| | | |
|---|---|---|
| TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB | Matematika na državnoj maturi | rješenja zadataka iz kolovoza 2021. (viša razina) |

**1.** **C**. Razlika dvaju prirodnih brojeva ne mora biti prirodan broj. Npr., $1,2\in\mathbb{N}$, ali $1-2=-1\notin\mathbb{N}$.

Količnik dvaju cijelih brojeva ne mora biti cijeli broj. Npr., $-1,2\in\mathbb{Z}$, ali $-1:2=\frac{-1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

Umnožak dvaju iracionalnih brojeva ne mora biti iracionalan broj. Označimo li s $\mathbb{I}$ skup iracionalnih brojeva, onda su $\sqrt{2},\ 2\cdot\sqrt{2}\in\mathbb{I}$, ali $\sqrt{2}\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}\right)=4\notin\mathbb{I}$.

Međutim, zbroj dvaju racionalnih brojeva je uvijek racionalan broj. Ako su $\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$, pri čemu su $a,c\in\mathbb{Z},\ b,d\in\mathbb{N}$, onda je $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\in\mathbb{Q}$ jer su zbroj i umnožak cijelih (pa posebno i prirodnih) brojeva ponovno cijeli brojevi (odnosno, prirodni brojevi ako su oba pribrojnika/faktora prirodni brojevi).

**2.** **D.** Očito je $m\neq 0$ jer bi u suprotnom umnožak bio jednak nuli. Zbog toga zadanu jednakost smijemo podijeliti s $m$. Tako imamo redom:

$$r+p=\frac{2}{m},$$
$$p=\frac{2}{m}-r.$$

**3.** **D**. Riješimo zadanu nejednadžbu na uobičajen način. Imamo redom:

$$4\cdot x-8+3-3\cdot x>5\cdot x,$$
$$4\cdot x-3\cdot x-5\cdot x>8-3,$$
$$-4\cdot x>5,\ \ /:(-1)$$
$$4\cdot x<-5.$$

(Dijeljenjem nejednadžbe strogo negativnim realnim brojem „okreće“ se znak nejednakosti.) Dakle, rješenje zadatka je nejednadžba pod **D.**

**4.** **A**. Odredimo cijenu jedne litre jogurta prije, odnosno poslije učinjenih promjena. Dvaput ćemo primijeniti jednostavno pravilo trojno jer su veličine „volumen jogurta“ i „cijena jogurta“ upravno razmjerne. Najprije postavimo shemu:

| | |
|---|---|
| ↑ 0.8 litara | ↑ 8.92 kn |
| 1 litra | $x$ kn |

iz koje dobivamo razmjer:

$$x : 8.92 = 1 : 0.8.$$

Riješimo taj razmjer na uobičajen način:

$$0.8 \cdot x = 1 \cdot 8.92 \Leftrightarrow 0.8 \cdot x = 8.92 \Leftrightarrow x = \frac{8.92}{0.8} = 11.15.$$

Dakle, cijena jedne litre jogurta prije učinjenih promjena bila je 11.15 kn. Na potpuno analogan način odredimo cijenu jedne litre jogurta poslije učinjenih promjena. Ponovno postavimo shemu:

$$\begin{array}{c} \uparrow 0.6 \text{ litara} \\ 1 \text{ litra} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \uparrow 7.20 \text{ kn} \\ y \text{ kn} \end{array}$$

iz koje dobivamo razmjer:

$$y : 7.20 = 1 : 0.6.$$

Riješimo taj razmjer na uobičajen način:

$$0.6 \cdot y = 1 \cdot 7.20 \Leftrightarrow 0.6 \cdot y = 7.20 \Leftrightarrow y = \frac{7.20}{0.6} = 12.$$

Dakle, cijena jedne litre jogurta poslije učinjenih promjena je 12 kn. U odnosu na cijenu prije učinjenih promjena, cijena je povećana za $12 - 11.15 = 0.85$ kn = 85 lp.

5. **C**. Neka je $n$ ukupan broj ispečenih peciva. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su peciva označena brojevima 1, 2, ..., $n$. Za svaki $i = 1, ..., n$ označimo s $m_i$ masu peciva označenoga brojem $i$. Iz zadanih podataka zaključujemo da vrijede jednakosti:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 + ... + m_n}{n} = 70.1, \\ \dfrac{m_1 + ... + m_{\frac{n}{3}}}{\frac{n}{3}} = 69.3. \end{cases}$$

Prva od tih dviju jednakosti predstavlja izračun prosječne mase svih $n$ peciva, a druga izračun prosječne mase trećine peciva. (Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su peciva koja tvore tu trećinu označena brojevima 1, 2, ..., $\frac{n}{3}$.) Tražimo prosječnu masu preostale dvije trećine ispečenih peciva. Ona su označena

brojevima $\frac{n}{3}+1,...,n.$ Ima ih ukupno $\frac{2}{3}\cdot n,$ pa se njihova prosječna masa određuje iz izraza:

$$s_1=\frac{m_{\frac{n}{3}+1}+...+m_n}{\frac{2}{3}\cdot n}.$$

Iz dviju zadanih jednakosti redom slijedi:

$$\begin{cases} m_1+...+m_n=70.1\cdot n, \\ m_1+...+m_{\frac{n}{3}}=69.3\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot n\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1+...+m_n=70.1\cdot n, \\ m_1+...+m_{\frac{n}{3}}=\left(69.3\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1+...+m_n=70.1\cdot n, \\ m_1+...+m_{\frac{n}{3}}=23.1\cdot n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(m_1+...+m_{\frac{n}{3}}\right)+\left(m_{\frac{n}{3}+1}+...+m_n\right)=70.1\cdot n, \\ m_1+...+m_{\frac{n}{3}}=23.1\cdot n. \end{cases}$$

Oduzimanjem druge jednakosti od prve dobivamo:

$$\left(m_1+...+m_{\frac{n}{3}}\right)+\left(m_{\frac{n}{3}+1}+...+m_n\right)-\left(m_1+...+m_{\frac{n}{3}}\right)=70.1\cdot n-23.1\cdot n,$$

$$m_{\frac{n}{3}+1}+...+m_n=47\cdot n.$$

Tako slijedi da je tražena prosječna masa preostale dvije trećine peciva jednaka:

$$s_1=\frac{m_{\frac{n}{3}+1}+...+m_n}{\frac{2}{3}\cdot n}=\frac{47\cdot n}{\frac{2}{3}\cdot n}=\frac{47\cdot 3}{2}=70.5 \text{ g}.$$

**6.** **D**. Peti član geometrijskoga niza dobijemo tako da treći član toga niza pomnožimo s kvadratom količnika niza. Ekvivalentno, vrijedi jednakost: $g_5=g_3\cdot q^2$. Iz postavki zadatka zaključujemo da su $g_5=1296,\ q=\frac{6}{5}$, pa slijedi:

$$g_3=\frac{g_5}{q^2}=\frac{1296}{\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{1296}{\frac{36}{25}}=\frac{1296\cdot 25}{36}=36\cdot 25=900.$$

**7.** **C**. Prisjetimo se da je $27=3^3=\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3=9^{\frac{3}{2}}$. Zbog toga je $27^m=\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^m=\left(9^m\right)^{\frac{3}{2}}$.

Uvrštavanjem te jednakosti u zadanu jednakost dobijemo:

$$\left(9^m\right)^{\frac{3}{2}}=8.$$

Lijevu i desnu stranu ove jednakosti potenciramo na eksponent $\frac{2}{3}$, pa slijedi:

$$\left(\left(9^m\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}}\Leftrightarrow\left(9^m\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}\Leftrightarrow\left(9^m\right)^1=2^{3\cdot\frac{2}{3}}\Leftrightarrow 9^m=2^2\Leftrightarrow 9^m=4.$$

Dakle, tražena je vrijednost jednaka 4.

**8.** **B**. Bez smanjenja općenitost možemo pretpostaviti da su stranice trokuta označene tako da vrijede jednakosti $a=7.2\text{ cm}, b=6.5\text{ cm}, \gamma=31^\circ$. (Stranice $a$ i $b$ zatvaraju kut nasuprot trećoj stranici $c$, a mjera toga kuta se standardno označava s $\gamma$.) Primijenimo kosinusov poučak, pa dobijemo:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}=\sqrt{7.2^2+6.5^2-2\cdot 7.2\cdot 6.5\cdot\cos 31^\circ}\approx\sqrt{51.84+42.25-80.230859}=$$
$$=\sqrt{13.859141}\approx 3.722787\approx 3.72\text{ cm}.$$

**9.** **A**. Primijenit ćemo teorem K-S-K o sukladnosti trokutova (dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dvama kutovima uz tu stranicu). Među ponuđenim trokutovima treba pronaći onaj kojemu kutovi uz stranicu duljine 6.3 cm imaju mjere $40^\circ$ i $65^\circ$.

Trokut ponuđen pod **A**. uz stranicu duljine 6.3 cm ima kutove mjere $40^\circ$ i $180^\circ-\left(40^\circ+75^\circ\right)=180^\circ-115^\circ=65^\circ$. Prema navedenom teoremu, taj trokut je sukladan zadanom trokutu.

Trokut ponuđen pod **B**. uz stranicu duljine 6.3 cm ima kutove mjere $75^\circ$ i $180^\circ-\left(75^\circ+65^\circ\right)=180^\circ-140^\circ=40^\circ$. Prema navedenom teoremu, taj trokut nije sukladan zadanom trokutu.

Trokut ponuđen pod **C**. uz stranicu duljine 6.3 cm ima kutove mjere $40^\circ$ i $75^\circ$. Prema navedenom teoremu, taj trokut nije sukladan zadanom trokutu.

Trokut ponuđen pod **D**. uz stranicu duljine 6.3 cm ima kutove mjere $75^\circ$ i $65^\circ$. Prema navedenom teoremu, taj trokut nije sukladan zadanom trokutu.

**10. B**. Dokazat ćemo sljedeću tvrdnju.

**Tvrdnja 1.** Udaljenost pravaca $p_1 \ldots y = k \cdot x + l_1$ i $p_2 \ldots y = k \cdot x + l_2$, pri čemu su $k, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, jednaka je $d = \dfrac{|l_2 - l_1|}{\sqrt{1+k^2}}$.

**Dokaz:** Ako je $k = 0$, onda su zadani pravci usporedni s osi apscisa, pa je njihova udaljenost jednaka udaljenosti njihovih sjecišta s osi ordinata. Ta sjecišta su $S_1 = (0, l_1)$ i $S_2 = (0, l_2)$, a njihova je udaljenost jednaka $d(S_1, S_2) = |l_2 - l_1|$. Ta udaljenost dobije se i uvrštavanjem $k = 0$ u formulu koju želimo provjeriti. Dakle, u slučaju $k = 0$ tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo sada da je $k \neq 0$. Tražena udaljenost jednaka je udaljenosti *bilo koje* točke pravca $p_1$ od njezine ortogonalne projekcije na pravac $p_2$. Naime, zadani pravci su očito usporedni, pa njihova međusobna udaljenost ne ovisi o izboru točke prvoga pravca (i njezine ortogonalne projekcije na drugi pravac). Radi jednostavnosti, uzmimo $S_1 = (0, l_1) \in p_1$. Pravac okomit na $p_1$ koji prolazi točkom $S_1$ ima jednadžbu $p_3 \ldots y = -\dfrac{1}{k} \cdot x + l_1$. Sjecište toga pravca s pravcem $p_2$ dobijemo rješavajući sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} y = k \cdot x + l_2, \\ y = -\dfrac{1}{k} \cdot x + l_1 \end{cases}$$

Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i njihove desne strane. Izjednačavanjem dobivamo:

$$k \cdot x + l_2 = -\frac{1}{k} \cdot x + l_1 \Leftrightarrow \left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot x = l_1 - l_2 \Leftrightarrow x = \frac{l_1 - l_2}{k + \frac{1}{k}} = \frac{(l_1 - l_2) \cdot k}{k^2 + 1}.$$

Uvrštavanjem toga izraza u drugu jednadžbu sustava dobijemo:

$$y = \left(-\frac{1}{k}\right) \cdot \frac{(l_1 - l_2) \cdot k}{k^2 + 1} + l_1 = \frac{l_2 - l_1}{k^2 + 1} + l_1.$$

Dakle, ortogonalna projekcija točke $S_1$ je točka $S_3 = \left(\dfrac{(l_1 - l_2) \cdot k}{k^2 + 1}, \dfrac{l_2 - l_1}{k^2 + 1} + l_1\right)$.

Preostaje odrediti udaljenost točaka $S_1$ i $S_3$. Korištenjem formule za udaljenost dviju točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini dobijemo:

$$d(S_1,S_3)=\sqrt{\left(\frac{(l_1-l_2)\cdot k}{k^2+1}-0\right)^2+\left(\frac{l_2-l_1}{k^2+1}+l_1-l_1\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{(l_1-l_2)\cdot k}{k^2+1}\right)^2+\left(\frac{l_2-l_1}{k^2+1}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{(-1)\cdot(l_2-l_1)\cdot k}{k^2+1}\right)^2+\left(\frac{l_2-l_1}{k^2+1}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{l_2-l_1}{k^2+1}\right)^2\cdot\left(k^2+1\right)}=\sqrt{\frac{(l_2-l_1)^2}{k^2+1}}=\frac{|l_2-l_1|}{\sqrt{k^2+1}},$$

što je i trebalo dokazati. ■

Preostaje primijeniti tvrdnju 1. na naš zadatak. U ovome slučaju su $k=\frac{3}{4}$, $l_1=6$ i $l_2=-9$, pa je tražena udaljenost jednaka:

$$d=\frac{|-9-6|}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}=\frac{|-15|}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\frac{15}{\sqrt{\frac{25}{16}}}=\frac{15}{\frac{5}{4}}=\frac{15\cdot 4}{5}=3\cdot 4=12 \text{ jed. duljine.}$$

**11.** **A**. Rješenje zadatka je interval na kojemu se graf funkcije nalazi u prvom ili drugom kvadrantu, tj. iznad osi apscisa.

Graf funkcije iznad intervala pod **A**. nalazi se u drugom kvadrantu, pa su sve vrijednosti promatrane funkcije na tom intervalu strogo pozitivne.

Graf funkcije na intervalu pod **B.** siječe os apscisa i npr. za $x=-0.99999$ vrijedi $f(-0.9999)<0$, pa taj interval nije rješenje zadatka.

Graf funkcije na intervalu pod **C.** nalazi se u četvrtom kvadrantu, pa su sve vrijednosti promatrane funkcije na tom intervalu strogo negativne. Zbog toga taj interval nije rješenje zadatka.

Graf funkcije na intervalu pod **D**. siječe os apscisa i npr. za $x=3.00001$ vrijedi nejednakost $f(3.00001)<0$. Zbog toga taj interval nije rješenje zadatka.

**12.** **C**. Primjenom adicijskih formula za funkcije sinus i kosinus dobivamo:

$$3\cdot(\underbrace{\sin(4\cdot\pi)}_{=0}\cdot\cos x+\underbrace{\cos(4\cdot\pi)}_{=1}\cdot\sin x)+\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\cdot\cos x-\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\cdot\sin x\right)=3\cdot\sin x-\sin x=2\cdot\sin x.$$

**13.** **A**. Primjenom svojstva simetrije binomnih koeficijenata odmah dobijemo:

$$\binom{24}{k+13}=\binom{24}{24-(k+13)}=\binom{24}{24-k-13}=\binom{24}{11-k}.$$

**14. Zadatak je izuzet.**

**15. B**. Označimo sa $S$ središte kružnice. Neka su $A$ ortogonalna projekcija točke $S$ na pod i $B$ „sjecište“ poda i zida. Trokut $BAS$ je jednakokračan pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha $A$ jer je $\left|\overline{SA}\right| = \left|\overline{AB}\right| = R.$ Zbog toga je $\left|\overline{SB}\right| = R \cdot \sqrt{2}$.

Međutim, s druge je strane duljina dužine $\overline{SB}$ jednaka zbroju polumjera kružnice i dijagonale kvadrata. Označimo li s $a$ traženu duljinu stranice kvadrata, onda mora vrijediti jednakost:

$$R + a \cdot \sqrt{2} = R \cdot \sqrt{2}\,.$$

Preostaje izraziti $a$ iz ove jednakosti:

$$a \cdot \sqrt{2} = R \cdot \sqrt{2} - R, \quad / : \sqrt{2}$$

$$a = \frac{R \cdot \sqrt{2} - R}{\sqrt{2}} = \frac{\left(R \cdot \sqrt{2} - R\right) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot R - R \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot R.$$

**16. 1.) 75.** Odmah imamo:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 75\%.$$

**2.) 1175.** Dvije godine imaju ukupno 24 mjeseca, pa je traženi iznos jednak $95 + 24 \cdot 45 = 95 + 1080 = 1175$ kn.

**17. 1.)** $\dfrac{3 \cdot x - 2}{(x-3)(x+4)} = \dfrac{3 \cdot x - 2}{x^2 + x - 12}$. Imamo redom:

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+4} = \frac{1 \cdot (x+4) + 2 \cdot (x-3)}{(x-3)(x+4)} = \frac{x + 4 + 2 \cdot x - 6}{x^2 - 3 \cdot x + 4 \cdot x - 12} = \frac{3 \cdot x - 2}{x^2 + x - 12}.$$

**2.)** $x \in \{-2, 2\}$. Iz druge jednadžbe sustava je $x \cdot y = 1$. Uvrstimo tu jednakost u prvu jednadžbu sustava, pa iz dobivene jednakosti izrazimo nepoznanicu $y$:

$$x - 4 \cdot y + 3 \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow x - 4 \cdot y + 3 = 3 \Leftrightarrow x - 4 \cdot y = 3 - 3 \Leftrightarrow x - 4 \cdot y = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot y = x \Leftrightarrow y = \frac{1}{4} \cdot x.$$

Uvrštavanjem dobivene jednakosti u jednakost $x \cdot y = 1$ dobivamo:

$$x \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot x\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4.$$

Ova kvadratna jednadžba ima točno dva realna rješenja: $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$.

**18. 1.) –1.** Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$10 \cdot x^2 - 21 \cdot x - 10 = 0.$$

Odavde očitamo: $a = 10,\ b = -21,\ c = -10.$ Primjenom Viète ovih formula zaključujemo da je traženi umnožak jednak $\frac{c}{a} = \frac{-10}{10} = -1.$

**2.)** $x_1 = -7,\ x_2 = -3$ **(ili obratno).** Zamijenimo $t := (x+5)^2$, pa dobijemo $t^2 + t = 20$, odnosno kvadratnu jednadžbu $t^2 + t - 20 = 0.$ Budući da je $t := (x+5)^2 \geq 0$ i da trebamo odrediti sva realna rješenja polazne jednadžbe, tražimo samo nenegativna rješenja jednadžbe $t^2 + t - 20 = 0.$ Jedino nenegativno rješenje te jednadžbe je $t = 4.$ (Drugo rješenje je $t = -5$ i ono je strogo negativno.) Tako iz jednadžbe $(x+5)^2 = 4$ slijedi $(x+5) \in \{-2, 2\}$, odnosno $x \in \{-2-5,\ 2-5\} = \{-7, -3\}$. Dakle, sva realna rješenja polazne jednadžbe su $x_1 = -7$ i $x_2 = -3.$

**19. 1.)** $2 + a$ ili $a + 2.$ Imamo redom:

$$2 \cdot a^0 - a^{-2} \cdot (-a)^3 = 2 \cdot 1 - a^{-2} \cdot (-a^3) = 2 + a^{-2+3} = 2 + a^1 = 2 + a = a + 2.$$

**2.) 8.** Znamo da vrijede jednakosti $i^3 = -i,\ i^4 = 1$. Primijenimo ih:

$$8 \cdot i^{4 \cdot k} - i^{4 \cdot k + 3} = 8 \cdot \left(i^4\right)^k - i^{4 \cdot k} \cdot i^3 = 8 \cdot 1^k - \left(i^4\right)^k \cdot (-i) = 8 \cdot 1 - 1^k \cdot (-i) = 8 - 1 \cdot (-i) = 8 + i.$$

Realni dio toga broja je očito jednak 8.

**20. 1.) 30.8**. Najprije dokažimo sljedeću tvrdnju.

**Tvrdnja 2.** Neka su $\Delta_1$ i $\Delta_2$ slični trokutovi takvi da se njihove površine odnose kao $a : b$, pri čemu je $a \geq b > 0.$ Tada se odgovarajuće visine tih trokutova (u istom poretku kao i trokutovi) odnose kao $\sqrt{a} : \sqrt{b}$.

**Dokaz**: Znamo da, ako su $\Delta_1$ i $\Delta_2$ slični trokutovi s koeficijentom sličnosti jednakim $k$, onda je omjer njihovih površina (u danom poretku) jednak $k^2$. Neka su $a$ i $a_1$ slične stranice, te $v_a$ i $v_{a_1}$ odgovarajuće visine. Koristeći formule $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a$, $P_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot v_{a_1}$ i $a = k \cdot a_1$ dobivamo:

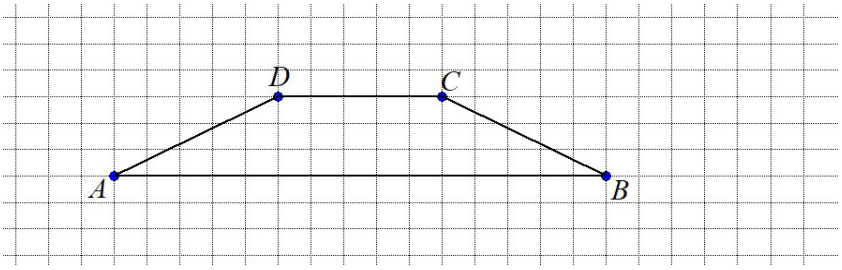
$$\frac{P}{P_1}=\frac{\frac{1}{2}\cdot a\cdot v_a}{\frac{1}{2}\cdot a_1\cdot v_{a_1}}=\frac{(k\cdot a_1)\cdot v_a}{a_1\cdot v_{a_1}}=k\cdot\frac{v_a}{v_{a_1}}.$$

Međutim, s druge je strane $\frac{P}{P_1}=k^2$, pa izjednačavanjem desnih strana tih dviju jednakosti i kraćenjem s $k\neq 0$ dobijemo $\frac{v_a}{v_{a_1}}=k$. Prema zahtjevu zadatka je $k^2=a:b$, a odatle je $k=\sqrt{a}:\sqrt{b}$, te $v_a:v_{a_1}=k=\sqrt{a}:\sqrt{b}$, što smo i tvrdili. ■

Preostaje primijeniti dokazanu tvrdnju na naš zadatak. Prema podacima u zadatku su $k^2=64:49$ i $v_a=35.2$, pa odmah slijedi $k=\sqrt{64}:\sqrt{49}=8:7$, te konačno

$$v_{a_1}=\frac{v_a}{k}=\frac{35.2}{\frac{8}{7}}=\frac{35.2\cdot 7}{8}=4.4\cdot 7=30.8\text{ cm}.$$

**2.) Vidjeti sliku 1.** Iz točke $A$ povucimo dužinu proizvoljne duljine. Neka je $B$ drugi kraj te dužine. Iz točke $D$ konstruirajmo dužinu proizvoljne duljine usporednu s dužinom $\overline{AB}$. Neka je $C$ drugi kraj te dužine. Spojimo točke $B$ i $C$. Četverokut $ABCD$ je traženi trapez.




Slika 1.

**21. Zadatak je izuzet.**

**22. 1.) Bilo koja funkcija oblika $f(x)=a\cdot x$, gdje je $a<0$.** Linearna funkcija je polinom 1. stupnja. On ima oblik $f(x)=a\cdot x+b$, gdje su $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Ta funkcija je strogo padajuća ako i samo je $a<0$. Njezin graf prolazi ishodištem ako i samo ako je $b=0$. Dakle, skup svih traženih funkcija je:

$$S=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=a\cdot x,\ a<0\}.$$

**2.) Zadatak je izuzet.**

**23. 1.)** $\log\left(\frac{a^2 \cdot b}{c}\right)$. Koristeći osnovna svojstva logaritama imamo redom:

$$2 \cdot \log a + \log b - \log c = \log\left(a^2\right) + \log b - \log c = \log\left(a^2 \cdot b\right) - \log c = \log\left(\frac{a^2 \cdot b}{c}\right).$$

**2.)** $x = \frac{-\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Funkcija tangens je neparna funkcija, pa imamo redom:

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

**24. 1.)** $[-5, +\infty\rangle$. Znamo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $x^4 \geq 0$ i da ne postoji nijedan $x \in \mathbb{R}$ takav da je $x^4 < 0$. Dodajmo (–5) objema stranama nejednakosti $x^4 \geq 0$, pa dobijemo nejednakost $x^4 - 5 \geq 0 - 5$, tj. $f(x) \geq -5$. Dakle, tražena slika zadane funkcije su svi realni brojevi jednaki ili veći od –5. Oni tvore skup $[-5, +\infty\rangle$.

**2.) Zadatak je izuzet.**

**25. 1.)** $A = (-9, 11)$. Neka je $A = (x_A, y_A)$. Koristeći formulu za polovište dužine dobivamo sljedeće jednadžbe:

$$\begin{cases} -2 = \frac{x_A + 5}{2}, \\ 7 = \frac{y_A + 3}{2}. \end{cases}$$

Riješimo ih na uobičajen način:

$$\begin{cases} -4 = x_A + 5, \\ 14 = y_A + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -4 - 5 = -9, \\ y_A = 14 - 3 = 11. \end{cases}$$

Dakle, $A = (-9, 11)$.

**2.)** $(x-2)^2 + y^2 = 169$. Zadanu jednadžbu kružnice najprije transformirajmo ovako:

$$x^2 - 4 \cdot x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 2^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2^2.$$

Zbog zahtjeva na koncentričnosti, tražena kružnica ima istu lijevu stranu jednadžbe, dok joj je desna strana jednaka $13^2$. Dakle, njezina jednadžba je:

$$(x-2)^2 + y^2 = 13^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 169 \Leftrightarrow x^2 - 4 \cdot x + y^2 = 165.$$

**3.)** $y=\frac{1}{4}\cdot x+3.$ Odredimo najprije prvu koordinatu nepoznate točke parabole. U jednadžbu parabole uvrstimo $y=6,$ pa dobijemo $6^2=3\cdot x$, odnosno jednadžbu $3\cdot x=36$ iz koje je $x=12.$ Dakle, tangentu treba povući u točki $T=(12,6).$

Iz jednadžbe parabole očitamo $2\cdot p=3$, a odatle je $p=\frac{3}{2}.$ Zbog toga je tražena jednadžba tangente u točki $T$:

$$y\cdot 6=\frac{3}{2}\cdot(x+12)\Leftrightarrow y=\frac{3}{12}\cdot(x+12)=\frac{1}{4}\cdot x+3.$$

**26. 1.) 3.** Neka su $x$ i $y$ redom broj zadataka s 5 bodova, odnosno broj zadataka s 9 bodova. Tražimo vrijednost nepoznanice $y$. Ukupan broj zadataka jednak je 10, pa mora vrijediti jednakost:

$$x+y=10.$$

Ukupan broj bodova koje donose zadaci s 5 bodova jednak je $x\cdot 5$, tj. $5\cdot x.$ Ukupan broj bodova koje donose zadaci s 9 bodova jednak je $y\cdot 9$ , tj. $9\cdot y$. Zbog toga je ukupan broj bodova koje donose svi zadaci jednak $5\cdot x+9\cdot y$. Prema podacima u zadatku, ta vrijednost treba biti jednaka 62, pa mora vrijediti jednakost:

$$5\cdot x+9\cdot y=62.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 5\cdot x+9\cdot y=62. \end{cases}$$

Iz toga sustava trebamo odrediti vrijednost nepoznanice $y$. Pomnožimo prvu jednadžbu s $(-5)$ i pribrojimo tako dobivenu jednadžbu drugoj jednadžbi. Imamo redom:

$$\begin{cases} (-5)\cdot x+(-5)\cdot y=(-5)\cdot 10, \\ 5\cdot x+9\cdot y=62 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (-5)\cdot x-5\cdot y=-50, \\ 5\cdot x+9\cdot y=62 \end{cases}\Rightarrow(-5)\cdot y+9\cdot y=-50+62\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\cdot y=12\Leftrightarrow y=3.$$

Dakle, u ispitu su točno tri zadatka koja se boduju s 9 bodova.

**2.) 316**. Neparni jednoznamenkasti prirodni brojevi, osim 1, su 3, 5, 7 i 9. Njihov najmanji zajednički višekratnik je $5\cdot 7\cdot 9=315.$ Traženi broj je za 1 veći od 315, tj. $315+1=316.$

**3.) Nakon približno 6 godina.** U formulu za cijenu proizvoda uvrstimo $N_0 = 100$, $N(t) = 128$ i $p = 4.2\%$, pa riješimo dobivenu jednadžbu po nepoznanici $t$. Imamo redom:

$$128 = 100 \cdot (1+4.2\%)^t \Leftrightarrow (1+0.042)^t = 1.28 \Leftrightarrow 1.042^t = 1.28 \Leftrightarrow t = \frac{\log 1.28}{\log 1.042} \approx 6.0002.$$

Dakle, cijena toga proizvoda će nakon približno 6 godina iznositi 128 kn.

**27. 1.) Zadatak je izuzet.**

**2.)** $f(x) = 3 \cdot x + 5$. Prema pretpostavci je $x > 1$. To znači da je $2 \cdot x + 6 > 2 \cdot 1 + 6 = 2 + 6 = 8 > 0$, pa je $|2 \cdot x + 6| = 2 \cdot x + 6$. Nadalje, iz $x > 1$ slijedi $1 - x < 0$, pa je $|1 - x| = -(1-x) = -1 + x = x - 1$. Tako konačno dobivamo:

$$f(x) = 2 \cdot x + 6 + (x-1) = 2 \cdot x + 6 + x - 1 = 3 \cdot x + 5.$$

**3.)** $a \in \left\langle -\frac{9}{8}, +\infty \right\rangle \setminus \{0\}$. Iz zahtjeva da graf funkcije $f$ siječe os apscisa u točno dvjema točkama zaključujemo da jednadžba $f(x) = 0$ ima točno dva različita rješenja. Funkcija $f$ je kvadratna funkcija, pa će jednadžba $f(x) = 0$ imati točno dva različita rješenja ako i samo ako istovremeno vrijede nejednakosti $a \neq 0$ i $D > 0$. Odredimo diskriminantu funkcije $f$:

$$D = 3^2 - 4 \cdot a \cdot (-2) = 9 + 8 \cdot a.$$

Iz zahtjeva $D > 0$ slijedi:

$$\begin{aligned} &9 + 8 \cdot a > 0, \\ &8 \cdot a > -9, \quad /:8 \\ &a > -\frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Zbog zahtjeva $a \neq 0$, rješenje zadatka su svi realni brojevi strogo veći od $-\frac{9}{8}$ i različiti od nule. Oni tvore skup $S = \left\langle -\frac{9}{8}, +\infty \right\rangle \setminus \{0\}$.

**28.** $58^\circ 29' 4''$ ili $121^\circ 30' 56''$ Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su stranice trokuta $ABC$ označene standardno, tj. tako da su $|BC| = a = 4$ cm, $|AC| = b = 5$ cm, $\angle BAC = \alpha = \ = 43^\circ$. Tražimo mjeru kuta $\angle ABC$, tj. kuta $\beta$. Primjenom sinusova poučka dobivamo:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{5}{4}\cdot\sin 43^\circ \approx 0.682.$$

Budući da nemamo nikakvih podataka o uređaju među stranicama zadanoga trokuta, tj. koja od njih triju je najmanja, a koja najveća, gornja trigonometrijska jednadžba ima dva rješenja:

$$\beta_1 = 58.4844086^\circ = 58^\circ 29' 4'',$$
$$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 180^\circ - 58^\circ 29' 4'' = 121^\circ 40' 56''.$$

**29. 1.) 1. način:** $f(x) = \frac{5}{9}\cdot x^2 - \frac{20}{9}\cdot x - \frac{16}{9}$. Pretpostavimo da je ta kvadratna funkcija ima oblik $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Iz podatka da graf funkcije prolazi točkom $T = (5,1)$ zaključujemo da je $f(5) = 1$. Uvrštavanjem $x = 5$, $f(5) = 1$ u gornji oblik funkcije *f* dobivamo:

$$a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c = 1 \Leftrightarrow 25\cdot a + 5\cdot b + c = 1.$$

Graf funkcije *f* je parabola. Prva koordinata njezina tjemena je $-\frac{b}{2\cdot a}$. Prema podacima u zadatku, taj razlomak treba biti jednak 2, pa dobivamo jednadžbu:

$$-\frac{b}{2\cdot a} = 2.$$

Druga koordinata tjemena parabole (grafa funkcije *f*) jednaka je $\frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a}$. Prema podacima u zadatku, taj razlomak treba biti jednak –4, pa dobivamo jednadžbu:

$$\frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a} = -4.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} 25\cdot a + 5\cdot b + c = 1, \\ -\frac{b}{2\cdot a} = 2, \\ \frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a} = -4. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav tako što ćemo nepoznanice *b* i *c* izraziti pomoću nepoznanice *a*. Iz druge jednadžbe sustava je odmah

$$b = -4 \cdot a.$$

Uvrštavanjem te jednakosti u prvu jednadžbu sustava dobijemo:

$$\begin{aligned}
&25 \cdot a + 5 \cdot (-4 \cdot a) + c = 1, \\
&25 \cdot a - 20 \cdot a + c = 1, \\
&5 \cdot a + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - 5 \cdot a.
\end{aligned}$$

Dvije dobivene jednakosti uvrstimo u treću jednadžbu sustava, pa slijedi:

$$\begin{aligned}
&\frac{4 \cdot a \cdot (1 - 5 \cdot a) - (-4 \cdot a)^2}{4 \cdot a} = -4, \\
&\frac{4 \cdot a - 20 \cdot a^2 - 16 \cdot a^2}{4 \cdot a} = -4, \\
&\frac{4 \cdot a - 36 \cdot a^2}{4 \cdot a} = -4, \\
&\frac{4 \cdot a}{4 \cdot a} - \frac{36 \cdot a^2}{4 \cdot a} = -4, \\
&1 - 9 \cdot a = -4, \\
&-9 \cdot a = -4 - 1, \\
&-9 \cdot a = -5, \\
&a = \frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

Sada lako nalazimo:

$$\begin{aligned}
&b = -4 \cdot a = (-4) \cdot \frac{5}{9} = -\frac{20}{9}, \\
&c = 1 - 5 \cdot a = 1 - 5 \cdot \frac{5}{9} = 1 - \frac{25}{9} = -\frac{16}{9},
\end{aligned}$$

pa je konačno:

$$f(x) = \frac{5}{9} \cdot x^2 - \frac{20}{9} \cdot x - \frac{16}{9}.$$

**2. način**: Pretpostavimo da je pravilo funkcije $f$ zapisano u obliku $f(x) = a \cdot (x - x_T)^2 + y_T$, gdje je $T = (x_T, y_T)$ tjeme grafa funkcije $f$. Prema podacima u zadatku su $x_T = 2$, $y_T = -4$, pa uvrštavanjem u navedeni oblik funkcije $f$ dobijemo:

$$f(x) = a \cdot (x - 2)^2 + (-4) = a \cdot (x - 2)^2 - 4.$$

Preostaje odrediti vrijednost nepoznanice $a$. U tu ćemo svrhu iskoristiti podatak o točki kojom prolazi graf funkcije $f$. Analogno kao i u 1. načinu zaključujemo da mora vrijediti jednakost $f(5)=1$. Uvrštavanjem $x=5, f(5)=1$ u gornji oblik funkcije $f$ dobivamo:

$$1=a\cdot(5-2)^2-4 \Leftrightarrow 1=a\cdot 3^2-4 \Leftrightarrow 9\cdot a-4=1 \Leftrightarrow 9\cdot a=5 \Leftrightarrow a=\frac{5}{9}.$$

Zbog toga je

$$f(x)=\frac{5}{9}\cdot(x-2)^2-4=\frac{5}{9}\cdot(x^2-4\cdot x+4)-4=\frac{5}{9}\cdot x^2-\frac{20}{9}\cdot x-\frac{16}{9}.$$

**2.)** $\varphi \approx 0.85425 \text{ rad} \approx 48.94519^\circ = 48^\circ 56' 43''$. Traženi kut odredit ćemo koristeći skalarni umnožak vektora. Radi kratkoće zapisa pišemo $\vec{a}=(5,-12)$, $\vec{b}=(4,9)$. Računamo redom:

$$\vec{a}+\vec{b}=(5,-12)+(4,9)=(9,-3),$$
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=(9,-3)\cdot(5,-12)=9\cdot 5+(-3)\cdot(-12)=45+36=81,$$
$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{9^2+(-3)^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}=\sqrt{9\cdot 10}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{10}=3\cdot\sqrt{10},$$
$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13,$$
$$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}=\frac{81}{3\cdot\sqrt{10}\cdot 13}=\frac{27}{13\cdot\sqrt{10}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi \approx 0.85425 \text{ rad} \approx 48.94519^\circ = 48^\circ 56' 43''.$$

**3.)** $\frac{51}{10}=5.1$. Uvedimo pravokutni koordinatni sustav tako da pravac kojem pripada spojnica zvučnika bude os apscisa i da ishodište toga sustava bude u polovištu dotične spojnice. Prema podacima u zadatku, razmak između žarišta poluelipse iznosi 16 m, što znači da je (linearni) ekscentricitet elipse $e=\frac{16}{2}=8$ metara. Nadalje, iz podatka da najveća visina dvorane iznosi 7.5 metara zaključujemo da je najveća udaljenost od poda do stropa te dvorane jednaka $7.5-1.5=6$ metara. Ta je udaljenost ujedno jednaka duljini male poluosi poluelipse, tj. $b=6$ m. Primjenom Pitagorina poučka odredimo duljinu velike poluosi poluelipse:

$$a=\sqrt{e^2+b^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10 \text{ metara}.$$

Tako zaključujemo da je jednadžba poluelipse:

$$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{6^2}=1.$$

Odredimo udaljenost između zvučnika i stropa. Zapravo tražimo drugu koordinatu točke poluelipse kojoj je prva koordinata jednaka 8 (ili –8, svejedno je), a tražena druga koordinata strogo pozitivna. Tako dobivamo:

$$\frac{8^2}{10^2}+\frac{y^2}{6^2}=1,$$
$$y^2=6^2\cdot\left(1-\frac{8^2}{10^2}\right)=36\cdot\left(1-\frac{64}{100}\right)=36\cdot\frac{36}{100}=\frac{36^2}{10^2}=\frac{18^2}{5^2}\Rightarrow y=\frac{18}{5}=3.6.$$

Da bismo dobili željenu visinu dvorane, dobivenoj vrijednosti moramo pribrojiti udaljenost zvučnika od poda, tj. 1.5 metara. Tako zaključujemo da je rješenje zadatka

$$h=3.6+1.5=5.1 \text{ metara.}$$

**4.)** $\frac{9}{2}\cdot\sqrt{100\cdot\cos^2 63^\circ-7.29}\cdot\sin 63^\circ\approx 14.63\text{ cm}^3$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\left|\overline{AB}\right|=2.7$ cm. Prostorna dijagonala kvadra je npr. spojnica vrhova $A$ i $G$. U tu svrhu promotrimo pravokutan trokut $ACG$ s pravim kutom kod vrha $C$. Duljina njegove hipotenuze je 10 cm, dok je mjera kuta koji ta hipotenuza zatvara s katetom $\overline{AC}$ jednaka $63^\circ$. Primjenom osnovnih trigonometrijskih relacija u pravokutnom trokutu nalazimo:

$$\left|\overline{AC}\right|=10\cdot\cos 63^\circ,$$
$$\left|\overline{CG}\right|=10\cdot\sin 63^\circ.$$

Kako je

$$\left|\overline{AC}\right|^2=\left|\overline{AB}\right|^2+\left|\overline{BC}\right|^2,$$

uvrštavanjem $\left|\overline{AB}\right|=2.7$ i $\left|\overline{AC}\right|=10\cdot\cos 63^\circ$ dobijemo:

$$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{\left|\overline{AC}\right|^2-\left|\overline{AB}\right|^2}=\sqrt{(10\cdot\cos 63^\circ)^2-2.7^2}=\sqrt{10^2\cdot\cos^2 63^\circ-2.7^2}=\sqrt{100\cdot\cos^2 63^\circ-7.29}.$$

Traženi obujam piramide jednak je trećini umnoška površine pravokutnoga trokuta $ABC$ i duljine brida $\overline{CG}$. Uvrštavanjem podataka slijedi:

$$V=\frac{1}{3}\cdot B\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|\right)\cdot\left|\overline{CG}\right|=\frac{1}{6}\cdot 2.7\cdot\sqrt{100\cdot\cos^2 63^\circ-7.29}\cdot 10\cdot\sin 63^\circ=$$
$$=\frac{27}{6}\cdot\sqrt{100\cdot\cos^2 63^\circ-7.29}\cdot\sin 63^\circ=\frac{9}{2}\cdot\sqrt{100\cdot\cos^2 63^\circ-7.29}\cdot\sin 63^\circ\approx 14.633814\approx 14.63\ \text{cm}^3.$$

**5.)** 40100. Najprije ćemo dokazati da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aritmetički. U tu je svrhu dovoljno provjeriti jednakost

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

Iz definicije zbroja prvih $n$ članova niza zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$S_n=S_{n-1}+a_n.$$

Zbog toga je:

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(2\cdot n^2+3\cdot n\right)-\left(2\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1)\right)=2\cdot n^2+3\cdot n-2\cdot(n-1)^2-3\cdot(n-1)=$$
$$=2\cdot n^2+3\cdot n-2\cdot(n^2-2\cdot n+1)-3\cdot n+3=2\cdot n^2+3\cdot n-2\cdot n^2+4\cdot n-2-3\cdot n+3=4\cdot n+1.$$

Tako su

$$a_{n-1}=4\cdot(n-1)+1=4\cdot n-4+1=4\cdot n-3,$$
$$a_{n+1}=4\cdot(n+1)+1=4\cdot n+4+1=4\cdot n+5,$$

pa slijedi:

$$\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}=\frac{4\cdot n-3+4\cdot n+5}{2}=\frac{8\cdot n+2}{2}=4\cdot n+1=a_n,$$

što znači da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aritmetički. Njegov prvi član jednak je $a_1=S_1=2\cdot 1^2+3\cdot 1=2+3=5,$ dok je razlika niza jednaka $d=a_2-a_1=4\cdot 2+1-5=8+1-5=4.$ (Taj zaključak smo mogli izvesti uočivši da se pravilo za opći član niza može zapisati u obliku $a_n=4\cdot(n-1)+5=5+(n-1)\cdot 4.$) )

Članovi polaznoga aritmetičkoga niza na neparnim mjestima također tvore aritmetički niz. U tu je svrhu dovoljno provjeriti jednakost

$$a_{2\cdot n+1}=\frac{a_{2\cdot n-1}+a_{2\cdot n+3}}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Doista,

$$\frac{a_{2\cdot n-1}+a_{2\cdot n+3}}{2}=\frac{4\cdot(2\cdot n-1)+1+4\cdot(2\cdot n+3)+1}{2}=\frac{8\cdot n-4+1+8\cdot n+12+1}{2}=\frac{16\cdot n+10}{2}=8\cdot n+5=$$
$$=4\cdot(2\cdot n+1)+1=a_{2\cdot n+1},$$

što je i trebalo pokazati. Prvi član toga novoga niza je također $a_1=5$. Razlika novoga niza jednaka je $d_1=a_3-a_1=4\cdot 3+1-5=12+1-5=8$. Tako slijedi da je traženi zbroj jednak:

$$S_{100}=\frac{100}{2}\cdot(2\cdot 5+(100-1)\cdot 8)=50\cdot(10+99\cdot 8)=50\cdot(10+792)=50\cdot 802=40100.$$

**30.** $\left\langle -\frac{1}{12},0\right]$. Riješimo zasebno svaku nejednadžbu, pa nađimo presjek dobivenih skupova rješenja.

Pođimo od prve nejednadžbe. Da bi logaritam izraza u okrugloj zagradi bio nenegativan, nužno je i dovoljno da izraz u okrugloj zagradi bude najviše jednak $0.5^0=1$. Naime, logaritamska funkcija $f_1(x)=\log_{0.5}x$ je strogo padajuća (njezina baza je strogo manja od 1), pa se potenciranjem lijeve i desne strane prve nejednadžbe (sa bazom 0.5) „okreće“ znak nejednakosti. Također, izraz pod bilo kojim logaritmom nužno mora biti strogo pozitivan. Tako redom dobivamo:

$$0<4\cdot x+\frac{1}{3}\le 0.5^0,$$
$$0<4\cdot x+\frac{1}{3}\le 1,$$
$$0-\frac{1}{3}<4\cdot x\le 1-\frac{1}{3},$$
$$-\frac{1}{3}<4\cdot x\le\frac{2}{3},\quad /:4$$
$$-\frac{1}{12}<x<\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow x\in\left\langle -\frac{1}{12},\frac{1}{6}\right].$$

Riješimo sada drugu nejednadžbu. Najprije je zapišimo u obliku:

$$\sqrt{x+1}\le 1-x.$$

Lijeva strana te nejednadžbe je nenegativan realan broj, pa takva mora biti i desna strana. Taj zahtjev nam daje uvjet $1-x\ge 0$, tj. $x\le 1$. Uvažavajući taj uvjet možemo kvadrirati lijevu i desnu stranu nejednadžbe:

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2\le(1-x)^2,$$

$$x+1 \le 1-2\cdot x+x^2,$$
$$x^2-3\cdot x \ge 0.$$

Rješenje ove nejednadžbe je skup $\mathbb{R}\setminus\langle 0,3\rangle$. Međutim, zbog uvjeta $x \le 1$ uz koji smo kvadrirali polaznu nejednadžbu, rješenje polazne nejednadžbe je skup $\left(\mathbb{R}\setminus\langle 0,3\rangle\right)\cap\langle -\infty,1\rangle=\langle -\infty,0]$.

Tako konačno dobivamo da je rješenje zadatka skup

$$\left\langle -\frac{1}{12},\frac{1}{6}\right]\cap\langle -\infty,0]=\left\langle -\frac{1}{12},0\right].$$

pripremio:

**mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač**