TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U RUJNU 2013. – VIŠA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **B.** Primijetimo da vrijedi jednakost

$$\left[-\frac{11}{4}, 3\right\rangle = \left[-2\frac{3}{4}, 3\right\rangle.$$

Stoga zadanom skupu pripadaju svi cijeli brojevi jednaki ili veći od $-2\frac{3}{4}$, a strogo manji od 3. Budući da $-2\frac{3}{4}$ nije cijeli broj, zadanom skupu zapravo pripadaju svi brojevi strogo veći od $-2\frac{3}{4}$ i strogo manji od 3. Ti cijeli brojevi su očito –2, –1, 0, 1 i 2. Ima ih ukupno 5.

2. **B.** Podsjetimo da dijeljenje dvaju realnih brojeva možemo zapisati i pomoću razlomačke crte. Točnije, prema definiciji razlomačke crte vrijedi jednakost

$$A : B = \frac{A}{B}.$$

Stoga dobivamo:

$$\left[(A+B) : C\right] \cdot D = \frac{(A+B)}{C} \cdot D = \frac{(A+B) \cdot D}{C}$$

3. **D.** Koristimo jednakosti:

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g},$$
$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}.$$

Podijelimo li prvu jednakost s 1000, dobit ćemo:

$$1 \text{ g} = \frac{1}{1000} \text{kg} = \frac{1}{10^3} \text{kg} = 10^{-3} \text{ kg}.$$

Kubiramo li drugu jednakost, dobit ćemo:

$$1 \text{ m}^3 = (100 \text{ cm})^3 = 100^3 \text{ cm}^3 = (10^2)^3 \text{ cm}^3 = 10^{2 \cdot 3} \text{ cm}^3 = 10^6 \text{ cm}^3.$$

Odatle dijeljenjem s 10^6 dobivamo:

$$1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{10^6} \text{m}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Tako konačno imamo:

$$1.8 \text{ g/cm}^3 = 1.8 \cdot \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} = 1.8 \cdot 10^{-3-(-6)} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.8 \cdot 10^{-3+6} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.8 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U RUJNU 2013. – VIŠA RAZINA

4. **C.** Neka je a duljina kraće, a b duljina dulje dužine. Iz podatka da su te duljine u omjeru 2 : 5 slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj k takav da istodobno vrijede jednakosti

$$\begin{cases} a = 2 \cdot k \\ b = 5 \cdot k \end{cases}$$

Stoga je tražena razlika duljina jednaka

$$\Delta d = b - a = 5 \cdot k - 2 \cdot k = 3 \cdot k.$$

Skratimo li kraću dužinu za 1.6 cm, njezina duljina bit će jednaka

$$a' = a - 1.6 = 2 \cdot k - 1.6 \text{ cm}.$$

Analogno, skratimo li dulju dužinu za 1.6 cm, njezina duljina bit će jednaka

$$b' = b - 1.6 = 5 \cdot k - 1.6 \text{ cm}.$$

Iz podatka da vrijedi jednakost $a' : b' = 2 : 7$ slijedi:

$$\begin{aligned}
&a' : b' = 2 : 7, \\
&(2 \cdot k - 1.6) : (5 \cdot k - 1.6) = 2 : 7, \\
&(2 \cdot k - 1.6) \cdot 7 = (5 \cdot k - 1.6) \cdot 2, \\
&14 \cdot k - 11.2 = 10 \cdot k - 3.2 \\
&14 \cdot k - 10 \cdot k = -3.2 + 11.2 \\
&4 \cdot k = 8 \quad / \cdot \frac{3}{4} \\
&3 \cdot k = 6
\end{aligned}$$

Dakle, $\Delta d = 3 \cdot k = 6$ cm.

5. **D.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 3, \\
&\frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 3, \\
&\frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 3, \quad / \cdot 2 \\
&n^2 - n = n^2 - 6, \\
&-n = -6
\end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s (–1) dobivamo $n = 6$. Taj je broj jedino rješenje polazne jednadžbe.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U RUJNU 2013. – VIŠA RAZINA

6. **A.** Jednadžba $2 \cdot x - 3 = 0$ ima jedinstveno rješenje $x = \frac{3}{2}$, a jednadžba $3 \cdot x + 5 = 0$ ima jedinstveno rješenje $x = -\frac{5}{3}$. To znači da vrijede jednakosti

$$|2 \cdot x - 3| = \begin{cases} 2 \cdot x - 3, \text{ za } x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2 \cdot x, \text{ za } x < \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{i} \quad |3 \cdot x + 5| = \begin{cases} 3 \cdot x + 5, \text{ za } x \geq -\frac{5}{3} \\ -3 \cdot x - 5, \text{ za } x < -\frac{5}{3} \end{cases}.$$

Stoga imamo:

$$|2 \cdot x - 3| - |3 \cdot x + 5| = \begin{cases} 2 \cdot x - 3 - (3 \cdot x + 5), \text{ za } x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2 \cdot x - (3 \cdot x + 5), \text{ za } -\frac{5}{3} \leq x < \frac{3}{2} \\ 3 - 2 \cdot x - (-3 \cdot x - 5), \text{ za } x < -\frac{5}{3} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2 \cdot x - 3 - 3 \cdot x - 5, \text{ za } x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2 \cdot x - 3 \cdot x - 5, \text{ za } -\frac{5}{3} \leq x < \frac{3}{2} \\ 3 - 2 \cdot x + 5 + 3 \cdot x, \text{ za } x < -\frac{5}{3} \end{cases} = \begin{cases} -x - 8, \text{ za } x \geq \frac{3}{2} \\ -5 \cdot x - 2, \text{ za } -\frac{5}{3} \leq x < \frac{3}{2} \\ x + 8, \text{ za } x < -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Odredimo x takav da je $|2 \cdot x - 3| - |3 \cdot x + 5| = 0$.

Iz $-x - 8 = 0$ slijedi $x = -8$, ali taj broj ne zadovoljava uvjet $x \geq \frac{3}{2}$.

Iz $-5 \cdot x - 2 = 0$ slijedi $x = -\frac{2}{5}$. Taj broj zadovoljava uvjet $-\frac{5}{3} \leq x < \frac{3}{2}$ i on jest rješenje polazne jednadžbe.

Iz $x + 8 = 0$ slijedi $x = -8$. Taj broj zadovoljava uvjet $x < -\frac{5}{3}$ i on jest rješenje polazne jednadžbe.

Dakle, polazna jednadžba ima točno dva rješenja: $x_1 = -8$ i $x_2 = -\frac{2}{5}$. Njihov je umnožak jednak

$$x_1 \cdot x_2 = (-8) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{16}{5}.$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U RUJNU 2013. – VIŠA RAZINA

7. **A.** Koristeći pravila za logaritmiranje i antilogaritmiranje imamo redom:

$$\log_a b + \log_a x = 2,$$
$$\log_a (b \cdot x) = 2,$$
$$b \cdot x = a^2.$$

Odatle dijeljenjem s b dobivamo

$$x = \frac{a^2}{b}.$$

8. **D.** Prisjetimo se da su svi brojevi oblika $k \cdot \pi$, pri čemu je $k \in \mathbf{Z}$, periodi funkcija tangens i kotangens. To konkretno znači da vrijede jednakosti:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x - 15 \cdot \pi) = \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{ctg}(x - 18 \cdot \pi) = \operatorname{ctg} x. \end{cases}$$

Stoga je zadani izraz jednak

$$\frac{\operatorname{tg}(x - 15 \cdot \pi) + 5 \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x + 2 \cdot \operatorname{ctg}(x - 18 \cdot \pi)} = \frac{\operatorname{tg} x + 5 \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x + 2 \cdot \operatorname{ctg} x} = \frac{6 \cdot \operatorname{tg} x}{3 \cdot \operatorname{ctg} x} = 2 \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x.$$

9. **A.** Iz jednadžbe parabole $y^2 = 12 \cdot x$ očitamo

$$2 \cdot p = 12.$$

Odatle dijeljenjem s (–4) dobivamo:

$$-\frac{p}{2} = -3.$$

Dakle, ravnalica parabole je pravac $r \ldots\ x = -3$. Udaljenost točke T od pravca r jednaka je

$$d(T, r) = |-3 - 27| = |-30| = 30 \text{ jediničnih duljina.}$$

Napomena: Nije teško pokazati da je udaljenost točke $T = (a, b)$ od pravca $x = m$ jednaka $d = |m - a|$, te da je udaljenost iste točke od pravca $y = m$ jednaka $d' = |m - b|$.

10. **B**. Funkcija g definirana je za sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je $f(x) \neq 0$, a takvi x ne moraju zadovoljavati nejednadžbu $f(x) \geq 0$. (Moguće je da vrijedi i nejednakost $f(x) < 0$.)
Funkcija k je kompozicija eksponencijalne funkcije čija je domena cijeli skup $\mathbf{R}$ i funkcije f čija je domena također skup $\mathbf{R}$ (prema pretpostavci), pa je domena funkcije k cijeli skup $\mathbf{R}$. No, skup $\mathbf{R}$ se ne mora podudarati sa skupom svih rješenja nejednadžbe $f(x) \geq 0$.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U RUJNU 2013. – VIŠA RAZINA

Funkcija l definirana je za sve realne brojeve x takve da je logaritmand $f(x)$ strogo veći od nule, tj. za sve realne brojeve x koji su rješenja nejednadžbe $f(x) > 0$. Skup svih takvih realnih brojeva je podskup skupa svih rješenja nejednadžbe $f(x) \geq 0$, odnosno ta dva skupa ne moraju nužno biti jednaka.
Funkcija h definirana je za sve realne brojeve x za koje postoji drugi korijen iz $f(x)$. Drugi korijen je funkcija čija je domena skup $[0, +\infty\rangle$. To znači da se domena funkcije h dobije rješavanjem nejednadžbe $f(x) \geq 0$. Zbog toga je ta funkcija rješenje ovoga zadatka.

11. B. Riješimo zasebno svaku pojedinu jednadžbu.

A. $\frac{2-x}{3}+\frac{1}{2}=2\cdot x \quad /\cdot 6$

$$2\cdot(2-x)+3=12\cdot x,$$
$$4-2\cdot x+3=12\cdot x,$$
$$-2\cdot x-12\cdot x=-3-4,$$
$$-14\cdot x=-7, \quad /:(-14)$$
$$x=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}.$$

B. $5^{x-3}=0.2,$

$$5^{x-3}=\frac{2}{10},$$
$$5^{x-3}=\frac{1}{5},$$
$$5^{x-3}=5^{-1}.$$
$$x-3=-1,$$
$$x=-1+3,$$
$$x=2.$$

C. $\log_2 x=-3,$

$$x=2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}.$$

D. $(x-5)^2=0,$

$$x-5=0,$$
$$x=5.$$

Od četiriju dobivenih rješenja jedino $x = 2$ pripada skupu $\langle 1, 3\rangle$. Dakle, jednadžba **B** ima rješenje u skupu $\langle 1, 3\rangle$.

12. C. Nakon 12 godina vrijednost automobila iznosit će ukupno $\frac{10}{100}\cdot 18\,000 = 1\,800$ €. Budući da se vrijednost automobila svake godine smanjivala za isti iznos, godišnje smanjenje vrijednosti automobila iznosi

$$d = \frac{18000 - 1800}{12} = \frac{16200}{12} = 1\,350 \text{ €}.$$

Godišnje vrijednosti automobila tvore aritmetički niz s početnim članom a_0 = 18 000 € i razlikom d = –1 350 €. 40% početne vrijednosti automopbila iznosi

$$\frac{40}{100} \cdot 18000 = 7200 \text{ €}.$$

Tražimo prirodan broj n takav da je n – ti član uočenoga aritmetičkoga niza jednak 7 200. Zbog „nultoga“ člana, tj. člana a_0, uobičajenu formulu za n–ti član aritmetičkoga niza preinačimo u sljedeću formulu:

$$a_n = 18\,000 + n \cdot (-1\,350) = -1\,350 \cdot n + 18\,000.$$

Imamo:

$$-1\,350 \cdot n + 18\,000 = 7\,200,$$
$$-1\,350 \cdot n = 7\,200 - 18\,000,$$
$$-1\,350 \cdot n = -10\,800.$$

Odatle dijeljenjem s (–1 350) slijedi n = 8. Dakle, prema procjeni, vrijednost automobila će iznositi 40% njegove početne vrijednosti na kraju osme godine.

13. C. Računamo redom:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + (-\vec{i} - 7 \cdot \vec{j}) = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} - \vec{i} - 7 \cdot \vec{j} = (2-1) \cdot \vec{i} + (-3-7) \cdot \vec{j} = \vec{i} - 10 \cdot \vec{j},$$
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} - (-\vec{i} - 7 \cdot \vec{j}) = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + \vec{i} + 7 \cdot \vec{j} = (2+1) \cdot \vec{i} + (-3+7) \cdot \vec{j} = 3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j},$$
$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 3 + (-10) \cdot 4 = 3 - 40 = -37,$$
$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{1^2 + (-10)^2} = \sqrt{1 + 100} = \sqrt{101},$$
$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Tako je traženi kut jednak

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{\left|\vec{c}\right| \cdot \left|\vec{d}\right|}\right) = \arccos\left(-\frac{37}{\sqrt{101} \cdot 5}\right) = \arccos\left(-\frac{37}{\sqrt{101} \cdot 5} \cdot \frac{\sqrt{101}}{\sqrt{101}}\right) = \arccos\left(-\frac{37 \cdot \sqrt{101}}{5 \cdot 101}\right) =$$
$$= \arccos\left(-\frac{37}{505} \cdot \sqrt{101}\right) \approx 137.419509^\circ \approx 137^\circ 25' 10''$$

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U RUJNU 2013. – VIŠA RAZINA

14. C. Površina trokuta ABC jednaka je

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot \sin 23^\circ = 300 \cdot \sin 23^\circ \text{ kv jed.}$$

Duljina stranice $b = AC$, prema kosinusovu poučku, jednaka je:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \angle ABC} = \sqrt{20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos 23^\circ} = \\ &= \sqrt{400 + 900 - 1200 \cdot \cos 23^\circ} = \sqrt{1300 - 1200 \cdot \cos 23^\circ} = \sqrt{100 \cdot (13 - 12 \cdot \cos 23^\circ)} = \\ &= \sqrt{100} \cdot \sqrt{13 - 12 \cdot \cos 23^\circ} = 10 \cdot \sqrt{13 - 12 \cdot \cos 23^\circ} \end{aligned}$$

Stoga je duljina tražene visine jednaka

$$v_b = \frac{2 \cdot P}{b} = \frac{2 \cdot 300 \cdot \sin 23^\circ}{10 \cdot \sqrt{13 - 12 \cdot \cos 23^\circ}} = \frac{60 \cdot \sin 23^\circ}{\sqrt{13 - 12 \cdot \cos 23^\circ}} \approx 16.771559791 \text{ cm} \approx 16.77 \text{ cm}.$$

15. D. Primijetimo da je $K = \overline{a.b0} \cdot 10^{15}$ i $L = \overline{0.ba} \cdot 10^{15}$. Iz podatka $K + L = 9.49 \cdot 10^{15}$ slijedi da mora vrijediti jednakost

$$\overline{a.b0} + \overline{0.ba} = 9.49$$

Promatrajući znamenku na mjestu stotinki u gornjoj jednakosti zaključujemo da mora vrijediti jednakost $0 + a = 9$. Odatle je $a = 9$. Nadalje, promatrajući znamenku desetinki zaključujemo da mora vrijediti jednakost $b + b = 4$. Odatle slijedi $b = 2$. Konačno imamo: $a - b = 9 - 2 = 7$.

II. ZADATCI KRATKOGA ODGOVORA

16. $\frac{F \cdot r^2}{G \cdot M}$ **.** Odmah imamo:

$$\begin{aligned} F &= G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad / \cdot r^2 \\ F \cdot r^2 &= G \cdot m \cdot M \quad / : (G \cdot M). \\ m &= \frac{F \cdot r^2}{G \cdot M}. \end{aligned}$$

17. 300. Neka je m dnevna proizvodnja mlijeka iskazana u litrama. Primijetimo da vrijedi jednakost

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 75\% \ .$$

Iz podataka u zadatku slijedi da mljekaru dnevno preostane ukupno

$$100\% - (75\% + 24\%) = 100\% - 99\% = 1\%$$

dnevne proizvodnje mlijeka. Tih 1% mora iznositi 3 litre. Tako iz jednadžbe

$$\frac{1}{100} \cdot m = 3$$

množenjem sa 100 odmah dobivamo $m = 300$.

18. 1.) 18. U izraz za N uvrstimo $T = 5$, pa dobivamo:

$$N = 40 \cdot (1 - 10^{-0.052 \cdot 5}) = 40 \cdot (1 - 10^{-0.26}) \approx 18.018.$$

Dakle, nakon 5 sati uvježbavanja radnik može zgotoviti 18 proizvoda.

2.) 15. Tražimo najmanji prirodan broj T za koji je $N \geq 33$. (Radnik može zgotoviti i više od 33 proizvoda, ali nama je važno da zgotovi 33 proizvoda.) Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&N \geq 33 \\
&40 \cdot (1 - 10^{-0.052 \cdot T}) \geq 33, \quad / : 40 \\
&1 - 10^{-0.052 \cdot T} \geq \frac{33}{40}, \\
&-10^{-0.052 \cdot T} \geq \frac{33}{40} - 1, \\
&-10^{-0.052 \cdot T} \geq \frac{33 - 40}{40}, \\
&-10^{-0.052 \cdot T} \geq -\frac{7}{40}, \quad / : (-1) \\
&10^{-0.052 \cdot T} \leq \frac{7}{40} \quad /\log \\
&-0.052 \cdot T \leq \log \frac{7}{40} \quad / : (-0.052) \\
&T \geq \frac{-\log \frac{7}{40}}{0.052} = \frac{-(\log 7 - \log 40)}{0.052} = \frac{\log 40 - \log 7}{0.052} \cdot \frac{250}{250} = \frac{250}{13} \cdot (\log 40 - \log 7).
\end{aligned}$$

Približnim izračunom dobivamo $T \geq 14.5569606$. Najmanji prirodan broj T koji zadovoljava tu nejednakosti je $T = 15$. Dakle, radniku će trebati najmanje 15 sati uvježbavanja.

19. 1.) $x_1 = 6, x_2 = -1$. Primijetimo da mora vrijediti nejednakost $x \neq 0$. Množenjem polazne jednadžbe s x dobivamo:

$$x^2 - 6 = 5 \cdot x,$$
$$x^2 - 5 \cdot x - 6 = 0,$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{5\pm7}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{5+7}{2}=\frac{12}{2}=6,\\ x_2=\frac{5-7}{2}=-\frac{2}{2}=-1.\end{cases}$$

Oba dobivena rješenja su različita od nule, pa su ona ujedno i sva rješenja zadane jednadžbe.

2.) $x = -23$. Lijeva i desna strana zadane jednadžbe su strogo pozitivni realni brojevi, pa zadanu jednadžbu smijemo kvadrirati, a da pritom ne „izgubimo“ niti jedno njezino rješenje. Tako odmah dobivamo linearnu jednadžbu

$$2 - x = 25,$$

odnosno

$$-x = 25 - 2,$$
$$-x = 23,$$

a odatle dijeljenjem s (–1) slijedi $x = -23$. Taj je realan broj ujedno i jedino rješenje polazne jednadžbe.

20. 1.) $(a+b)\cdot(a-3\cdot b)$ **ili obratno.** Koristeći formule za kvadrat binoma i razliku kvadrata imamo redom:

$$a^2-2\cdot a\cdot b-3\cdot b^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2-4\cdot b^2=(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2)-(2\cdot b)^2=(a-b)^2-(2\cdot b)^2=$$
$$=\left[(a-b)+2\cdot b\right]\cdot\left[(a-b)-2\cdot b\right]=(a-b+2\cdot b)\cdot(a-b-2\cdot b)=(a+b)\cdot(a-3\cdot b).$$

2.) $\frac{y}{x}$. Koristimo formulu za razliku kubova:

$$x^3-y^3=(x-y)\cdot(x^2+x\cdot y+y^2).$$

Tako dobivamo:

$$\frac{x^3-y^3}{x^3+x^2\cdot y+x\cdot y^2}+\frac{2\cdot y^2-x\cdot y}{x\cdot y}=\frac{(x-y)\cdot(x^2+x\cdot y+y^2)}{x\cdot(x^2+x\cdot y+y^2)}+\frac{y\cdot(2\cdot y-x)}{x\cdot y}=\frac{x-y}{x}+\frac{2\cdot y-x}{x}=$$
$$=\frac{x-y+2\cdot y-x}{x}=\frac{y}{x}.$$

21. 1.) $-\frac{3}{4}$. Primijetimo da je zadana funkcija kvadratna funkcija oblika $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$. Ta funkcija ima ekstrem u točki $T=\left(-\frac{b}{2\cdot a},\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right)$. U našem je slučaju $c = 0$, pa funkcija f ima ekstrem u točki

$$T=\left(-\frac{b}{2\cdot a},-\frac{b^2}{4\cdot a}\right).$$

Taj će ekstrem biti maksimum ako i samo ako je $a < 0$. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2\cdot a}=2,\\ -\dfrac{b^2}{4\cdot a}=3,\end{cases}$$

Kvadriranjem prve jednadžbe dobivamo:

$$\frac{b^2}{4\cdot a^2}=4\,.$$

Pomnožimo tu jednakost s $(-a)$:

$$\frac{b^2}{4\cdot a^2}\cdot(-a)=4\cdot(-a),$$
$$-\frac{b^2}{4\cdot a}=-4\cdot a,$$

Uvrstimo li posljednju jednakost u drugu jednadžbu sustava, dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$-4\cdot a=3.$$

Odatle dijeljenjem s (-4) slijedi $a=-\dfrac{3}{4}$. Očito je $a < 0$, pa je dobivena vrijednost ujedno i rješenje podzadatka.

2.) $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$. Graf funkcije $f(x) = -6\cdot x^2 + x + 1$ je parabola oblika $\cap$. Ona se nalazi iznad ili na osi apscisa na segmentu određenom nultočkama funkcije f. Stoga najprije nađimo te nultočke:

$$f(x)=0$$
$$-6\cdot x^2+x+1=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-6)\cdot 1}}{2\cdot(-6)}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-12}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{-12}=\frac{-1\pm 5}{-12}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+5}{-12}=\dfrac{4}{-12}=-\dfrac{1}{3},\\ x_2=\dfrac{-1-5}{-12}=\dfrac{-6}{-12}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Dakle, $f(x) \geq 0$ ako i samo ako je $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Taj je segment ujedno i skup svih rješenja polazne nejednadžbe.

22. 1.) $4 \cdot \text{cis}\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) = 4 \cdot \left[\cos\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right)\right] = -2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i$**.** Primijetimo da je apsolutna vrijednost traženoga broja jednaka polumjeru nacrtane kružnice, tj.

$$|z| = r = 4.$$

Argument traženoga broja, tj. kut kojega spojnica točke pridružene zadanom broju i ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa, jednak je:

$$\varphi = 120^\circ = 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = = \frac{120^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{2}{3} \cdot \pi .$$

Tako je trigonometrijski oblik zadanoga broja jednak

$$z = r \cdot \text{cis}\varphi = 4 \cdot \text{cis}\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) = 4 \cdot \left[\cos\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right)\right].$$

Da bismo ovaj broj zapisali u standardnom (algebarskom) obliku, primijenimo jednakosti

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) = -\frac{1}{2}, \\ \sin\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Stoga je algebarski oblik zadanoga kompleksnoga broja

$$z = 4 \cdot \left[\cos\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right)\right] = 4 \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right) + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i.$$

2.) $-4 + 5 \cdot i$. Prema definiciji imaginarne jedinice, vrijedi jednakost $i^2 = -1$. Tako redom imamo:

$$\begin{aligned} &i^{33} = i^{32+1} = i^{32} \cdot i^1 = (i^2)^{16} \cdot i = (-1)^{16} \cdot i = 1 \cdot i = i, \\ &i^{23} = i^{22+1} = i^{22} \cdot i^1 = (i^2)^{11} \cdot i = (-1)^{11} \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \\ &i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1, \\ &z = 3 \cdot i^{33} - 2 \cdot i^{23} + 4 \cdot i^{10} = 3 \cdot i - 2 \cdot (-i) + 4 \cdot (-1) = 3 \cdot i + 2 \cdot i - 4 = -4 + 5 \cdot i. \end{aligned}$$

23. 1.) ≈ 2.27. Drugi šiljasti kut zadanoga trokuta (pri vrhu K) jednak je 90° – 27° = 63°. Stoga se najkraća stranica zadanoga trokuta nalazi nasuprot najmanjemu kutu. Taj je kut očito kut pri vrhu

M i njegova je mjera 27°. Koristeći definiciju funkcije sinus odmah imamo:

$$\sin 27^\circ = \frac{|KL|}{|KM|} \Leftrightarrow |KL| = |KM| \cdot \sin 27^\circ = 5 \cdot \sin 27^\circ \approx 2.269952 \approx 2.27 \text{ cm}.$$

<u>Napomena</u>: Može se pokazati da je točna vrijednost duljine stranice *KL* jednaka $|KL| = \frac{5}{8} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{2} - \sqrt{10}\right)$ cm.

2.) 5. Tvrdimo da je $P_{ABT} = \frac{1}{8} \cdot P_{ABCD}$. Primijetimo da vrijede jednakosti:

$$\begin{cases} \angle ASD = \angle BSC, \\ \angle ASB = \angle DSC, \\ \angle ASD + \angle ASB = \angle BSC + \angle DSC = 180^\circ, \\ |AS| = |SC|, \\ |BS| = |BD|, \\ \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \text{ za svaki } \alpha \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

(Posljednju jednakost je lako provjeriti primjenom adicijskoga poučka za funkciju sinus.) Tako je:

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin \angle ASB,$$
$$P_{ASD} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |SD| \cdot \sin \angle ASD = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin(180^\circ - \angle ASB) = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin \angle ASB = P_{ABS},$$
$$P_{BSC} = \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |SC| \cdot \sin \angle BSC = \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |AS| \cdot \sin(180^\circ - \angle DSC) = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin(180^\circ - \angle ASB) = P_{ABS},$$
$$P_{DSC} = \frac{1}{2} \cdot |DS| \cdot |SC| \cdot \sin \angle DSC = \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |AS| \cdot \sin \angle ASB = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin \angle ASB = P_{ABS},$$
$$P_{ABCD} = P_{ABS} + P_{ASD} + P_{BSC} + P_{DSC} = P_{ABS} + P_{ABS} + P_{ABS} + P_{ABS} = 4 \cdot P_{ABS}.$$

Nadalje, trokutovi *ABS* i *ABT* imaju zajedničku visinu iz vrha *A* na stranice *BS*, odnosno *BT*. Stoga je omjer površina tih dvaju trokutova jednak omjeru duljina stranica *BS* i *BT*, a taj je jednak 2 : 1 jer je *T*, prema pretpostavci, polovište stranice *BS*. Dakle,

$$P_{ABS} : P_{ABT} = 2 : 1 \Leftrightarrow P_{ABS} = 2 \cdot P_{ABT}.$$

Kombinirajući posljednje dvije jednakosti dobivamo:

$$P_{ABCD} = 4 \cdot P_{ABS} = 4 \cdot 2 \cdot P_{ABT} = 8 \cdot P_{ABT} \Leftrightarrow P_{ABT} = \frac{1}{8} \cdot P_{ABCD},$$

što smo i željeli pokazati. Stoga je napokon

$$P_{ABT}=\frac{1}{8}\cdot P_{ABCD}=\frac{1}{8}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot v_{\overline{AB}}=\frac{1}{8}\cdot 5\cdot 8=5\,\text{cm}^2.$$

24. 1.) $\frac{32}{3}\cdot\pi$ **.** Prema formuli za obujam kugle polumjera r, traženi obujam jednak je

$$V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi=\frac{4}{3}\cdot 2^3\cdot\pi=\frac{4}{3}\cdot 8\cdot\pi=\frac{32}{3}\cdot\pi\ \text{cm}^3.$$

2.) $\sqrt[3]{96}=2\cdot\sqrt[3]{12}$ **.** Prema rezultatu podzadatka **1.)**, obujam 12 željeznih kuglica od kojih svaka ima polumjer 2 cm jednak je

$$V_1=12\cdot V=12\cdot\frac{32}{3}\cdot\pi=4\cdot 32\cdot\pi=128\cdot\pi\ \text{cm}^3.$$

Toliki je i obujam kugle koja se dobije taljenjem. Označimo li traženi polumjer s r_1, onda mora vrijediti jednakost

$$V_1=\frac{4}{3}\cdot r_1^3\cdot\pi\,.$$

Iz ove jednakosti izrazimo r_1:

$$\begin{aligned}V_1&=\frac{4}{3}\cdot r_1^3\cdot\pi \quad /\cdot\frac{3}{4\cdot\pi}\\ r_1^3&=\frac{3\cdot V_1}{4\cdot\pi}\quad /\sqrt[3]{\ }\\ r_1&=\sqrt[3]{\frac{3\cdot V_1}{4\cdot\pi}}.\end{aligned}$$

U ovu jednakost preostaje uvrstiti $V_1 = 128\cdot\pi$. Tako konačno dobijemo:

$$r_1=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 128\cdot\pi}{4\cdot\pi}}=\sqrt[3]{96}=\sqrt[3]{8\cdot 12}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{12}=2\cdot\sqrt[3]{12}\ \text{cm}.$$

25. 1.) 108. Zadani brojevi će biti tri uzastopna člana istoga geometrijskoga niza ako i samo ako je valjana jednakost

$$a^2 = 72\cdot 162.$$

Odatle dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$a^2 = 11\,664.$$

Njezino jedino strogo pozitivno rješenje je $a = 108$ i to je tražena vrijednost.

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U RUJNU 2013. – VIŠA RAZINA

2.) 38 038. Svi navedeni brojevi tvore aritmetički niz kojemu su prvi član i razlika jednaki 13, tj. $a_1 = d = 13$. Podijelimo li 1000 s 13, dobit ćemo količnik 76 i ostatak 12. Stoga imamo ukupno $n = 76$ takvih brojeva. Njihov je zbroj jednak

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]$$
$$S_{76} = \frac{76}{2} \cdot [2 \cdot 13 + (76-1) \cdot 13] = 38 \cdot [(2+76-1) \cdot 13] = 38 \cdot 77 \cdot 13 = 38038.$$

3.) $x \in \langle 0, 2\rangle$. Odredimo najprije količnik zadanoga geometrijskoga reda. U tu je svrhu dovoljno podijeliti drugi član reda prvim članom:

$$q = \frac{\frac{1}{2} \cdot x^2}{x} = \frac{1}{2} \cdot x .$$

Zadani red će imati konačan zbroj ako i samo ako vrijedi nejednakost $|q| < 1$. Tako dobivamo nejednadžbu s apsolutnim vrijednostima:

$$\left|\frac{1}{2} \cdot x\right| < 1 .$$

Nju riješimo standardno:

$$\left|\frac{1}{2} \cdot x\right| < 1,$$
$$\left|\frac{1}{2}\right| \cdot |x| < 1,$$
$$\frac{1}{2} \cdot |x| < 1, \quad / \cdot 2$$
$$|x| < 2.$$

Svi realni brojevi čija je apsolutna vrijednost strogo manja od 2 tvore otvoreni interval $\langle -2, 2\rangle$. Prema uvjetu zadatka, mi tražimo strogo pozitivne elemente toga skupa. Oni tvore otvoreni interval $\langle 0, 2\rangle$ i to je skup svih traženih vrijednosti x.

26. 320; 280. Neka je c tražena cijena cipela, a t tražena cijena torbe (obje iskazane u kunama). Prema prvom uvjetu zadatka je

$$c + t = 600.$$

Nakon sniženja od 30% cijena cipela iznosi:

$$c_1 = c - \frac{30}{100} \cdot c = c \cdot \left(1 - \frac{30}{100}\right) = c \cdot \left(\frac{100-30}{100}\right) = \frac{70}{100} \cdot c = \frac{7}{10} \cdot c \text{ kn.}$$

Nakon sniženja od 50%, cijena torbe iznosi:

$$t_1 = t - \frac{50}{100} \cdot t = t \cdot \left(1 - \frac{50}{100}\right) = t \cdot \left(\frac{100-50}{100}\right) = \frac{50}{100} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot t \text{ kn.}$$

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti jednakost

$$c_1 + t_1 = 364 \text{ kn.}$$

U ovu jednakost uvrstimo gornje izraze za c_1 i t_1:

$$\begin{aligned} &\frac{7}{10} \cdot c + \frac{1}{2} \cdot t = 364 \quad / \cdot 2 \\ &\frac{7}{5} \cdot c + t = 728. \end{aligned}$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} c + t = 600 \\ \frac{7}{5} \cdot c + t = 728 \end{cases}.$$

Oduzmimo prvu jednadžbu od druge, pa dobijemo:

$$\begin{aligned} &\frac{7}{5} \cdot c - c = 728 - 600, \\ &c \cdot \left(\frac{7}{5} - 1\right) = 128, \\ &c \cdot \left(\frac{7-5}{5}\right) = 128, \\ &\frac{2}{5} \cdot c = 128. \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s $\frac{2}{5}$ slijedi $c = 320$. Sada iz $c + t = 600$ slijedi

$$\begin{aligned} t &= 600 - c, \\ t &= 600 - 320 \\ t &= 280. \end{aligned}$$

Dakle, cijena cipela je 320 kn, a cijena torbe 280 kn.

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U RUJNU 2013. – VIŠA RAZINA

27. 1.) $\frac{4\cdot k+1}{6}\cdot\pi=\frac{\pi}{6}+\frac{2\cdot k\cdot\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}$. Koristimo tvrdnju:

$$\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{4\cdot k+1}{2}\cdot\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Tako redom imamo:

$$\begin{aligned}&f(x)=3,\\&2+\sin(3\cdot x)=3,\\&\sin(3\cdot x)=3-2,\\&\sin(3\cdot x)=1,\\&3\cdot x=\frac{4\cdot k+1}{2}\cdot\pi\quad /:3\\&x=\frac{4\cdot k+1}{6}\cdot\pi,\ k\in\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

2.) $3\cdot\cos(3\cdot x)$. Derivacija bilo koje konstantne funkcije jednaka je 0. Dakle,

$$(2)'=0.$$

Funkciju $\sin(3\cdot x)$ deriviramo prema pravilu za deriviranje složene funkcije. Pritom koristimo jednakosti:

$$(\sin x)'=\cos x,$$
$$(a\cdot x)'=a.$$

Dobivamo:

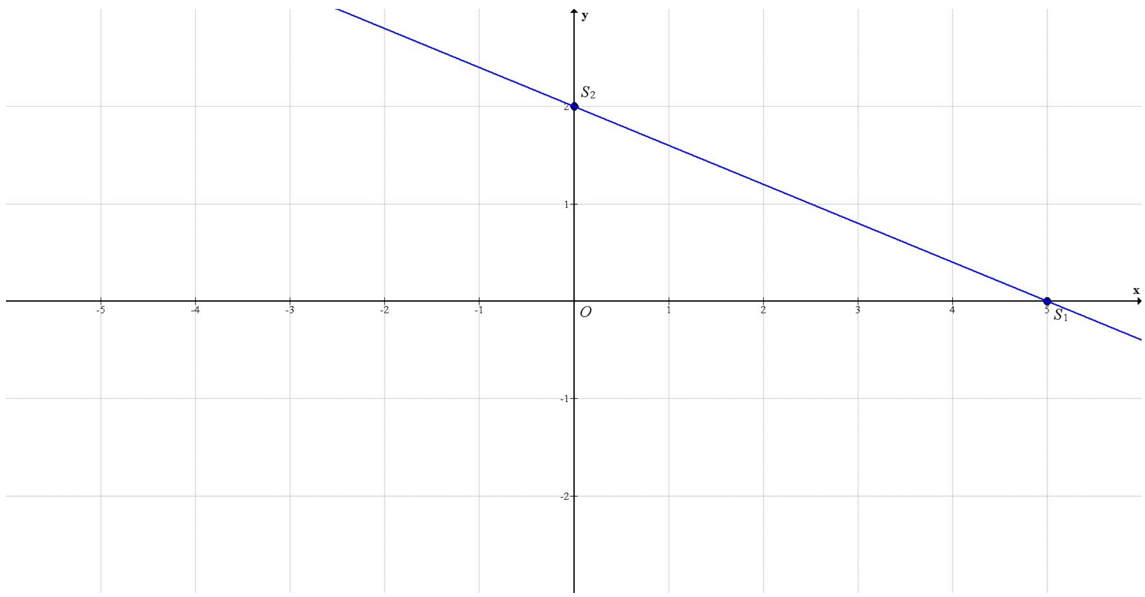
$$[\sin(3\cdot x)]'=\cos(3\cdot x)\cdot(3\cdot x)'=\cos(3\cdot x)\cdot 3=3\cdot\cos(3\cdot x).$$

Dakle,

$$f'(x)=0+3\cdot\cos(3\cdot x)=3\cdot\cos(3\cdot x).$$

28. 1.) Vidjeti Sliku 1. Jednadžba pravca zapisana je u segmentnom obliku. Iz nje očitamo da pravac siječe os apscisa u točki $S_1=(5,0)$, a os ordinata u točki $S_2=(0,2)$. Te dvije točke ucrtamo u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa ih spojimo pravcem. Dobivamo Sliku 1.

2.) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ **ili $3\cdot x^2-4\cdot y^2=12$.** Zadana krivulja je hiperbola čija je jednadžba oblika $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Iz slike vidimo da krivulja prolazi točkom $S_1=(2,0)$. Uvrstimo li u jednadžbu hiperbole $x=2$, $y=0$, dobit ćemo:



Slika 1.

$$\frac{2^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1,$$
$$\frac{4}{a^2}=1.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s a^2, odmah dobivamo $a^2 = 4$.

Nadalje, hiperbola prolazi i točkom $T = (4, 3)$. Stoga u jednadžbu hiperbole uvrstimo $x = 4$, $y = 3$ i $a^2 = 4$. Dobivamo:

$$\frac{4^2}{4}-\frac{3^2}{b^2}=1,$$
$$\frac{16}{4}-\frac{9}{b^2}=1,$$
$$4-\frac{9}{b^2}=1,$$
$$-\frac{9}{b^2}=1-4,$$
$$-\frac{9}{b^2}=-3 \quad / : (-3)$$
$$\frac{3}{b^2}=1.$$

Odatle množenjem s b^2 izravno slijedi $b^2 = 3$. Dakle, tražena jednadžba hiperbole je $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ ili, u razvijenom obliku dobivenom množenjem navedene jednakosti s 12, $3 \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 = 12$.

3.) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ **ili** $\mathbf{4 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 100}$**.** Iz podatka da elipsa prolazi točkom B koja se nalazi na osi ordinata zaključujemo da je duljina male poluosi elipse $b = 2$. Iz podatka da je prva koordinata jednoga žarišta elipse jednaka $\sqrt{21}$ zaključujemo da je linearni ekscentricitet elipse e jednak $\sqrt{21}$. Budući da vrijedi jednakost

$$e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

odavde izrazimo a^2:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{a^2 - b^2} \quad /^2 \\ e^2 &= a^2 - b^2, \\ a^2 &= e^2 + b^2. \end{aligned}$$

U ovu jednakost uvrstimo $e = \sqrt{21}$ i $b = 2$, pa dobivamo:

$$\begin{aligned} a^2 &= e^2 + b^2, \\ a^2 &= \left(\sqrt{21}\right)^2 + 2^2, \\ a^2 &= 21 + 4, \\ a^2 &= 25. \end{aligned}$$

Preostaje u jednadžbu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ uvrstiti $a^2 = 25$ i $b = 2$, odnosno $b^2 = 4$. Tako konačno dobivamo:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

ili, ekvivalentno, nakon množenja te jednakosti sa 100,

$$4 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 100.$$

29. 1.) a) $\mathbf{x_1 = -5, x_2 = 3}$**.** Iz slike vidimo da graf funkcije f siječe os apscisa u točkama $S_1 = (-5, 0)$ i $S_2 = (3, 0)$. To znači da su tražene nultočke $x_1 = -5$ i $x_2 = 3$.

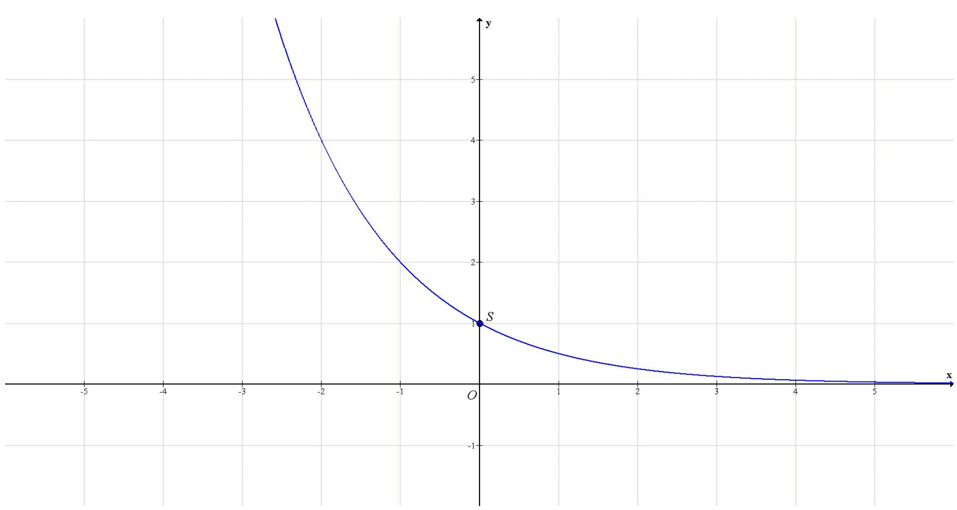
b) $\mathbf{x \in \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 3, 4\rangle}$. Tražimo otvorene intervale na kojima se graf funkcije nalazi strogo ispod osi apscisa (i ne siječe tu os). Jedan je takav interval $\langle -\infty, -5\rangle$ na kojemu zadana funkcija raste. Drugi takav interval je određen većom nultočkom i asimptotom zadane funkcije. Ta je asimptota pravac $x = 4$, pa je riječ o intervalu $\langle 3, 4\rangle$. Dakle, traženi skup je $\langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 3, 4\rangle$.

c) R\⟨1, 4⟩ ili ⟨–∞, 1] ∪ [4, +∞⟩. Sa slike se vidi da pravci oblika $y = a$ ne sijeku graf zadane funkcije ni u jednoj točki ako i samo ako je $a \in \langle 1, 4\rangle$. Stoga funkcija kao svoje vrijednosti poprima sve realne brojeve osim onih iz otvorenoga intervala $\langle 1, 4\rangle$. Dakle, traženi skup je $\mathbf{R}\backslash\langle 1, 4\rangle$ ili, u ekvivalentnom zapisu kao unija dvaju intervala, $\langle -\infty, 1] \cup [4, +\infty\rangle$.

2.) Vidjeti Sliku 2. Prirodno područje definicije zadane funkcije je cijeli skup **R** jer je izraz $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ definiran za svaki realan broj x. Baza zadane eksponencijalne funkcije je $\frac{1}{2}$. Taj je broj strogo manji od 1, pa je riječ o strogo padajućoj funkciji. Njezin graf prolazi točkom $S = (0, 1)$ jer tom točkom prolaze grafovi svih eksponencijalnih funkcija oblika $f(x) = a^x$, za $a > 0$ i $a \neq 1$. Taj graf ne siječe os apscisa ni u jednoj točki jer za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$. Napokon, vrijede jednakosti $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$, što znači da se za velike strogo pozitivne vrijednosti varijable x graf funkcije asimptotski približava osi apscisa. Radi preciznosti, navedimo još neke točke traženoga grafa:

x	-2	-1	1
$f(x)$	4	2	$\frac{1}{2}$

Traženi graf prikazan je na Slici 2.



Slika 2.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U RUJNU 2013. – VIŠA RAZINA

3.) $\boldsymbol{y = 2 \cdot x - 8}$ **ili** $\boldsymbol{2 \cdot x - y - 8 = 0}$**.** Odredimo najprije obje koordinate dirališta tražene tangente. Prva koordinata dirališta jednaka je 3, dok je druga jednaka $f(3)$. Izračunajmo $f(3)$:

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 - 5 = \frac{1}{3} \cdot 9 - 5 = 3 - 5 = -2 .$$

Dakle, diralište tangente je točka $D = (3, -2)$. Koeficijent smjera tangente k_t jednak je vrijednosti prve derivacije zadane funkcije u točki $x = 3$. Izračunajmo tu prvu derivaciju:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3} \cdot x^2 - 5\right)' = \left(\frac{1}{3} \cdot x^2\right)' - (5)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2)' - 0 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 0 = \frac{2}{3} \cdot x^1 = \frac{2}{3} \cdot x,$$

$$k_t = f'(3) = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2.$$

Preostaje napisati jednadžbu pravca kojemu je koeficijent smjera jednak $k_t = 2$ i koji prolazi točkom $D = (3, -2)$:

$$\begin{aligned} &t \ldots y - (-2) = 2 \cdot (x - 3), \\ &t \ldots y + 2 = 2 \cdot x - 6, \\ &t \ldots y = 2 \cdot x - 6 - 2, \\ &t \ldots y = 2 \cdot x - 8 \end{aligned}$$

Zapišemo li dobivenu jednadžbu u implicitnom obliku, dobit ćemo:

$$t \ldots\ 2 \cdot x - y - 8 = 0.$$

4.) $\mathbf{R} \setminus \left[-1, \ \frac{1}{2}\right]$ **ili** $\left\langle -\infty, -1 \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$ **.** Da bi logaritamska funkcija uopće bila definirana, logaritmand mora biti strogo pozitivan realan broj. To znači da mora vrijediti nejednakost:

$$\frac{2 \cdot x - 1}{x + 1} > 0 .$$

Ovim zahtjevom ćemo ujedno osigurati i da nazivnik gornjega algebarskoga razlomka bude različit od nule, odnosno da taj razlomak bude dobro definiran. Riješimo gornju nejednadžbu. Dva su moguća slučaja:

$$\text{I.} \begin{cases} 2 \cdot x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$$

$$\text{II.} \begin{cases} 2 \cdot x - 1 < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\langle -\infty, -1 \right\rangle$$

Dakle, prirodno područje definicije zadane funkcije je unija ovih skupova, tj. skup D_f = $= \left\langle -\infty, -1 \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$. Taj skup kraće i preglednije možemo zapisati koristeći operaciju komplementiranja \:

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \left[-1,\ \frac{1}{2}\right].$$

5.) 35 · *x* – 11. U jednakost $f(x+2) = 5 \cdot x - 1$ umjesto x pišimo $7 \cdot x - 2$. Dobivamo:

$$f\left[(7 \cdot x - 2) + 2\right] = 5 \cdot (7 \cdot x - 2) - 1,$$
$$f(7 \cdot x - 2 + 2) = 35 \cdot x - 10 - 1,$$
$$f(7 \cdot x) = 35 \cdot x - 11.$$

Napomena: U zadatcima ovoga tipa uvijek je korisno pogledati koji izraz treba zapisati umjesto x tako da u zagradi dobijemo točno onaj argument čiju vrijednost tražimo. U ovom slučaju $x + 2$ treba biti jednako $7 \cdot x$, pa umjesto x treba pisati $7 \cdot x - 2$.

30. 15. Odredimo najprije jednadžbu promjera kružnice k okomitoga na tangentu t_1. Koeficijent smjera te tangente je $k_t = -2$, pa je koeficijent smjera promjera

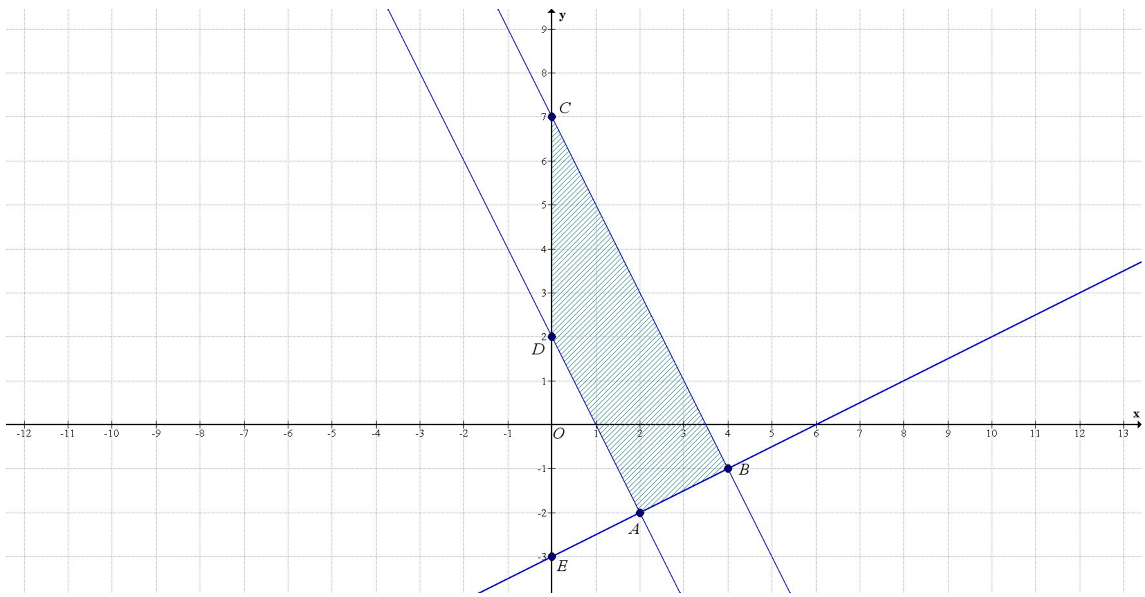
$$k_p = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Jednadžba pravca kojemu je koeficijent smjera k_p, a prolazi točkom S glasi:

$$p \ldots y + 1.5 = \frac{1}{2} \cdot (x - 3),$$
$$p \ldots y = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2} - 1.5,$$
$$p \ldots y = \frac{1}{2} \cdot x - 1.5 - 1.5,$$
$$p \ldots y = \frac{1}{2} \cdot x - 3.$$

U pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini nacrtajmo sva četiri pravca koja određuju četverokut čiju površinu tražimo. Za svakoga od njih dovoljno je odabrati po dvije njegove točke (osim za os y, tj. os ordinata koju crtamo prigodom crtanja pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini). Dobivamo Sliku 3. (Četverokut čiju površinu računamo išrafiran je zelenom bojom, a njegovi su vrhovi označeni s A, B, C i D.)

Odredimo koordinate točaka A, B, C, D i E naznačene na slici 3. U svakom od tih slučajeva rješavamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:



Slika 3.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}\cdot x-3 \\ y=-2\cdot x+2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x-3=-2\cdot x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot x+2\cdot x=2+3 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\cdot x=5 \Leftrightarrow x=2 \Leftrightarrow y=-2\cdot x+2=-2\cdot 2+2$$

$$=-4+2=-2 \Rightarrow A=(2,-2)$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}\cdot x-3 \\ y=-2\cdot x+7 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x-3=-2\cdot x+7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot x+2\cdot x=7+3 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\cdot x=10 \Leftrightarrow x=4 \Leftrightarrow y=-2\cdot x+7=$$

$$=-2\cdot 4+5=-8+7=-1 \Rightarrow B=(4,-1)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-2\cdot x+7 \end{cases} \Rightarrow y=-2\cdot x+7=-2\cdot 0+7=7 \Rightarrow C=(0,7),$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-2\cdot x+2 \end{cases} \Rightarrow y=-2\cdot x+2=-2\cdot 0+2=2 \Rightarrow D=(0,2),$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x-3 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x-3=\frac{1}{2}\cdot 0-3=-3 \Rightarrow E=(0,-3)$$

Tražena površina jednaka je razlici površina trokutova *EBC* i *EAD*. Ti trokutovi su pravokutni trokutovi s pravim kutovima kod vrhova *A*, odnosno *B*. Izračunajmo zasebno površinu svakoga od tih trokuta. Imamo redom:

$$|EB|=\sqrt{(x_B-x_E)^2+(y_B-y_E)^2}=\sqrt{(4-0)^2+[-1-(-3)]^2}=\sqrt{4^2+(-1+3)^2}=\sqrt{(2\cdot 2)^2+2^2}=$$
$$=\sqrt{2^2\cdot 2^2+2^2}=\sqrt{4\cdot 2^2+2^2}=\sqrt{5\cdot 2^2}=2\cdot\sqrt{5}$$
$$|CB|=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{4^2+(-8)^2}=\sqrt{4^2+8^2}=$$
$$=\sqrt{4^2+(2\cdot 4)^2}=\sqrt{4^2+2^2\cdot 4^2}=\sqrt{4^2+4\cdot 4^2}=\sqrt{5\cdot 4^2}=4\cdot\sqrt{5}$$
$$P_{EBC}=\frac{1}{2}\cdot|EB|\cdot|CB|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{5}\cdot 4\cdot\sqrt{5}=4\cdot 5=20$$
$$|EA|=\sqrt{(x_A-x_E)^2+(y_A-y_E)^2}=\sqrt{(2-0)^2+[-2-(-3)]^2}=\sqrt{2^2+(-2+3)^2}=\sqrt{2^2+1^2}=$$
$$=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$
$$|DA|=\sqrt{(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=$$
$$=\sqrt{2^2+(2\cdot 2)^2}=\sqrt{2^2+2^2\cdot 2^2}=\sqrt{2^2+4\cdot 2^2}=\sqrt{5\cdot 2^2}=2\cdot\sqrt{5}$$
$$P_{EAD}=\frac{1}{2}\cdot|EA|\cdot|DA|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 2\cdot\sqrt{5}=5$$

Tako konačno dobivamo:

$$P_{ABCD}=P_{EBC}-P_{EAD}=20-5=15 \text{ kv. jed.}$$

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, dipl.ing.mat., viši predavač