TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB	**Matematika na državnoj maturi**	**rješenja zadataka iz lipnja 2021. (viša razina)**

1. **B**. Traženu vrijednost dobit ćemo dijeljenjem zbroja svih triju zadanih brojeva s 3:

$$s=\frac{13+22+37}{3}=\frac{72}{3}=24.$$

2. **D.** Koristeći kalkulator izračunamo vrijednost svakoga broja:

$$\log_2 9=\frac{\log 9}{\log 2}\approx\frac{0.95424251}{0.30103}\approx 3.169925,$$

$$\sin\left(47^\circ 15'\right)=\sin\left(47^\circ+\left(\frac{15}{60}\right)^\circ\right)=\sin\left(47^\circ+0.25^\circ\right)=\sin\left(47.25^\circ\right)\approx 0.73432251,$$

$$\left|\frac{5}{3}:\frac{1}{2}-5\right|=\left|\frac{5}{3}\cdot 2-5\right|=\left|\frac{10}{3}-5\right|=\left|\frac{10-15}{3}\right|=\left|\frac{-5}{3}\right|=\frac{5}{3}\approx 1.666666667,$$

$$2\cdot 10^{0.34}\approx 2\cdot 2.187761624=4.375523248.$$

Dakle, netočna je tvrdnja **D**.

3. **C**. Imamo redom:

$$7\cdot M+M=31-K\Leftrightarrow 8\cdot M=31-K\Leftrightarrow M=\frac{31-K}{8}.$$

4. **B**. Prisjetimo se da vrijede jednakosti 1 kg = 10^3 g i 1 m^3 = $\left(10^2\right)^3=10^{2\cdot 3}=10^6$ cm^3. Iz njih odmah slijedi:

$$84\text{ kg m}^{-3}=84\cdot\frac{10^3\text{ g}}{10^6\text{ cm}^3}=84\cdot 10^{3-6}=84\cdot 10^{-3}=0.084\text{ g cm}^{-3}.$$

5. **B**. Primijetimo da je zadani kut paralelograma šiljasti kut. To znači da je kraća dijagonala paralelograma ujedno treća stranica trokuta kojemu su dvije stranice ujedno i susjedne stranice paralelograma, a kut nasuprot toj (trećoj) stranici jednak šiljastom kutu paralelograma. Primjenom kosinusova poučka odmah dobivamo:

$$d=\sqrt{42.3^2+58.1^2-2\cdot 42.3\cdot 58.1\cdot\cos\left(74^\circ 35'\right)}=$$

$$=\sqrt{1789.29+3375.61-4915.26\cdot\cos\left(74^\circ+\left(\frac{35}{60}\right)^\circ\right)}\approx$$

$$\approx\sqrt{3858.2442381}\approx 62.1147666671\approx 62.1\text{ cm}.$$

6. **C**. Prema definiciji, tangencijalni trapez je trapez kojemu su sve četiri stranice tangente iste kružnice. Ta kružnica je ujedno i kružnica upisana trapezu.

7. **D**. Koristeći Viète ove formule zaključujemo da je zbroj rješenja zadane kvadratne jednadžbe suprotan koeficijentu uz nepoznanicu x u samoj jednadžbi. Taj je koeficijent jednak -13, pa je traženi zbroj jednak $-(-13)=13$.

8. **B**. Imamo redom:

$$\left(2-\frac{a+4}{3}\right):\frac{4-2\cdot a}{27\cdot a}=\left(\frac{6-(a+4)}{3}\right)\cdot\frac{27\cdot a}{4-2\cdot a}=\left(\frac{6-a-4}{3}\right)\cdot\frac{27\cdot a}{2\cdot(2-a)}=$$
$$=\left(\frac{2-a}{3}\right)\cdot\frac{27\cdot a}{2\cdot(2-a)}=\frac{9\cdot a}{2}=\frac{9}{2}\cdot a.$$

9. **B**. Osnovno svojstvo aritmetičkoga niza jest da je svaki njegov član, osim prvoga, aritmetička sredina njemu neposredno prethodnoga i neposredno sljedećega člana. To znači da drugi član niza mora biti aritmetička sredina prvoga i trećega člana niza, pa računamo:

$$\frac{5+8}{2}=\frac{13}{2}\neq 6,$$
$$\frac{5+11}{2}=\frac{16}{2}=8,$$
$$\frac{5+4}{2}=\frac{9}{2}\neq 9,$$
$$\frac{5+20}{2}=\frac{25}{2}\neq 10.$$

Dakle, niz 5, 8, 11, … je aritmetički niz.

10. **B**. Iz jednadžbe elipse očitamo $a^2=64,\ b^2=48,$ pa je tražena udaljenost jednaka:

$$d=2\cdot e=2\cdot\sqrt{a^2-b^2}=2\cdot\sqrt{64-48}=2\cdot\sqrt{16}=2\cdot 4=8.$$

11. **D**. Ljubičasta krivulja je graf funkcije $f_1(x)=|x|$ translatiran ulijevo za jednu jedinicu duljine. Zbog toga je ljubičasta krivulja graf funkcije $f(x)=|x+1|$. Crna krivulja je pravac koji prolazi točkama (2, 0) i (0, 2), pa je njegova jednadžba:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1\Leftrightarrow x+y=2\Leftrightarrow y=-x+2.$$

Dakle, rješenje zadatka je par funkcija naveden pod **D**.

12. **D**. Koristeći pravilo za deriviranje složene funkcije dobivamo:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2\left(5\cdot x+\frac{\pi}{3}\right)}\cdot\left(5\cdot x+\frac{\pi}{3}\right)'=\frac{1}{\cos^2\left(5\cdot x+\frac{\pi}{3}\right)}\cdot(5\cdot 1+0)=\frac{5}{\cos^2\left(5\cdot x+\frac{\pi}{3}\right)},$$

$$f'(0)=\frac{5}{\cos^2\left(5\cdot 0+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{5}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{5}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5}{\frac{1}{4}}=5\cdot 4=20.$$

13. A. Primijetimo da su sve četiri ponuđene funkcije polinomi oblika $p(x)=x^2+b\cdot x+c$, gdje su $b,c\in\mathbb{R}$. Njihovi su grafovi parabole simetrične s obzirom na pravac $x=\frac{-b}{2}$. Prema Vièteovim formulama, zbroj nultočaka ovih polinoma jednak je $-b$, pa zapravo tražimo polinom kojemu je aritmetička sredina njegovih nultočaka jednaka 4. Lako vidimo da su nultočke funkcije ponuđene pod **A.** jednake 2 i 6, pa je njihova aritmetička sredina $\frac{2+6}{2}=\frac{8}{2}=4$. Zbog toga je ta funkcija točno rješenje zadatka.

Nultočke funkcije ponuđene pod **B**. su -6 i -2 čija je aritmetička sredina jednaka $\frac{-6+(-2)}{2}=\frac{-6-2}{2}=\frac{-8}{2}=-4.$

Nultočke funkcije ponuđene pod **C**. su -2 i 4 čija je aritmetička sredina jednaka $\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1.$

Nultočke funkcije ponuđene pod **D**. su -4 i 2 čija je aritmetička sredina jednaka $\frac{(-4)+2}{2}=\frac{-2}{2}=-1.$

14. C. Neka je d tražena udaljenost. Tada je $\frac{5}{6}\cdot d$ udaljenost drugoga broja od luke. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$d^2+\left(\frac{5}{6}\cdot d^2\right)=40^2,$$

$$d^2+\frac{25}{36}\cdot d^2=1600,$$

$$\left(1+\frac{25}{36}\right)\cdot d^2=1600,$$

$$\frac{36+25}{36}\cdot d^2=1600,$$

$$\frac{61}{36}\cdot d^2 = 1600, \quad /\cdot\frac{36}{61}$$
$$d^2 = \frac{1600\cdot 36}{61},$$
$$d = \sqrt{\frac{1600\cdot 36}{61}} = \frac{\sqrt{1600\cdot 36}}{\sqrt{61}} = \frac{\sqrt{1600}\cdot\sqrt{36}}{\sqrt{61}} = \frac{40\cdot 6}{\sqrt{61}} = \frac{240}{\sqrt{61}} \approx 30.7288512 \approx 30.7 \text{ milja.}$$

15.A. Uz uvjet $4\cdot x - 28 > 0$, odnosno $4\cdot x > 28$, odnosno $x > 7$, antilogaritmiranjem (po bazi 10) dobivamo:

$$4\cdot x - 28 < 10^2 \Leftrightarrow 4\cdot x - 28 < 100 \Leftrightarrow 4\cdot x < 100 + 28 \Leftrightarrow 4\cdot x < 128 \Leftrightarrow x < 32.$$

Dakle, skup rješenja zadane nejednadžbe je skup svih realnih brojeva strogo većih od 7 i strogo manjih od 32. Oni tvore interval $\langle 7, 32\rangle$. Lako se vidi da je taj interval rješenje nejednadžbe ponuđene pod **A**.

Rješenje nejednadžbe ponuđene pod **B**. su svi realni brojevi strogo manji od $\frac{30}{4} = 7.5$. Oni tvore interval $\langle -\infty, 7.5\rangle$.

Rješenje nejednadžbe ponuđene pod **C**. su svi realni brojevi strogo manji od $\frac{128}{4} = 32$. Oni tvore interval $\langle -\infty, 32\rangle$.

Rješenje nejednadžbe ponuđene pod **D**. su svi realni brojevi strogo veći od 0 i strogo manji od 16. Oni tvore interval $\langle 0, 16\rangle$.

16.1.) $\frac{-7}{5} = -1.4$. Imamo redom:

$$16\cdot x^2 + 2\cdot 4\cdot x\cdot 1 + 1 = 16\cdot x^2 + 6\cdot x - 8\cdot x - 3 - 10,$$
$$8\cdot x - 6\cdot x + 8\cdot x = -3 - 10 - 1,$$
$$10\cdot x = -14,$$
$$x = \frac{-14}{10} = \frac{-7}{5} = -1.4.$$

2.). $-6\cdot i$, $6\cdot i$ **ili obratno.** Zamijenimo $t := x^2$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + 35\cdot t - 36 = 0.$$

Prema zahtjevu zadatka, x nije realan broj, što znači da je $t = x^2 < 0$. Dakle, tražimo (samo) strogo negativna rješenja gornje jednadžbe.

Primjenom formule za rješenje kvadratne jednadžbe dobivamo da su rješenja gornje jednadžbe $t_1 = -36,\ t_2 = 1.$ Potonje rješenje odbacujemo jer nije strogo negativan realan broj. Tako iz $x^2 = -36$ slijedi $x_1 = -6 \cdot i,\ x_2 = 6 \cdot i.$

17.1.) 2000. Traženi je broj jednak $B(0),$ tj.

$$B(0) = \frac{2000 \cdot (1 + 3 \cdot 0)}{1 + 0.05 \cdot 0} = \frac{2000 \cdot (1 + 0)}{1 + 0} = 2000.$$

2.) **20 godina**. Treba riješiti jednadžbu $B(t) = 61000$ po nepoznanici t. Imamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{2000 \cdot (1 + 3 \cdot t)}{1 + 0.05 \cdot t} = 61000, \quad / \cdot \frac{1 + 0.05 \cdot t}{1000} \\
&2 \cdot (1 + 3 \cdot t) = 61 \cdot (1 + 0.05 \cdot t), \\
&2 + 6 \cdot t = 61 + 3.05 \cdot t, \\
&6 \cdot t - 3.05 \cdot t = 61 - 2, \\
&2.95 \cdot t = 59, \\
&t = \frac{59}{2.95} = 20 \text{ godina.}
\end{aligned}$$

18.1.) $-2; 3$ **ili obratno.** Iz zadane jednadžbe redom slijedi:

$$\begin{aligned}
&\frac{|2 \cdot x - 1|}{|5|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot x - 1|}{5} = 1 \Leftrightarrow |2 \cdot x - 1| = 5 \Leftrightarrow \\
&(2 \cdot x - 1 = -5) \vee (2 \cdot x - 1 = 5) \Leftrightarrow (2 \cdot x = -5 + 1) \vee (2 \cdot x = 5 + 1) \Leftrightarrow \\
&(2 \cdot x = -4) \vee (2 \cdot x = 6) \Leftrightarrow (x = -2) \vee (x = 3).
\end{aligned}$$

Dakle, tražena rješenja su -2 i 3.

2.) $\frac{19}{5} = 3.8.$ Neka je $A = (x_A > 0, 0).$ Tada redom imamo:

$$\begin{aligned}
&14.5 = d(A, B) = \sqrt{\left(x_A - (-6.2)\right)^2 + (0 - 10.5)^2} \Leftrightarrow \\
&14.5^2 = \left(x_A + 6.2\right)^2 + (-10.5)^2, \\
&210.25 = x_A^2 + 2 \cdot x_A \cdot 6.2 + 6.2^2 + 110.25, \\
&x_A^2 + 12.4 \cdot x_A + 38.44 + 110.25 - 210.25, \\
&x_A^2 + 12.4 \cdot x_A - 61.56 = 0, \\
&x_A = \frac{-12.4 + \sqrt{(-12.4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-61.56)}}{2 \cdot 1} = \frac{-12.4 + \sqrt{153.76 + 246.24}}{2} = \frac{-12.4 + \sqrt{400}}{2} = \\
&\quad = \frac{-12.4 + 20}{2} = \frac{7.6}{2} = \frac{76}{20} = \frac{19}{5} = 3.8.
\end{aligned}$$

19.1.) $\approx 39.7338974^\circ \approx 39^\circ 44' 2''$. Primijetimo najprije da je kut čiju mjeru tražimo šiljast. Primjenom sinusova poučka dobivamo:

$$\frac{9}{\sin\alpha} = \frac{13}{\sin\left(67^\circ 25'\right)} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{9}{13}\cdot\sin\left(67^\circ 25'\right) = \frac{9}{13}\cdot\sin\left(67^\circ + \left(\frac{25}{60}\right)^\circ\right) \Leftrightarrow$$

$$\sin\alpha \approx 0.6392228988671 \Rightarrow \alpha \approx \arcsin(0.6392228988671) \approx 39.7338974^\circ \approx 39^\circ 44' 2''.$$

2.) $\frac{2}{5} = 0.4$ **jed. duljine.** Zapišimo najprije jednadžbu zadanoga pravca u implicitnu obliku:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\cdot x + 3\cdot y = 12 \Leftrightarrow 4\cdot x + 3\cdot y - 12 = 0.$$

Tako dobivamo:

$$d = \frac{|4\cdot 7 + 3\cdot(-6) - 12|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|28-18-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-2|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} = 0.4 \text{ jed. duljine.}$$

20.1.) $\frac{117}{5} = 23.4$ Opseg zadanoga trokuta jednak je $3.7 + 8.2 + 9 = 20.9$ cm. Omjer opsega sličnih trokutova jednak je njihovu koeficijentu sličnosti, pa je:

$$k = \frac{54.34}{20.9} = \frac{5434}{2090} = \frac{13}{5} = 2.6.$$

Tako slijedi da je tražena duljina jednaka $b' = \frac{13}{5}\cdot 9 = \frac{117}{5} = 23.4$ cm.

2.) 80°. Translatirajmo polupravac b tako da njegov početak bude u vrhu kuta β. Tako zaključujemo da mora vrijediti jednakost $\beta + 60^\circ + 40^\circ = 180^\circ$ iz koje odmah slijedi $\beta = 180^\circ - \left(60^\circ + 40^\circ\right) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

21.1.) $\approx 61^\circ 52' 28''$. Promotrimo pravokutan trokut kojemu je hipotenuza jednaka bočnu bridu piramide, a jedna kateta polovici duljine dijagonale osnovke piramide. Označimo li traženi kut s α, onda je:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot a}{b} = \frac{\sqrt{2}\cdot a}{2\cdot b} = \frac{\sqrt{2}\cdot 4}{2\cdot 6} = \frac{\sqrt{2}\cdot 4}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Odatle slijedi $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \approx 61.8744942979^\circ \approx 61^\circ 52' 28''$.

2.) $144\cdot\pi$. Neka je R polumjer zadane kugle (iskazan u metrima). Iz jednadžbe

$$\frac{4}{3}\cdot R^3\cdot\pi = 288\cdot\pi$$

slijedi $R^3 = \frac{3}{4}\cdot 288 = 216$, pa je $R = \sqrt[3]{216} = 6$. Tako je traženo oplošje kugle jednako:

$$O = 4\cdot R^2\cdot\pi = 4\cdot 6^2\cdot\pi = 4\cdot 36\cdot\pi = 144\cdot\pi \text{ m}^2.$$

22.1.) **2**. Imamo redom:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (3,1)\cdot(1,-1) = 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 3-1 = 2.$$

2.) $\vec{u} = 5\cdot\vec{i} + 12\cdot\vec{j}$. Traženi je vektor kolinearan sa zadanim vektorom. Budući da ima isti smjer i orijentaciju, postoji jedinstven $k>0$ takav da je $\vec{u} = k\cdot\vec{v}$. Odatle slijedi:

$$\left|\vec{u}\right| = \left|k\cdot\vec{v}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{u}\right| = |k|\cdot\left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{u}\right| = k\cdot\left|\vec{v}\right|.$$

Prema pretpostavci zadatka je $\left|\vec{u}\right| = 13$, dok je

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{25^2+60^2} = \sqrt{625+3600} = \sqrt{4225} = 65.$$

Tako iz jednadžbe $13 = k\cdot 65$ slijedi $k = \frac{13}{65} = \frac{1}{5} = 0.2$, pa je traženi vektor:

$$\vec{u} = \frac{1}{5}\cdot\vec{v} = \frac{1}{5}\cdot\left(25\cdot\vec{i} + 60\cdot\vec{j}\right) = 5\cdot\vec{i} + 12\cdot\vec{j}.$$

23.1.) $\sqrt{5}$. Najprije odredimo:

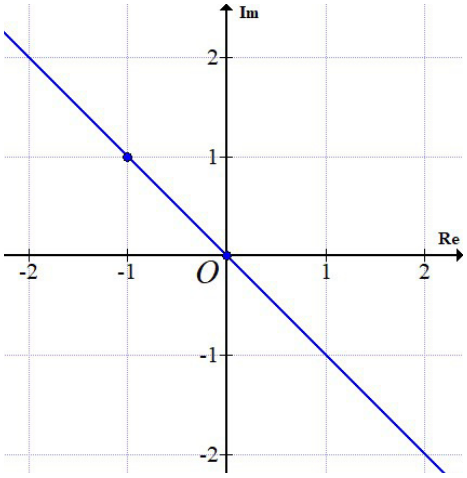
$$i^{2021} = i^{2020}\cdot i^1 = \left(i^4\right)^{505}\cdot i = 1^{505}\cdot i = i.$$

Tako je

$$|z| = \frac{|2-i|}{|i|} = \frac{\sqrt{2^2+(-1)^2}}{1} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

2.) **Vidjeti sliku 1.** Neka su $S = \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z) = 0\}$ i $z = x + y\cdot i \in S$. Budući da su $\mathrm{Re}(z) = x$ i $\mathrm{Im}(z) = y$, uvjet $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z) = 0$ ekvivalentan je uvjetu $x+y=0$. Odavde je $y=-x$, pa je grafički prikaz skupa S u Gaussovoj ravnini pravac p čija je jednadžba $y=-x$. Dvije njegove točke su npr. $(0,0)$ i $(-1,1)$.

Taj je pravac prikazan na donjoj slici.



Slika 1.

24.1.) $[15,+\infty\rangle$. Izraz pod drugim korijenom mora biti nenegativan, pa dobivamo:

$$\frac{1}{3}\cdot x-5\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot x\geq 5 \Leftrightarrow x\geq 15.$$

Dakle, traženi skup tvore svi realni brojevi jednaki ili veći od 15. Riječ je o intervalu $[15,+\infty\rangle$. Tako je $D(f)=[15,+\infty\rangle$.

2.) $\langle 6.5,+\infty\rangle$. Slika *bilo koje* eksponencijalne funkcije $f(x)=a^x$, pri čemu je $a>0$ i $a\neq 1$, je skup svih strogo pozitivnih realnih brojeva, tj. skup $\langle 0,+\infty\rangle$. Posebno je

$$\begin{aligned}&0.93^x>0,\\&0.93^x+6.5>0+6.5=6.5,\\&f(x)>6.5.\end{aligned}$$

Dakle, traženu sliku tvore svi realni brojevi strogo veći od 6.5. Riječ je o intervalu $\langle 6.5,+\infty\rangle$. Tako je $R(f)=\langle 6.5,+\infty\rangle$.

25.1.) Bilo koji pravac čija jednadžba ima oblik $y=\frac{3}{10}\cdot x+l$, za neki $l\in\mathbb{R}$.

Koeficijent smjera zadanoga pravca je $k_1=\frac{-10}{3}$. Koeficijent smjera traženoga pravca je suprotan i recipročan u odnosu na koeficijent smjera zadanoga pravca:

$$k_2=\frac{-1}{k_1}=\frac{-1}{\frac{-10}{3}}=\frac{3}{10}.$$

Dakle, jednadžba tražene familije usporednih pravaca glasi:

$$y=\frac{3}{10}\cdot x+l,\ l\in\mathbb{R}.$$

Neki elementi te familije su npr. pravci $y=\frac{3}{10}\cdot x,\ y=\frac{3}{10}\cdot x-1$ itd.

Napomena: U zadatku nije navedeno u kakvom obliku (eksplicitnom, implicitnom, segmentnom) treba biti zapisana jednadžba traženoga pravca. Zbog toga su i izrazi

$$3\cdot x-10\cdot y+l=0,$$

$$\frac{x}{\frac{l}{3}}+\frac{y}{\frac{-l}{10}}=1$$

također ispravne jednadžbe dobivene familije pravaca. Uvrštavanjem bilo koje „konkretne“ vrijednosti $l\in\mathbb{R}$ u neku od tih jednadžbi dobivaju se točna rješenja postavljenoga zadatka.

2.) $(x-8)^2+(y+8)^2=64.$ Kružnica $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ dodiruje obje koordinatne osi ako i samo ako je $|p|=|q|=r.$ U ovom se zadatku središte kružnice nalazi u četvrtom kvadrantu, pa su $p>0$ i $q<0.$ Budući da je $r=8$, tražimo strogo pozitivno rješenje jednadžbe $|p|=8$ i strogo negativno rješenje jednadžbe $|q|=8.$ Lako se dobiva $(p,q)=(8,-8).$ Zbog toga tražena jednadžba glasi:

$$(x-8)^2+(y-(-8))^2=8^2\Leftrightarrow(x-8)^2+(y+8)^2=64.$$

Napomena: U zadatku nije navedeno u kojemu obliku (kanonski, razvijeni) treba zapisati traženu jednadžbu. Zbog toga je i jednadžba

$$x^2+y^2-16\cdot x+16\cdot y+64=0$$

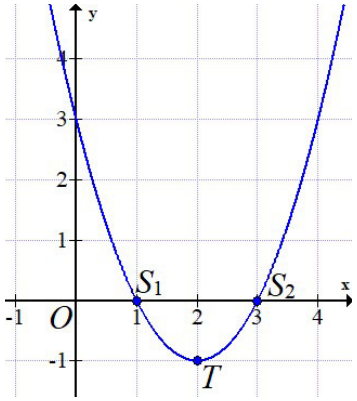
također točno rješenje zadatka.

3.) Vidjeti sliku 2. Zadana funkcija je polinom 2. stupnja. Njezin graf je parabola. Da bismo je jednoznačno odredili, dovoljno je zadati tri njezine različite točke. U tu svrhu odredit ćemo nultočke zadane funkcije i tjeme parabole.

Rješavanjem jednadžbe $x^2-4\cdot x+3=0$ dobivamo $x_1=1,\ x_2=3.$ Dakle, parabola će prolaziti točkama $S_1=(1,0)$ i $S_2=(3,0).$

Tjeme parabole je točka $T=\left(\frac{-(-4)}{2\cdot 1},\frac{4\cdot 1\cdot 3-(-4)^2}{4\cdot 1}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{12-16}{4}\right)=(2,-1).$

U pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtamo sve tri dobivene točke, pa ih spojimo parabolom. Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

26.1.) $2\cdot\pi$. Traženi je temeljni period jednak količniku $2\cdot\pi$ i kružne frekvencije zadane funkcije. Kružna frekvencija (ω) jednaka je koeficijentu uz x u pravilu funkcije. Sada lako nalazimo $\omega=1$, pa je $T=\frac{2\cdot\pi}{\omega}=\frac{2\cdot\pi}{1}=2\cdot\pi.$

2.) $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ rad. Kut pod kojim se neka tetiva kružnice vidi iz točke kružnice koja nije krajnja točka te tetive je obodni kut. U ovom zadatku radi se o obodnom kutu nad promjerom kružnice. Prema Talesovu poučku o obodnom kutu nad promjerom kružnice, mjera toga kuta jednaka je $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ rad.

3.) $f(52), f(0), f(-16)$. Podsjetimo da je *bilo koja* funkcija f strogo padajuća ako za sve $x_1,x_2\in D(f)$ vrijedi implikacija: $(x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)>f(x_2))$. Odatle slijedi da *povećanje* vrijednosti nezavisne varijable strogo padajuće funkcije povlači *smanjenje* vrijednosti te funkcije. Konkretno, ako vrijedi $x_1<x_2<x_3$, onda je $f(x_1)>f(x_2)>$ $>f(x_3)$. Očito je $-16<0<52$, pa je $f(-16)>f(0)>f(52)$, odnosno, ekvivalentno zapisano, $f(52)<f(0)<f(-16)$. Zbog toga je traženi poredak: $f(52), f(0), f(-16)$.

27.1.) a^2. Imamo redom:

$$\sqrt{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a^3\cdot\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt{a}\cdot a^3\cdot\sqrt{a}}=\sqrt{a^3\cdot\left(\sqrt{a}\right)^2}=\sqrt{a^3\cdot a}=\sqrt{a^4}=a^2.$$

2.) $\log_b\left(\frac{9}{17}\right)$. Koristeći osnovna svojstva logaritma imamo redom:

$$2\cdot\log_b 3-\log_b 17=\log_b\left(3^2\right)-\log_b 17=\log_b 9-\log_b 17=\log_b\left(\frac{9}{17}\right).$$

3.) 35. Prije ulaska triju putnika na drugoj stanici u autobusu su bilo $25-3=22$ putnika. Taj je broj putnika jednak dvjema trećinama broja putnika u autobusu između prve i druge stanice (jer je trećina putnika izašla na drugoj stanici). Zbog toga su između prve i druge stanice u autobusu bila $22:\frac{2}{3}=22\cdot\frac{3}{2}=33$ putnika. Prije ulaska 11 putnika na prvoj stanici u autobusu su bila $33-11=22$ putnika. Budući da je prije dolaska na prvu stanicu u autobusu bilo 57 putnika, na prvoj je stanici izašlo ukupno $57-22=35$ putnika.

Alternativno rješenje: Neka je x traženi broj. Autobus napušta prvu stanicu s ukupno $57-x+11=68-x$ putnika. Na drugoj stanici izlazi ukupno $\frac{1}{3}\cdot(68-x)$ putnika, a ulaze tri putnika, pa u autobusu ima ukupno $68-x-\frac{1}{3}\cdot(68-x)+3=$ $=68-x-\frac{68}{3}+\frac{1}{3}\cdot x+3=\frac{145}{3}-\frac{2}{3}\cdot x$ putnika. Taj broj treba biti jednak 25, pa dobivamo jednadžbu $\frac{145}{3}-\frac{2}{3}\cdot x=25$. Ona je ekvivalentna jednadžbi $2\cdot x=70$ čije je rješenje $x=35$.

28. $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi,\ \frac{7}{6}\cdot\pi+2\cdot k\cdot\pi\right\}$.. Iz prve jednadžbe sustava je $y=2\cdot x-\frac{\pi}{3}$. Uvrštavanjem ove jednakosti u drugu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\sin\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}-x\right)=0.5\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0.5\Rightarrow\begin{cases}x-\frac{\pi}{3}=\arcsin(0.5)+2\cdot k\cdot\pi,\\ x-\frac{\pi}{3}=\pi-\arcsin(0.5)+2\cdot k\cdot\pi\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi,\\ x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi,\\ x=\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi\\ x=\frac{7}{6}\cdot\pi+2\cdot k\cdot\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Dobivena rješenja tvore skup $S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi,\ \frac{7}{6}\cdot\pi+2\cdot k\cdot\pi\right\}$.

29.1.) $(-4,54)$ i $(0,2)$. Podsjetimo da je koeficijent smjera tangente povučene na graf derivabilne funkcije f u točki $T=(x_T, f(x_T))$ jednak $f'(x_T)$. Zbog toga se zadatak svodi na rješavanje jednadžbe $f'(x)=-5$. Imamo redom:

$$f'(x)=\left(x^3\right)'+6\cdot\left(x^2\right)'-5\cdot\left(x\right)'+(2)'=3\cdot x^{3-1}+6\cdot 2\cdot x^{2-1}-5\cdot 1+0=3\cdot x^2+12\cdot x-5\Rightarrow$$
$$3\cdot x^2+12\cdot x-5=-5\Leftrightarrow 3\cdot x^2+12\cdot x=0\Leftrightarrow x\cdot(x+4)=0.$$

Odavde „očitamo“: $x_1=-4,\ x_2=0$. Dakle, tražene točke su:

$$T_1=(-4, f(-4))=\left(-4,(-4)^3+6\cdot(-4)^2-5\cdot(-4)+2\right)=(-4,54),$$
$$T_2=(0, f(0))=\left(0,0^3+6\cdot 0^2-5\cdot 0+2\right)=(0,2).$$

2.) **3**. Primijetimo da je $0.04=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}=\frac{1}{5^2}=5^{-2}$. Tako redom imamo:

$$(f\circ g)(x)=5^{-2},$$
$$f(g(x))=5^{-2},$$
$$f(x-8)=5^{-2},$$
$$5^{(x-8)+3}=5^{-2},$$
$$(x-8)+3=-2,$$
$$x-8+3=-2,$$
$$x=-2+8-3=3.$$

3.) **167**. Primijenit ćemo poučak o težištu trokuta prema kojemu težište trokuta dijeli *svaku* od triju težišnica u omjeru 2 : 1 računajući od vrha trokuta iz kojega je povučena težišnica. Neka je t tražena duljina (iskazana u cm). Tada je duljina težišnice iz vrha C trokuta A_1B_1C jednaka $\frac{2}{3}\cdot t$. Duljina težišnice iz vrha C trokuta A_2B_2C jednaka je $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot t\right)=\frac{4}{9}\cdot t$ itd. Zbroj duljina svih težišnica jednak je zbroju konvergentnoga geometrijskoga reda kojemu je prvi član jednak t, a količnik $q=\frac{2}{3}$:

$$Z=t+\frac{2}{3}\cdot t+\frac{4}{9}\cdot t+\ldots=\frac{t}{1-\frac{2}{3}}=\frac{t}{\frac{1}{3}}=3\cdot t.$$

Prema zahtjevu zadatka vrijedi $Z=501$, pa iz jednadžbe $3\cdot t=501$ slijedi $t=167$ cm.

4.) $\frac{90}{7}$ **cm**. Neka su a (tražena) duljina stranice kvadrata i b duljina kraće stranice pravokutnika. Zbroj opsega kvadrata i opsega pravokutnika jednak je duljini žice, pa mora vrijediti jednakost:

$$4\cdot a+2\cdot(b+3\cdot b)=120 \Leftrightarrow 4\cdot a+2\cdot 4\cdot b=120 \Leftrightarrow a+2\cdot b=30.$$

Zbroj površine kvadrata i površine pravokutnika jednak je:

$$P=a^2+b\cdot 3\cdot b=a^2+3\cdot b^2.$$

Vrijednost toga izraza treba biti minimalna moguća, pa dobivamo sljedeći matematički model:

$$\begin{aligned}&\min.\ P=a^2+3\cdot b^2\\&\text{pod uvjetima}\\&a+2\cdot b=30,\\&a,b>0.\end{aligned}$$

Ovaj problem svodimo na problem određivanja globalnoga minimuma funkcije jedne realne varijable. Iz uvjeta $a+2\cdot b=30$ izrazimo varijablu b:

$$2\cdot b=30-a \Leftrightarrow b=\frac{1}{2}\cdot(30-a)=15-\frac{1}{2}\cdot a.$$

Ovu jednakost uvrstimo u funkciju cilja (koju želimo minimizirati):

$$P(a)=a^2+3\cdot\left(15-\frac{1}{2}\cdot a\right)^2=a^2+3\cdot\left(225-15\cdot a+\frac{1}{4}\cdot a^2\right)=a^2+675-45\cdot a+\frac{3}{4}\cdot a^2=$$
$$=\frac{7}{4}\cdot a^2-45\cdot a+675.$$

Ova kvadratna funkcija ima globalni minimum za $a=\frac{-(-45)}{2\cdot\frac{7}{4}}=\frac{45}{\frac{7}{2}}=\frac{90}{7}$. Dakle, tražena je optimalna duljina jednaka $\frac{90}{7}$ cm. (Optimalan zbroj površina iznosi $\frac{4\cdot\frac{7}{4}\cdot 675-(-45)^2}{4\cdot\frac{7}{4}}=\frac{7\cdot 675-2025}{7}=\frac{2700}{7}$ cm^2.)

5.) 4.5. Primijenit ćemo jednostavni račun smjese. Neka je V traženi volumen (iskazan u litrama). Primijetimo da se ukupan volumen vode u *svakoj* posudi na kraju postupka neće promijeniti (jer iz svake posude najprije uzmemo, pa dolijemo isti volumen vode (V)). Slanost vode u prvoj posudi nakon dodavanja V litara vode iz druge posude jednaka je:

$$s_1 = \frac{(6-V)\cdot 3 + V\cdot 2}{6} = \frac{18 - 3\cdot V + 2\cdot V}{6} = \frac{18-V}{6}.$$

Analogno, slanost vode u drugoj posudi nakon dodavanja V litara vode iz prve posude jednaka je:

$$s_2 = \frac{(18-V)\cdot 2 + V\cdot 3}{18} = \frac{36 - 2\cdot V + 3\cdot V}{18} = \frac{36+V}{18}.$$

Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti $s_1 = s_2$, pa izjednačavanjem gornjih dvaju izraza dobivamo:

$$\frac{18-V}{6} = \frac{36+V}{18} \Leftrightarrow 3\cdot(18-V) = 36+V \Leftrightarrow 54 - 3\cdot V = 36+V \Leftrightarrow 4\cdot V = 18 \Leftrightarrow V = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4.5.$$

Dakle, iz obiju posuda treba uzeti po 4.5 litara vode.

30. $S = \{8,9,10,11,12,13,14\}$. Primijetimo najprije da nejednadžba ima smisla ako i samo ako je n nenegativan cijeli broj. Naime, prirodna domena funkcije $f(n) = n!$ je skup $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$. Koristeći osnovnu jednakost među faktorijelima

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$$

dobivamo redom:

$$\frac{\left(7!\cdot(n+1)!\right)^2 - 7!\cdot 8!\cdot n!\cdot(n+1)! - 2\cdot(8!\cdot n!)^2}{\left(7!\cdot(n+1)!\right)^2 - (8!\cdot n!)^2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(7!\cdot(n+1)\cdot n!\right)^2 - 7!\cdot 8!\cdot n!\cdot((n+1)\cdot n!) - 2\cdot(8!\cdot n!)^2}{\left(7!\cdot(n+1)\cdot n!\right)^2 - (8!\cdot n!)^2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(7!)^2\cdot(n+1)^2\cdot(n!)^2 - 7!\cdot(8\cdot 7!)\cdot n!\cdot((n+1)\cdot n!) - 2\cdot((8\cdot 7!)\cdot n!)^2}{\left(7!\cdot(n+1)\cdot n!\right)^2 - ((8\cdot 7!)\cdot n!)^2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(7!)^2\cdot(n+1)^2\cdot(n!)^2 - 8\cdot(n+1)\cdot(7!)^2\cdot(n!)^2 - 2\cdot 8^2\cdot(7!)^2\cdot(n!)^2}{(n+1)^2(7!)^2\cdot(n!)^2 - 8^2\cdot(7!)^2\cdot(n!)^2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(n+1)^2-8\cdot(n+1)-2\cdot 8^2}{(n+1)^2-8^2}<0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{n^2+2\cdot n+1-8\cdot n-8-2\cdot 64}{(n+1-8)\cdot(n+1+8)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{n^2-6\cdot n-135}{(n+1-8)\cdot(n+1+8)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(n+9)\cdot(n-15)}{(n-7)\cdot(n+9)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{n-15}{n-7}<0.$$

(Pretposljednji razlomak smo smjeli skratiti s $n+9$ jer je $n+9>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$.)

Posljednja je nejednakost ekvivalentna nejednakosti $(n-7)\cdot(n-15)<0$. Lako se vidi da je skup svih *realnih* rješenja ove kvadratne nejednadžbe (s nepoznanicom n) interval $\langle 7,15\rangle$. U tom intervalu nalaze se prirodni brojevi 8, 9, 10, 11, 12, 13 i 14. Upravo ti prirodni brojevi su sva rješenja polazne nejednadžbe. Dakle, traženi je skup $S=\{8,9,10,11,12,13,14\}$.

Pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač