TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB	**Matematika na državnoj maturi**	**rješenja zadataka iz lipnja 2022. (viša razina)**

1. **B**. Imamo redom:

$$44\cdot\frac{\sin 32^\circ}{\sin 57^\circ}\approx 44\cdot\frac{0.5299192642}{0.8386705679}\approx 27.801676\approx 27.8017.$$

2. **A.** Vrijedi sljedeći „lanac“ jednakosti:

$$20 \text{ litara} = 20 \text{ dm}^3 = 20\cdot\left(10^{-1}\right)^3 \text{ m}^3 = 20\cdot 10^{-3} = 2\cdot 10^1\cdot 10^{-3} = 2\cdot 10^{-2} = 0.02 \text{ m}^3.$$

3. **D**. Koristeći pravila za računanje s potencijama iste baze imamo redom:

$$\frac{9^{-2}\cdot 243^a}{3^a} = 9^{-2}\cdot\left(\frac{243}{3}\right)^a = \frac{1}{9^2}\cdot 81^a = \frac{1}{81}\cdot 81^a = 81^{a-1}.$$

4. **B**. Primjenom formula za kvadrat binoma, odnosno razliku kvadrata dobivamo redom:

$$\frac{(2\cdot y-1)^2+8\cdot y}{4\cdot y^2-1} = \frac{4\cdot y^2-4\cdot y+1+8\cdot y}{(2\cdot y-1)\cdot(2\cdot y+1)} = \frac{4\cdot y^2+4\cdot y+1}{(2\cdot y-1)\cdot(2\cdot y+1)} =$$
$$= \frac{(2\cdot y+1)^2}{(2\cdot y-1)\cdot(2\cdot y+1)} = \frac{2\cdot y+1}{2\cdot y-1}.$$

5. **A**. Množenjem promjera čestice virusa s 1000 dobivamo da je traženi promjer ljudske dlake jednak:

$$d = 0.12\cdot 10^{-6}\cdot 1000 = 1.2\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-6}\cdot 10^3 = 1.2\cdot 10^{-1-6+3} = 1.2\cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

6. **C**. Koeficijent smjera *a bilo kojega* polinoma 1. stupnja interpretira se kao *promjena vrijednosti polinoma ako se vrijednost nezavisne varijable poveća za* 1. Ako je $a>0$, onda se radi o povećanju vrijednosti polinoma za *a*. Ako je $a<0$, onda se radi o smanjenju vrijednosti polinoma za $|a|$.

U ovome je zadatku $a=-4<0$, pa zaključujemo: *Ako se vrijednost varijable t poveća za* 1, *vrijednost varijable h će se smanjiti za* $|-4|=4$. To konkretno znači: *Ako se temperatura mlijeka poveća za* 1°C, *onda će se mlijeko ukiseliti* 4 *sata ranije.*

7. **C**. Neka su *b* jedinična cijena sata branja jabuka i *k* jedinična cijena sata košnje. Za 3 sata košnje Marko je zaradio $3\cdot k$ kn, dok je za 4 sata branja jabuka zaradio $4\cdot b$ kn. Ukupni zarađeni iznos prvoga dana jednak je $3\cdot k+4\cdot b$. Taj iznos mora biti jednak 180 kn, pa dobivamo jednadžbu:

$$3\cdot k+4\cdot b=180.$$

Za 2 sata košnje Marko je zaradio $2\cdot k$ kn, dok je za 6 sati branja jabuka zaradio $6\cdot b$ kn. Ukupni zarađeni iznos prvoga dana jednak je $2\cdot k+6\cdot b$. Taj iznos mora biti jednak 220 kn, pa dobivamo jednadžbu:

$$2\cdot k+6\cdot b=220.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases}3\cdot k+4\cdot b=180,\\ 2\cdot k+6\cdot b=220\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}3\cdot k+4\cdot b=180,\\ k+3\cdot b=110.\end{cases}$$

Riješimo ovaj sustav metodom suprotnih koeficijenata:

$$\begin{cases}3\cdot k+4\cdot b=180,\\ k+3\cdot b=110 \quad /\cdot(-3)\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&3\cdot k+4\cdot b=180,\\ &-3\cdot k-9\cdot b=-330\end{aligned}\right\}+$$

$$-5\cdot b=-150,\ \ /:(-5)$$

$$b=30.$$

Uvrštavanjem te vrijednosti u jednakost $k+3\cdot b=110$ dobivamo:

$$k+3\cdot 30=110,$$
$$k+90=110,$$
$$k=20.$$

Odatle zaključujemo da je $b>k$ i $b-k=30-20=10$ **kn.** Dakle, branje jabuka u jednom satu je za 10 kuna više plaćeno od košnje trave u istom vremenu.

8. **A.** Neka je K Katjin ušteđeni iznos novca iskazan u kn. Iznos novca koji je Katja dobila od svoje majke jednak je $2\cdot K$ kn. Katja je od oca dobila još 500 kn, pa je ukupan iznos jednak $K+2\cdot K+500=3\cdot K+500$ kn. Taj iznos mora biti strogo veći od iznosa $5\cdot K$, pa dobivamo sljedeću linearnu nejednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$3\cdot K+500>5\cdot K.$$

Riješimo tu nejednadžbu na uobičajen način:

$$3\cdot K+500>5\cdot K,$$
$$3\cdot K-5\cdot K>-500,$$
$$(-2)\cdot K>(-500),\quad /:(-2)$$
$$K<250.$$

Dakle, Katja je uštedjela (strogo) manje od 250 kn.

9. **A**. Riješimo jednadžbu $y=160$ po nepoznanici x. Imamo redom:

$$160+10\cdot\log_2(200\cdot x+1)=160,$$
$$10\cdot\log_2(200\cdot x+1)=160-160,$$
$$10\cdot\log_2(200\cdot x+1)=0,\quad /:10$$
$$\log_2(200\cdot x+1)=0,$$
$$200\cdot x+1=2^0,$$
$$200\cdot x+1=1,$$
$$200\cdot x=1-1,$$
$$200\cdot x=0,\quad /:200$$
$$x=0.$$

Dakle, može se očekivati da će bez ikakva ulaganja u reklamiranje proizvoda biti prodano 160 proizvoda.

10. **A**. Imamo redom:

$$8\cdot 100^{x+2}=0.008,$$
$$8\cdot\left(10^2\right)^{x+2}=8\cdot 10^{-3},\quad /:8$$
$$10^{2\cdot(x+2)}=10^{-3},$$
$$2\cdot(x+2)=-3,\quad /:2$$
$$x+2=\frac{-3}{2},$$
$$x=\frac{-3}{2}-2=\frac{-7}{2}.$$

Budući da vrijedi nejednakost $-\infty<\frac{-7}{2}<-3,$ dobiveno rješenje pripada intervalu $\langle-\infty,-3\rangle$.

11. **A**. Zadatak je ekvivalentan zadatku: *Zamislio sam jedan jednoznamenkast nenegativan cijeli broj. Kolika je vjerojatnost da ćeš ga pogoditi u prvom pokušaju?* Naime, budući da su sve znamenke lozinke jednake, dovoljno je pogoditi *bilo koju*

od njih.

Svi jednoznamenkasti nenegativni cijeli brojevi su 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Ima ih ukupno 10. Dakle, ukupan broj svih mogućih ishoda jednak je 10.

Ukupan broj svih povoljnih ishoda jednak je 1 jer je samo jedna od njih ispravna (zamišljena znamenka, odnosno znamenka u lozinki).

Dakle, tražena vjerojatnost je jednaka $p = \frac{1}{10} = 0.1$.

Napomena: U zadatku se pretpostavlja da znamenka lozinke može biti bilo koja znamenka dekadskoga brojevnoga sustava. Zbog toga se u formulaciji ekvivalentnoga zadatka ne govori o prirodnim brojevima, nego o nenegativnim cijelim brojevima.

12. C. Središte *bilo kojemu* trokutu opisane kružnice dobijemo kao sjecište simetrala svih triju stranica trokuta. Udaljenost toga sjecišta od *bilo kojega* vrha trokuta jednaka je duljini polumjera te kružnice.

13. D. Uočeni pravci se očito ne sijeku. Oni nisu ni usporedni jer je $BC \parallel AD$ (pravci kojima pripadaju dvije nasuprotne stranice osnovke), a pravci AD i VD se sijeku u točki D. Iz istoga se razloga ti pravci ne podudaraju. Dakle, oni su mimosmjerni.

14. D. Koristeći formulu za jednadžbu pravca kroz dvije zadane točke odmah imamo:

$$\begin{aligned}
&y = \frac{-3-1}{0-1} \cdot (x-1) + 1,\\
&y = \frac{-4}{-1} \cdot (x-1) + 1,\\
&y = 4 \cdot (x-1) + 1,\\
&y = 4 \cdot x - 4 + 1,\\
&y = 4 \cdot x - 3.
\end{aligned}$$

15. A. Uvrštavanjem vektora u zadanu jednakost dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + k \cdot \left(2 \cdot \vec{i} - \vec{j}\right) = -3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j},\\
&\vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 2 \cdot k \cdot \vec{i} - k \cdot \vec{j} = -3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j},\\
&(2 \cdot k + 1) \cdot \vec{i} + (2 - k) \cdot \vec{j} = -3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j},\\
&\begin{cases} 2 \cdot k + 1 = -3, \\ 2 - k = 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Iz bilo koje od ovih dviju jednadžbi slijedi $k=-2$.

16.B. Središte zadane kružnice je točka $S=(0,2)$. Ta kružnica prolazi točkom (0, 5), pa je njezin polumjer jednak $r=5-2=3$. Dakle, jednadžba kružnice glasi:

$$(x-0)^2+(y-2)^2=3^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2+(y-2)^2=9.$$

17.C. Određenosti radi, neka je $ABCD$ zadani pravokutnik čiji su vrhovi označeni tako da je $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{CD}\right|=9$ cm. Neka je S sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Te dijagonale se raspolavljaju (jer je svaki pravokutnik paralelogram), pa je trokut ASD jednakokračan. Mjera kuta pri vrhu S toga trokuta jednaka je 68°, pa je mjera kuta pri vrhu D toga trokuta

$$\delta_1=\frac{1}{2}\cdot\left(180^\circ-68^\circ\right)=\frac{1}{2}\cdot 112^\circ=56^\circ.$$

Uočimo trokut ABD. Taj trokut je pravokutan (s pravim kutom kod vrha A), mjera kuta kod vrha D toga trokuta je $\delta_1=56^\circ$, a duljina jedne njegove katete je 9 cm. Tražimo duljinu druge njegove katete. Odmah dobivamo:

$$\operatorname{ctg}\delta_1=\frac{\left|\overline{AD}\right|}{\left|\overline{AB}\right|}$$
$$\left|\overline{AD}\right|=\left|\overline{AB}\right|\cdot\operatorname{ctg}\delta_1=9\cdot\operatorname{ctg}56^\circ\approx 6.07057665\approx 6.07 \text{ cm}.$$

18.B. Uočimo trokut kojemu je jedna stranica krak trapeza b, druga stranica dijagonala trapeza d, mjera kuta nasuprot stranici b 25°, a mjera kuta nasuprot dijagonali d $25^\circ+110^\circ=135^\circ$. Primjenom sinusova poučka dobivamo:

$$b=\frac{\sin 25^\circ}{\sin 135^\circ}\cdot 15\approx\frac{0.4226182617}{0.7071067812}\cdot 15\approx 8.965087162\approx 8.97 \text{ cm}.$$

19.D. Neka su r i v redom polumjer baze i visina valjka (oboje iskazani u cm). Opseg baze iznosi $2\cdot r\cdot\pi$ cm, pa iz jednadžbe $2\cdot r\cdot\pi=6\cdot\pi$ dijeljenjem s $2\cdot\pi$ dobivamo $r=3$. Zbog toga je i $v=r=3$, pa je traženi volumen jednak:

$$V=B\cdot v=r^2\cdot\pi\cdot v=3^2\cdot\pi\cdot 3=3^3\cdot\pi=27\cdot\pi \text{ cm}^3.$$

20.C. Neka su a i a_1 redom duljina brida kockice, odnosno duljina brida Rubikove kocke. Volumen kockice jednak je

$$V = a^3,$$

pa iz jednadžbe $a^3 = 6.859$ slijedi $a = \sqrt[3]{6.859} = 1.9$ cm. Tako dalje odmah slijedi:

$$a_1 = 3 \cdot a = 3 \cdot 1.9 = 5.7 \text{ cm},$$
$$O = 6 \cdot a_1^2 = 6 \cdot 5.7^2 = 194.94 \text{ cm}^2.$$

21. C. Koristimo jednakost $\lim\limits_n \left(\frac{a}{n}\right) = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$. Podijelimo svaki član brojnika i svaki član nazivnika s n. Dobivamo:

$$L = \lim_n \left(\frac{n}{2 \cdot n + 3} \frac{:n}{:n} \right) = \lim_n \left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{2 \cdot n}{n} + \frac{3}{n}} \right) = \lim_n \left(\frac{1}{2 + \frac{3}{n}} \right) = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

22. C. Primijetimo da je vodeći koeficijent polinoma f, tj. koeficijent uz x^2 strogo pozitivan i jednak 1. To znači da polinom f ima globalni minimum i njegova je vrijednost jednaka

$$f_{\min} = \frac{4 \cdot 1 \cdot k - (-2)^2}{4 \cdot 1} = \frac{4 \cdot k - 4}{4} = \frac{4 \cdot k}{4} - \frac{4}{4} = k - 1.$$

Ta vrijednost treba biti jednaka 5, pa iz jednadžbe

$$k - 1 = 5$$

slijedi $k = 6$.

23. A. Zbog uvjeta $x + 2 \neq 0$ iz kojega je $x \neq -2$, zadatak se svodi na određivanje skupa svih rješenja nejednadžbe $f'(x) > 0$ različitih od –2. Najprije odredimo prvu derivaciju zadane funkcije koristeći osnovna pravila za deriviranje i tablicu derivacija elementarnih funkcija:

$$f'(x) = \frac{(3 \cdot x - 5)' \cdot (x+2) - (3 \cdot x - 5) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} =$$
$$= \frac{(3 \cdot 1 - 0) \cdot (x+2) - (3 \cdot x - 5) \cdot (1+0)}{(x+2)^2} =$$
$$= \frac{3 \cdot (x+2) - (3 \cdot x - 5) \cdot 1}{(x+2)^2} =$$
$$= \frac{3 \cdot x + 6 - 3 \cdot x + 5}{(x+2)^2} = \frac{11}{(x+2)^2}.$$

Primijetimo da je $f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Zbog toga su traženi intervali $\langle -\infty, -2 \rangle$ i $\langle 2, +\infty \rangle$.

24.B. Pojednostavnimo zadani izraz što je više moguće. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&(n+1)\cdot(n-2)-n^2-2\cdot n-1= \\
&=n^2+n-2\cdot n-2-n^2-2\cdot n-1= \\
&=-3\cdot n-3= \\
&=3\cdot(-n-1).
\end{aligned}$$

Prema pretpostavci, broj n je prirodan broj, pa je broj $-n-1$ strogo negativan cijeli broj. To znači da je vrijednost zadanoga izraza jednaka umnošku broja 3 i strogo negativnoga cijeloga broja, odnosno da je ta vrijednost strogo negativan cijeli broj djeljiv s 3. Ona ne može biti ni jednaka nuli, ni pozitivan broj, a njezina parnost ovisi o parnosti faktora $-n-1$. (Ako je n paran, vrijednost zadanoga izraza je neparan broj. Ako je n neparan, onda je ta vrijednost paran broj.)

25.1. Odmah imamo:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1.$$

26. $b^{\frac{15}{4}}$. Koristeći pravila za potenciranje potencije s istom bazom imamo redom:

$$\sqrt{b^7 \cdot \sqrt{b}} = \left(b^7 \cdot b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = b^{\left(7+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}} = b^{\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{2}} = b^{\frac{15}{4}}.$$

27.4. Označimo $a := 10^{55}$. Tada imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\frac{(a+1)^2-(a-1)^2}{a} = \frac{(a+1-(a-1))\cdot(a+1+(a-1))}{a} = \\
&= \frac{(a+1-a+1)\cdot(a+1+a-1)}{a} = \frac{2\cdot 2\cdot a}{a} = 2\cdot 2 = 4.
\end{aligned}$$

28. $3\cdot n+5$. Prvi član zadanoga aritmetičkoga niza je $a_1 = 8$. Razlika niza jednaka je $d = a_2 - a_1 = 11-8 = 3$. Tako je traženi opći član niza jednak:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 8 + (n-1)\cdot 3 = 8 + 3\cdot n - 3 = 3\cdot n + 5.$$

29. 1.) $\sqrt{5}\cdot x$ **ili** $x\cdot\sqrt{5}$. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$c=\sqrt{x^2+(2\cdot x)^2}=\sqrt{x^2+4\cdot x^2}=\sqrt{5\cdot x^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2}=\sqrt{5}\cdot x.$$

2.) $\left\langle \frac{-1}{2},1\right\rangle$**.** Primijetimo da je lijeva strana nejednadžbe polinom 2. stupnja čiji je vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz x^2) strogo negativan cijeli broj (–2). Taj će polinom poprimiti strogo pozitivne vrijednosti na otvorenom intervalu čije su granice nultočke polinoma (ako postoje). Te nultočke odredimo tako da pravilo polinoma izjednačimo s nulom. Imamo redom:

$$-2\cdot x^2+x+1=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-2)\cdot 1}}{2\cdot(-2)}=\frac{-1\pm\sqrt{1-(-8)}}{-4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{-4}=\frac{-1\pm 3}{-4}\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{-1+3}{-4}=\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2},\ x_2=\frac{-1-3}{-4}=\frac{-4}{-4}=1.$$

Očito je $x_1<x_2$, pa je rješenje zadatka interval $\left\langle \frac{-1}{2},1\right\rangle$.

30.1.) 0.88. Najviša temperatura iznosi 14.47°C (i odgovara razdoblju od 2001. do 2010. godine), a najniža 13.59°C (i odgovara razdoblju od 1901. do 1910. godine). Razlika tih dviju vrijednosti jednaka je

$$14.47°\text{C} - 13.59°\text{C} = 0.88°\text{C}.$$

2.) $14.28\dot{3}\approx 14.28$**.** Vrijednosti temperature više od 14°C su redom: 14.12°C (odgovara razdoblju od 1981. do 1990.), 14.26°C (odgovara razdoblju od 1991. do 2000.) i već spomenuta temperatura 14.47°C. Tražena prosječna vrijednost jednaka je aritmetičkoj sredini ovih triju brojeva i iznosi

$$\overline{T}=\frac{14.12+14.26+14.47}{3}=\frac{42.85}{3}=14.28\dot{3}\ ^\circ\text{C}\approx 14.28^\circ\text{C}.$$

31.1.) ≈ 0.061. Znamo da 1 pud odgovara masi od 40 funti, odnosno masi od $40\cdot 0.4095=16.38$ kg. Zbog toga 1 kg odgovara masi od

$$\frac{1}{16.38}=\frac{100}{1638}=\frac{50}{819}\approx 0.061050061\approx 0.0611 \text{ puda.}$$

2.) ≈ 33.14 kn. Neka je l tražena cijena iskazana u kn. Tada je cijena litre soka od

naranče jednaka $l+5$ kn. Nadalje, u jednoj litri cijeđenoga voćnoga soka ima $\frac{4}{4+3}=\frac{4}{7}$ litara soka od naranče i njegova je cijena $\frac{4}{7}\cdot(l+5)$ kn. U istoj litri cijeđenoga voćnoga soka ima $\frac{3}{4+3}=\frac{3}{7}$ litara soka od limuna i njegova je cijena $\frac{3}{7}\cdot l$. Zbroj tih dvaju cijena jednak je

$$\frac{4}{7}\cdot(l+5)+\frac{3}{7}\cdot l=\frac{4}{7}\cdot l+\frac{20}{7}+\frac{3}{7}\cdot l=\frac{7}{7}\cdot l+\frac{20}{7}=l+\frac{20}{7}\text{ kn.}$$

Ta vrijednost mora biti jednaka 36 kn, pa iz jednadžbe

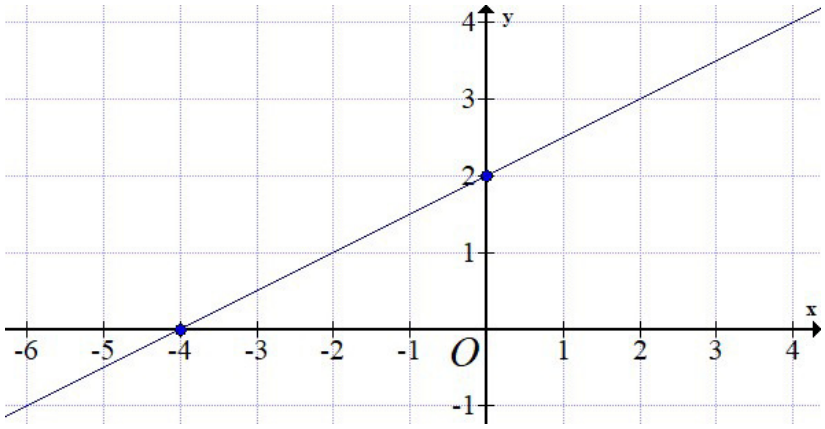
$$l+\frac{20}{7}=36$$

slijedi $l=36-\frac{20}{7}=\frac{232}{7}\approx 33.14$ kn.

32.1.) Vidjeti sliku 1. Zapišimo jednadžbu zadanoga pravca u segmentnom obliku:

$$x-2\cdot y=-4 \quad /:(-4)$$
$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1.$$

Odatle očitamo da pravac prolazi točkama (–4,0) i (0,2). Ucrtamo te točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa ih spojimo pravcem. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

2.) $y=9$. Svaki pravac usporedan s osi apscisa ima jednadžbu oblika $y=a$, pri čemu je $a\in\mathbb{R}$. Za određivanje njegove jednadžbe dovoljno je znati *drugu* koordinatu bilo koje njegove točke. U ovome je slučaju ta točka (5, 9), pa je $a=9$. Dakle, tražena jednadžba je $y=9$.

33.1.) $(x-6)^2+(y+1)^2=89$ **ili** $x^2+y^2-12\cdot x+2\cdot y-52=0.$ Podsjetimo da koncentrične kružnice imaju isto središte (a različite polumjere). Zbog toga zadanu jednadžbu kružnice najprije zapišimo u kanonskom obliku:

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2-12\cdot x+2\cdot y+23=0,\\
&(x-6)^2-36+(y+1)^2-1+23=0,\\
&(x-6)^2+(y+1)^2-14=0,\\
&(x-6)^2+(y+1)^2=14.
\end{aligned}$$

Odatle očitamo koordinate središta kružnice: $S=(6,-1)$. Udaljenost točaka A i S jednaka je polumjeru tražene kružnice, pa slijedi:

$$r=d(A,S)=\sqrt{(-2-6)^2+(4-(-1))^2}=\sqrt{(-8)^2+5^2}=\sqrt{64+25}=\sqrt{89}.$$

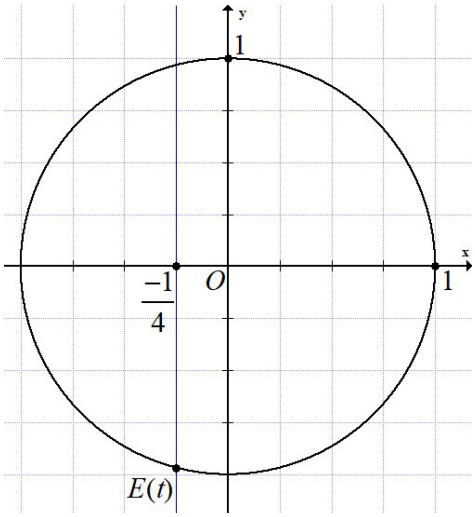
Tako zaključujemo da je tražena jednadžba kružnice

$$(x-6)^2+(y+1)^2=89$$

ili u razvijenu obliku

$$\begin{aligned}
&x^2-12\cdot x+36+y^2+2\cdot y+1-89=0,\\
&x^2+y^2-12\cdot x+2\cdot y-52=0.
\end{aligned}$$

2.) Vidjeti sliku 2. Prisjetimo se da pri namatanju brojevnoga pravca na kružnicu dobivamo točke oblika $E(t)=(\cos t,\sin t)$. Zbog toga povucimo pravac $x=\frac{-1}{4}$ i odredimo njegovo sjecište s kružnicom u 3. kvadrantu (jer je, prema zahtjevu zadatka, $\sin t<0$). Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

34.1.) ≈ 2.86. Promotrimo pravokutan trokut kojemu je duljina jedne katete jednaka visini koju dosežu ljestve, duljina hipotenuze jednaka duljini kraka ljestava, a kut između uočene katete i hipotenuze jednak polovici kuta kojega zatvaraju kraci ljestava. Taj je trokut zapravo polovica jednakokračnoga trokuta kojega određuju kraci ljestava i kut između njih. Tako odmah dobivamo:

$$h = b \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 3 \cdot \cos\left(\frac{35^\circ}{2}\right) \approx 2.8611508522 \approx 2.86 \text{ m}.$$

2.) ≈ 8.61 cm. Neka je R polumjer zadanom trokutu opisane kružnice (iskazan u cm). Najprije podijelimo mjeru od 180° u omjeru $2:5:8$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} k &= \frac{180^\circ}{2+5+8} = \frac{180^\circ}{15} = 12^\circ, \\ \alpha &= 2 \cdot 12^\circ = 24^\circ, \\ \beta &= 5 \cdot 12^\circ = 60^\circ \\ \gamma &= 8 \cdot 12^\circ = 96^\circ. \end{aligned}$$

Tako su duljine stranica trokuta jednake:

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot R \cdot \sin 24^\circ, \\ b &= 2 \cdot R \cdot \sin 60^\circ, \\ c &= a = 2 \cdot R \cdot \sin 96^\circ, \end{aligned}$$

pa je opseg toga trokuta jednak:

$$\begin{aligned} O = a + b + c &= 2 \cdot R \cdot \sin 24^\circ + 2 \cdot R \cdot \sin 60^\circ + 2 \cdot R \cdot \sin 96^\circ = \\ &= 2 \cdot R \cdot (\sin 24^\circ + \sin 60^\circ + \sin 96^\circ). \end{aligned}$$

Ta vrijednost mora biti jednaka 48 cm, pa iz jednadžbe

$$2 \cdot R \cdot (\sin 24^\circ + \sin 60^\circ + \sin 96^\circ) = 48$$

slijedi

$$2 \cdot R = \frac{48}{\sin 24^\circ + \sin 60^\circ + \sin 96^\circ}.$$

Najkraća stranica trokuta nalazi se nasuprot kuta najmanje mjere. U ovome je slučaju riječ o stranici a (nasuprot kuta čija je mjera 24°), pa je njezina duljina jednaka:

$$a = 2 \cdot R \cdot \sin 24^\circ = \frac{48 \cdot \sin 24^\circ}{\sin 24^\circ + \sin 60^\circ + \sin 96^\circ} \approx 8.6109015744 \approx 8.61 \text{ cm}.$$

35.1.) ≈ 42.46618785 m. Duljina puta kojega prijeđe Iva jednaka je 97.5 + 85 = 182.5 m. Duljinu puta kojega prijeđe Maja odredimo koristeći kosinusov poučak:

$$\begin{aligned} d_M &= \sqrt{97.5^2 + 85^2 - 2 \cdot 97.5 \cdot 85 \cdot \cos 100^\circ} = \\ &= \sqrt{9506.25 + 7225 - 16575 \cdot \cos 100^\circ} = \\ &= \sqrt{16731.25 - 16575 \cdot \cos 100^\circ} \approx 140.03381215 \text{ m}. \end{aligned}$$

Dakle, Majin je put kraći za približno $182.5 - 140.03381215 = 42.46618785$ m.

2.) ≈ 17.09867919 m. Neka su d i h redom udaljenost promatrača od zgrade i visina zgrade (obje iskazane u metrima). Uočimo pravokutan trokut kojemu su duljine kateta d i $h - 1.6$, a mjera kuta nasuprot potonjoj kateti 38°. Iz toga je trokuta:

$$d = (h - 1.6) \cdot \text{ctg } 38^\circ.$$

Sad uočimo pravokutan trokut kojemu su duljine kateta d i $(h - 1.6) + 3 = h - 1.6 + 3 = h + 1.4$, a mjera kuta nasuprot potonjoj kateti 43°. Iz toga je trokuta:

$$d = (h + 1.4) \cdot \text{ctg } 43^\circ.$$

Lijeve strane dviju dobivenih jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i njihove desne strane. Zbog toga slijedi:

$$\begin{aligned} &(h - 1.6) \cdot \text{ctg } 38^\circ = (h + 1.4) \cdot \text{ctg } 43^\circ, \\ &h \cdot \text{ctg } 38^\circ - 1.6 \cdot \text{ctg } 38^\circ = h \cdot \text{ctg } 43^\circ + 1.4 \cdot \text{ctg } 43^\circ, \\ &h \cdot \text{ctg } 38^\circ - h \cdot \text{ctg } 43^\circ = 1.4 \cdot \text{ctg } 43^\circ + 1.6 \cdot \text{ctg } 38^\circ \\ &h \cdot (\text{ctg } 38^\circ - \text{ctg } 43^\circ) = 1.4 \cdot \text{ctg } 43^\circ + 1.6 \cdot \text{ctg } 38^\circ, \\ &h = \frac{1.4 \cdot \text{ctg } 43^\circ + 1.6 \cdot \text{ctg } 38^\circ}{\text{ctg } 38^\circ - \text{ctg } 43^\circ} \approx 17.09867919 \text{ m}. \end{aligned}$$

36.1.) ≈ 110 **otkucaja u minuti.** Tražena je vrijednost jednaka $P(3)$, odnosno

$$P(3) = 145 \cdot 2.72^{-0.092 \cdot 3} = 145 \cdot 2.72^{-0.276} \approx 110.008687886 \approx 110 \text{ otkucaja u minuti.}$$

2.) **–2.** Povucimo pravac $x = 3$. On siječe zadani graf u točki (3,–2). Sad tom točkom povucimo pravac $y = -2$. On siječe zadani graf u spomenutoj točki (3,–2) i u točki (–2,–2). To znači da je $f(-2) = f(3) = -2$, pa zaključujemo da je $a = -2$.

37.1.) $33\cdot x^2$. Primjenom osnovnih pravila za deriviranje i tablice derivacija elementarnih funkcija dobivamo:

$$f'(x)=11\cdot\left(x^3-\sqrt{5}\right)'=11\cdot\left(3\cdot x^{3-1}-0\right)=11\cdot 3\cdot x^2=33\cdot x^2.$$

2.) $y=-x+4$ ili $x+y-4=0$ ili $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$. Odredimo najprije drugu koordinatu točke S. Ona pripada zadanoj krivulji, pa njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje. Tako dobivamo:

$$y=\frac{4}{2}=2.$$

Dakle, $S=(2,2)$.

Koeficijent smjera tangente povučene na zadanu krivulju u S jednak je vrijednosti prve derivacije funkcije $f(x)=\frac{4}{x}=4\cdot x^{-1}$ za $x=2$. Odmah imamo:

$$f'(2)=\left(\left(4\cdot x^{-1}\right)'\right)_{x=2}=\left(4\cdot\left(x^{-1}\right)'\right)_{x=2}=\left(4\cdot(-1)\cdot x^{-1-1}\right)_{x=2}=$$
$$=\left((-4)\cdot x^{-2}\right)_{x=2}=(-4)\cdot 2^{-2}=(-4)\cdot\frac{1}{2^2}=(-4)\cdot\frac{1}{4}=-1.$$

Prema tome, jednadžba tangente (u svim trima oblicima) glasi:

$$\begin{aligned}
&y=(-1)\cdot(x-2)+2,\\
&y=-x+2+2,\\
&y=-x+4\Leftrightarrow\\
&x+y-4=0\Leftrightarrow\\
&\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1.
\end{aligned}$$

38.1.) **56.** Prema pretpostavci, niz je strogo rastući, što znači da vrijede nejednakosti

$$x+2<14<6\cdot x-2.$$

Iz nejednakosti $x+2<14$ odmah slijedi $x<12$.

Iz nejednakosti $6\cdot x-2>14$ slijedi $6\cdot x>16$, odnosno $x>\frac{8}{3}$.

Zbog tranzitivnosti relacije $<$ nije potrebno rješavati nejednadžbu $x+2<6\cdot x-2$.

Tako zaključujemo da mora vrijediti relacija $x \in \left\langle \frac{8}{3}, 12 \right\rangle$.

Prema pretpostavci, zadani brojevi u istom poretku tvore tri uzastopna člana istoga geometrijskoga niza. To znači da mora vrijediti jednakost:

$$(x+2)\cdot(6\cdot x-2)=14^2.$$

Tražimo rješenje te jednadžbe koje pripada skupu $\left\langle \frac{8}{3}, 12 \right\rangle$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&6\cdot x^2+12\cdot x-2\cdot x-4-196=0,\\
&6\cdot x^2+10\cdot x-200=0, \quad /:2\\
&3\cdot x^2+5\cdot x-100=0,\\
&x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-100)}}{2\cdot 3}=\frac{-5\pm\sqrt{25-(-1200)}}{6}=\\
&\quad=\frac{-5\pm\sqrt{1225}}{6}=\frac{-5\pm 35}{6},\\
&x_1=\frac{-5+35}{6}=\frac{30}{6}=5,\ x_2=\frac{-5-35}{6}=\frac{-40}{6}=\frac{-20}{3}.
\end{aligned}$$

Rješenje $x_2=\frac{-20}{3}$ ne pripada skupu $\left\langle \frac{8}{3}, 12 \right\rangle$, pa ga odbacujemo. Zbog toga preostaje $x=5$.

Dakle, članovi niza su $5+2$, 14 i $6\cdot 5-2$, odnosno 7, 14 i 28. Količnik niza jednak je $q=\frac{14}{7}=\frac{28}{14}=2$, pa je traženi član niza jednak $28\cdot 2=56$.

2.) $\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{5\cdot\pi}{18}+k\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}\right\}\right)\cup\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{-\pi}{6}+k\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}\right\}\right)$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&2\cdot\cos\left(3\cdot x-\frac{\pi}{6}\right)=-1, \quad /:2\\
&\cos\left(3\cdot x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-1}{2},\\
&\begin{cases}3\cdot x-\frac{\pi}{6}=\frac{2\cdot\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi,\\ 3\cdot x-\frac{\pi}{6}=\frac{-2\cdot\pi}{3}+2\cdot l\cdot\pi,\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3\cdot x=\dfrac{2\cdot\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi, \\ 3\cdot x=\dfrac{-2\cdot\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}+2\cdot l\cdot\pi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\cdot x=\dfrac{5\cdot\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi, \quad /:3 \\ 3\cdot x=\dfrac{-\pi}{2}+2\cdot l\cdot\pi, \quad /:3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{5\cdot\pi}{18}+k\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\dfrac{-\pi}{6}+l\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\pi,\ l\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dakle, traženi je skup

$$S=\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{5\cdot\pi}{18}+k\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}\right\}\right)\cup\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{-\pi}{6}+k\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}\right\}\right).$$

39.1.) **16.** Primijetimo da vrijedi jednakost:

$$(x-10)\cdot(x-6)+3=x^2-10\cdot x-6\cdot x+60+3=x^2-16\cdot x+63.$$

Riješimo jednadžbu $x^2-16\cdot x+63=0$. To možemo učiniti i napamet koristeći Viète ove formule: tražimo dva broja čiji je zbroj jednak 16, a umnožak 63. Lako zaključujemo da su $x_1=7$ i $x_2=9$. Prema osnovnom poučku algebre vrijedi:

$$x^2-16\cdot x+63=(x-7)\cdot(x-9).$$

Međutim, prema zahtjevu zadatka, mora vrijediti jednakost:

$$x^2-16\cdot x+63=(x+b)\cdot(x-c).$$

Lijeve strane dvaju posljednjih izraza su jednake, pa takve moraju biti i njihove desne strane:

$$(x-7)\cdot(x-9)=(x+b)\cdot(x-c).$$

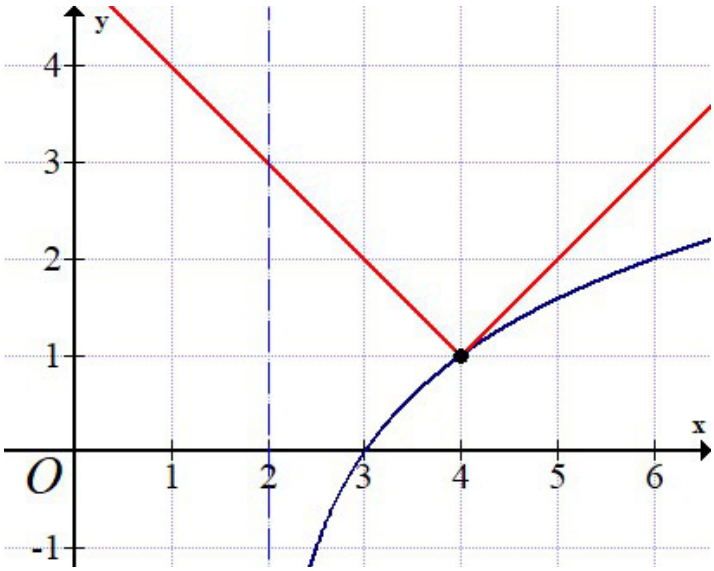
Vidimo da imamo dvije mogućnosti za vrijednost broja c : $c_1=7$ i $c_2=9$. Zbroj tih dviju vrijednosti jednak je $c_1+c_2=7+9=16$. (Primijetite da je analogan zbroj mogućih vrijednosti broja b jednak –16.)

2.) Jedno. Nacrtajmo grafove funkcija $f_1(x)=\log_2(x-2)$ i $f_2(x)=|x-4|+1$.

Prvi graf dobijemo tako da graf osnovne logaritamske funkcije $f_3(x) = \log_2 x$ translatiramo (u smjeru osi apscisa) za 2 jedinične duljine udesno.

Drugi graf dobijemo tako da graf osnovne funkcije apsolutne vrijednosti $f_4(x) = |x|$ najprije translatiramo (u smjeru osi apscisa) za 4 jedinične duljine udesno, pa potom dobiveni graf translatiramo (u smjeru osi ordinata) za jednu jediničnu duljinu prema gore.

Na opisani način dobivamo sliku 3. Plavom podebljanom crtom nacrtan je prvi graf, plavom („običnom“) crtom njegova uspravna asimptota $x = 2$, a crvenom podebljanom crtom drugi graf.



Slika 3.

Vidimo da se dobiveni grafovi sijeku u točno jednoj točki. Tu točku vrlo lako možemo „očitati“: to je točka (4, 1). Dakle, polazna jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = 4$.

40.≈ 39.98%. Neka je $d := |\overline{AC}|$ promjer kružnoga presjeka debla. Prema konstrukciji točaka E i F vrijede jednakosti:

$$|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FC}| = \frac{d}{3}.$$

Ako iz točke E podignemo okomicu i presiječemo kružnicu u točki B, onda je, prema Talesovu poučku, trokut ACB pravokutan s pravim kutom kod vrha B (jer je riječ o obodnom kutu nad promjerom kružnice). Duljinu $|\overline{EB}|$ - koja je ujedno i duljina visine na hipotenuzu $\overline{AC}$ - možemo odrediti koristeći Euklidov teorem za

pravokutan trokut:

$$\left|\overline{EB}\right| = \sqrt{\left|\overline{AE}\right| \cdot \left|\overline{EC}\right|} = \sqrt{\left|\overline{AE}\right| \cdot \left(\left|\overline{EF}\right| + \left|\overline{FC}\right|\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{d}{3} \cdot \left(\frac{d}{3} + \frac{d}{3}\right)} = \sqrt{\frac{d}{3} \cdot \frac{2 \cdot d}{3}} = \sqrt{\left(\frac{d}{3}\right)^2 \cdot 2} = \frac{d}{3} \cdot \sqrt{2}.$$

Sada možemo izračunati površinu trokuta ACB i polukruga određenoga polukružnicom kojoj je promjer $\overline{AC}$ i kojoj pripada točka B:

$$P_{\Delta ACB} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AC}\right| \cdot \left|\overline{EB}\right| = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \frac{d}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot d^2,$$

$$P_{\widehat{ACB}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{\pi}{8} \cdot d^2.$$

Jednake površine dobijemo promatrajući trokut ACD i polukrug određen polukružnicom kojoj je promjer $\overline{AC}$ i kojoj pripada točka D. Zbog toga je traženi postotak jednak razlici broja 1 i količnika površine trokuta i površine polukruga:

$$p = 1 - \frac{P_{\Delta ACB}}{P_{\widehat{ACB}}} = 1 - \frac{\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot d^2}{\frac{\pi}{8} \cdot d^2} = 1 - \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \pi} \approx 0.39978912 \approx 39.98\%.$$

Pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač