC}+P_{SCD})=2\cdot\left(8+\frac{\pi\cdot 53.1301}{18}\right)=16+\frac{\pi}{9}\cdot 53.1301\approx 34.5459\text{ kv. jed.}$$

Pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač