1. **C**. Primijetimo da je $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2.$ Dakle, skup *A* sadrži točno četiri racionalna broja: $-5,\ -\frac{3}{2}$, 0 i $\sqrt[4]{16}=2.$ Broj $\sqrt{3}$ je iracionalan broj, a broj *i* nije realan broj, pa niti jedan od tih dvaju brojeva nije racionalan broj.

2. **B.** Izračunajmo približno (s točnošću od 10^{-2}) apsolutnu vrijednost svakoga ponuđenoga broja. Pritom uočimo da nijedan od tih brojeva nije racionalan.

$$|\log_3 0.41|=\left|\frac{\log 0.41}{\log 3}\right|\approx\left|\frac{-0.38721614}{0.47712125}\right|\approx|-0.81156758|\approx 0.81,$$

$$\left|\underbrace{1-\sqrt{2}}_{<0}\right|=\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}-1\approx 0.41421356\approx -0.41,$$

$$\left|\underbrace{\sqrt[3]{0.25}}_{>0}\right|=\sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2^2}}=\sqrt[3]{2^{-2}}=2^{-\frac{2}{3}}\approx 0.62996052\approx 0.63,$$

$$\left|\underbrace{2^{-0.5}}_{>0}\right|=2^{-0.5}\approx 0.70710678\approx 0.71.$$

Odatle slijedi da jedino broj $1-\sqrt{2}$ ima apsolutnu vrijednost strogo manju od 0.5

3. **B**. Vrijede jednakosti: 1 dm = 10 cm = $10\cdot 10=10^2$ mm. Zbog toga je 1 mm = 10^{-2} dm, pa je $0.4\text{ mm}=0.4\cdot 10^{-2}=4\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-2}=4\cdot 10^{-1+(-2)}=4\cdot 10^{-3}$ dm.

4. **A.** Prva koordinata sjecišta *bilo koje* krivulje s osi ordinata jednaka je nuli. Druga koordinata sjecišta jednaka je $f(0)=\frac{0-1}{0^2-4}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$. Dakle, traženo sjecište je točka $S=\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$.

5. **D**. Mjera drugoga šiljastoga kuta zadanoga trokuta je $90^\circ-67^\circ=23^\circ$. Budući da je $23^\circ<67^\circ$, kraća kateta nalazi se nasuprot kutu čija je mjera 23°. Radi određenosti, neka su *a* duljina kraće katete i *c* duljina hipotenuze. Tada je traženi omjer jednak:

$$\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{\sin 23^\circ}\approx\frac{1}{0.39073113}\approx 2.55930467\approx 2.56$$

6. **A**. Koristeći definiciju apsolutne vrijednosti realnoga broja, razlikujemo dva slučaja:

I. $2\cdot x+5\ge 0\Leftrightarrow 2\cdot x\ge -5\Leftrightarrow x\ge -\frac{5}{2}$

$2\cdot x+5=x+4\Leftrightarrow 2\cdot x-x=4-5\Leftrightarrow x=-1.$

II. $2\cdot x+5<0\Leftrightarrow 2\cdot x<-5\Leftrightarrow x<-\frac{5}{2}$

$-(2\cdot x+5)=x+4\Leftrightarrow -2\cdot x-5=x+4\Leftrightarrow -2\cdot x-x=4+5\Leftrightarrow -3\cdot x=9\Leftrightarrow x=-3.$

Primijetimo da svako od dobivenih rješenja zadovoljava pripadni uvjet na vrijednost nepoznanice *x*, što znači da su sva rješenja zadane jednadžbe $x_1 = -1$ i $x_2 = -3$. Njihov je zbroj jednak $x_1 + x_2 = -1 + (-3) = -4$.

7. **C**. Najprije odredimo i^{267}. Broj 267 podijelimo s 4. Dobijemo količnik 66 i ostatak 3. Zbog toga je:

$$i^{267} = i^3 = -i.$$

Izračunajmo član $a + b \cdot i$ iz navedene jednakosti. Imamo redom:

$$a + b \cdot i = \frac{5}{2 + i^{267}} = \frac{5}{2 - i} = \frac{5 \cdot (2+i)}{(2-i) \cdot (2+i)} = \frac{5 \cdot (2+i)}{2^2 - i^2} = \frac{5 \cdot (2+i)}{4 - (-1)} = \frac{5 \cdot (2+i)}{4+1} = \frac{5 \cdot (2+i)}{5} = 2 + i.$$

Odatle odmah slijedi $a = 2$.

8. **D**. Uočimo da je $-\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{LJ}$, pa je $x = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{JC} \right) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$. Vektor koji ima početak u točki *P* i jednak je vektoru $\overrightarrow{AB}$ je vektor $\overrightarrow{PQ}$.

9. **B.** Dužina $\overline{ST}$ je polumjer kružnice, pa s pravcem *p* zatvara pravi kut. Kut $\angle STB$ je obodni kut nad tetivom $\overline{TB}$, pa je, prema podacima u zadatku, njegova mjera jednaka 40° (jer svi obodni kutovi nad istom tetivom imaju jednake mjere). Tako odmah imamo:

$$40^\circ + \beta = 90^\circ,$$
$$\beta = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

10. **A**. Polumjer osnovke valjka iznosi $r = 3 \text{ m} = 3 \cdot 10^1 \text{ dm} = 30 \text{ dm}$. Visina valjka koji ima polumjer osnovke *r* i obujam 1500 L iznosi

$$h = \frac{1500}{30^2 \cdot \pi} = \frac{1500}{900 \cdot \pi} = \frac{5}{3 \cdot \pi} \text{ dm}.$$

Dakle, razina vode se svaki sat poveća za $\frac{5}{3 \cdot \pi}$ dm, pa će se za pet sati ta razina povećati za ukupno $5 \cdot \frac{5}{3 \cdot \pi} = \frac{25}{3 \cdot \pi} \approx 2.65258238 \approx 2.65 \text{ dm} = 2.65 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 0.265 \text{ m}$.

11. **D.** Odredimo najprije vrijednost parametra *p*. Parabola prolazi točkom *A*, pa njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu parabole. Uvrštavanjem tih koordinata u jednadžbu parabole dobivamo:

$$(-4)^2 = 2 \cdot p \cdot \frac{4}{7},$$
$$16 = \frac{8}{7} \cdot p, \quad / : \frac{8}{7}$$
$$p = 14.$$

Sada možemo napisati jednadžbu tangente u implicitnom obliku:

$$\begin{aligned}
&y\cdot(-4)=14\cdot\left(x+\frac{4}{7}\right), \quad /:(-2)\\
&2\cdot y=-7\cdot\left(x+\frac{4}{7}\right),\\
&2\cdot y=-7\cdot x-4,\\
&7\cdot x+2\cdot y+4=0.
\end{aligned}$$

12. B. Duljina svakoga dijela stranice $\overline{AC}$ iznosi $\frac{1}{4}\cdot\left|\overline{AC}\right|=\frac{1}{4}\cdot 12=3\,\text{cm}$. Duljina svakoga dijela stranice $\overline{BC}$ iznosi $\frac{1}{4}\cdot\left|\overline{BC}\right|=\frac{1}{4}\cdot 8=2\,\text{cm}$. Tolike su i duljine krakova osjenčanoga trapeza. Preostaje izračunati duljine osnovica toga trapeza. Radi određenosti, neka su a dulja osnovica trapeza, a c njegova kraća osnovica. Primjenjujući sličnost odgovarajućih trokutova dobijemo:

$$\begin{aligned}
&a:(12-3)=16:12 \Leftrightarrow a:9=16:12 \Leftrightarrow 12\cdot a=16\cdot 9 \Leftrightarrow a=\frac{16\cdot 9}{12}=12 \text{ cm},\\
&c:(12-6)=16:12 \Leftrightarrow c:6=16:12 \Leftrightarrow 12\cdot c=16\cdot 6 \Leftrightarrow a=\frac{16\cdot 6}{12}=8 \text{ cm}.
\end{aligned}$$

Stoga je traženi opseg jednak $O=12+8+3+2=25$ cm.

13. C. Funkcija apsolutne vrijednosti je strogo padajuća na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$, a strogo rastuća na intervalu $\langle 0,+\infty\rangle$. To znači da vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
&a\le x<0 \Leftrightarrow 0<|x|\le|a|,\\
&0\le x\le b \Leftrightarrow 0<|x|\le b.
\end{aligned}$$

Tako imamo redom:

$$\begin{aligned}
&-5\le x\le 5,\\
&-5+1\le x+1\le 5+1,\\
&-4\le x+1\le 6,\\
&-4\le x+1<0 \text{ ili } 0\le x+1\le 6,\\
&0<|x+1|\le 4 \text{ ili } 0\le|x+1|\le 6,\\
&0\le|x+1|\le 6,\\
&0-2\le|x+1|-2\le 6-2,\\
&-2\le|x+1|-2\le 4,\\
&-2\le|x+1|-2<0 \text{ ili } 0\le|x+1|-2\le 4,\\
&0<\left||x+1|-2\right|\le 2 \text{ ili } 0\le|x+1|-2\le 4,
\end{aligned}$$

$$0 \le \left| |x+1| - 2 \right| \le 4,$$
$$0 \le f(x) \le 4.$$

Dakle, tražena slika je segment $[0,4]$.

14. A. Uočimo pravokutan trokut kojemu su jedna kateta trećina visine osnovke, druga kateta visina piramide *v*, a hipotenuza visina pobočke piramide. Mjera kuta između osnovnoga brida i visine pobočke iznosi 52°, a duljina osnovnoga brida $a = 7.5$ cm. Tako odmah imamo:

$$\text{tg } 52^\circ = \frac{v}{\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}} \Leftrightarrow v = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot \text{tg } 52^\circ = \frac{1}{3}\cdot\frac{7.5}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\text{tg } 52^\circ \approx 2.77115492 \approx 2.77\,\text{cm}.$$

15. C. Neka su a, $a\cdot q$ i $a\cdot q^2$ duljine stranica trokuta, pri čemu je $a>0$. Prema nejednakosti trokuta, moraju vrijediti sljedeće nejednakosti:

$$\begin{cases} a + a\cdot q > a\cdot q^2, \\ a\cdot q + a\cdot q^2 > a, \\ a + a\cdot q^2 > a\cdot q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+q > q^2, \\ q+q^2 > 1, \\ 1+q^2 > q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 - q - 1 < 0, \\ q^2 + q - 1 > 0, \\ q^2 - q + 1 > 0. \end{cases}$$

Riješimo prvu nejednadžbu. Imamo:

$$q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm\sqrt{1-(-4)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$
$$q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\; q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

pa je skup svih rješenja prve nejednadžbe interval $\left\langle \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\rangle$.

Riješimo drugu nejednadžbu. Imamo:

$$q^2 + q - 1 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{1-(-4)}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$
$$q_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\; q_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

pa je skup svih rješenja druge nejednadžbe $\mathbb{R} \setminus \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right] =$

$$= \left\langle -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right\rangle.$$

Uočimo da treća nejednakost vrijedi za bilo koji $q \in \mathbb{R}$. Naime,

$$q^2 - q + 1 = \left(q - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(q - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

Zbog toga tu nejednakost možemo zanemariti.

Presjek dobivenih rješenja prvih dviju nejednadžbi je interval $\left\langle \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\rangle$ $\approx \langle 0.618, 1.618 \rangle$. Od ponuđenih četiriju vrijednosti jedino vrijednost $q = 1.5$ pripada navedenom intervalu, pa je ona rješenje zadatka.

16. ≈ -0.1328667. Imamo redom:

$$\frac{\sqrt[3]{4}+2}{-81:3} = \frac{\sqrt[3]{4}+2}{-27} = -\frac{\sqrt[3]{4}+2}{27} = -\frac{4^{\frac{1}{3}}+2}{27} \approx -0.13286670562845 \approx -0.1328667.$$

17. 8.5 kn. Neka je C tražena cijena (iskazana u kn). Tada cijena poslije poskupljenja iznosi $C + \frac{4}{100} \cdot C = C \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) = C \cdot (1 + 0.04) = 1.04 \cdot C$. Ta cijena treba biti jednaka 8.84 kn, pa dobivamo jednadžbu:

$$1.04 \cdot C = 8.84.$$

Odatle dijeljenjem s 1.04 dobivamo $C = 8.5$.

18. 1.) $[8, +\infty\rangle$**.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{x+8}{4} \leq \frac{2 \cdot x - 1}{3} \quad / \cdot 12 \\
&12 + 3 \cdot (x+8) \leq 4 \cdot (2 \cdot x - 1), \\
&12 + 3 \cdot x + 24 \leq 8 \cdot x - 4, \\
&3 \cdot x - 8 \cdot x \leq -4 - 12 - 24, \\
&-5 \cdot x \leq -40, \quad / : (-5) \\
&x \geq 8.
\end{aligned}$$

Dakle, skup svih rješenja zadane nejednadžbe je interval $[8, +\infty\rangle$**.**

2.) $(x, y) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$. Oduzmimo drugu jednadžbu sustava od prve jednadžbe. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
&(x + y - 2) - (y - x) = \frac{5}{2} \cdot x - \frac{3}{2}, \\
&x + y - 2 - y + x = \frac{5}{2} \cdot x - \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

$$x + x - \frac{5}{2} \cdot x = -\frac{3}{2} + 2,$$
$$-\frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{2}, \quad / : \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$x = -1.$$

Uvrstimo dobivenu vrijednost u drugu jednadžbu sustava pa dobijemo:

$$y - (-1) = \frac{3}{2},$$
$$y = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Dakle, rješenje zadanoga sustava je $(x, y) = \left(-1, \ \frac{1}{2}\right)$.

19. 1.) $\sqrt{85}$ **.** Najprije očitamo koordinate točaka: $A = (-3, -1)$, $B = (4, 5)$, $C = (-2, 6)$. Potom računamo duljine stranica trokuta uz standardne oznake, a koristeći formulu za računanje udaljenosti dviju točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini:

$$a = \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-2-4)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 1^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37},$$
$$b = \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (6-(-1))^2} = \sqrt{(-2+3)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50},$$
$$c = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(4-(-3))^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{(4+3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{49+36} = \sqrt{85}.$$

Od navedenih triju duljina stranica najveća je ona duljina koja ima najveći radikand (izraz pod drugim korijenom). Ta je duljina očito jednaka $\sqrt{85}$ i ona je rješenje zadatka.

2.) $p = \frac{7}{2} = 3.5$. Zadani pravci se neće sjeći ako i samo ako su oni usporedni, odnosno ako i samo ako imaju jednake koeficijente smjerova. Stoga zapišimo jednadžbe obaju pravaca u eksplicitnom obliku:

$$\begin{array}{cc}
2 \cdot x - 4 \cdot y - 5 = 0 & p \cdot x - 7 \cdot y + p = 0 \\
-4 \cdot y = -2 \cdot x + 5 & -7 \cdot y = -p \cdot x - p \\
y = \frac{-2}{-4} \cdot x + \frac{5}{-4} & y = \frac{-p}{-7} \cdot x + \frac{-p}{-7} \\
y = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{5}{4} & y = \frac{p}{7} \cdot x + \frac{p}{7}
\end{array}$$

Tako sada iz jednadžbe $\frac{1}{2} = \frac{p}{7}$ slijedi $p = \frac{7}{2} = 3.5.$

20. 1.) $a^{\frac{1}{2 \cdot n}}$ **.** Imamo redom:

$$\left(\sqrt[n]{a\cdot\sqrt{a}}\right):a^{\frac{1}{n}}=\left(a\cdot\sqrt{a}\right)^{\frac{1}{n}}:a^{\frac{1}{n}}=\left(\left(a\cdot\sqrt{a}\right):a\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\sqrt{a}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{2\cdot n}}.$$

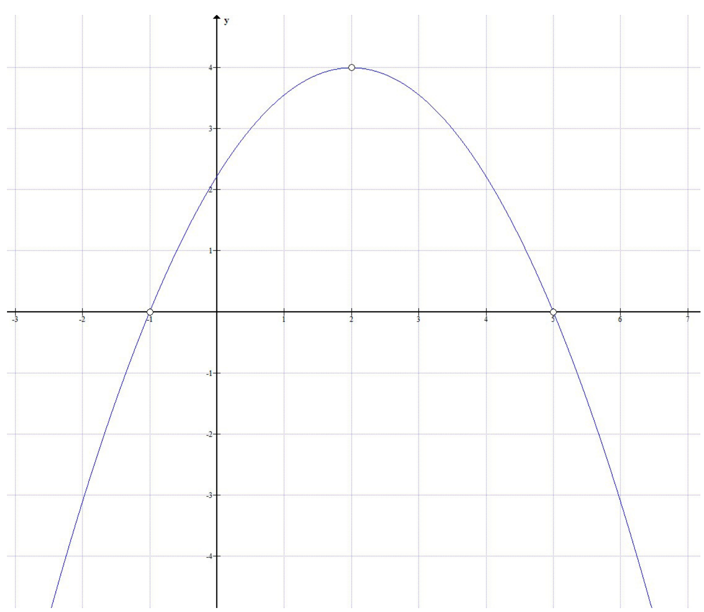
2.) $\dfrac{A\cdot D-3}{C}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&A=\frac{B\cdot C+3}{D}\quad /\cdot D\\
&A\cdot D=B\cdot C+3,\\
&A\cdot D-3=B\cdot C,\quad /:C\\
&B=\frac{A\cdot D-3}{C}.
\end{aligned}$$

21. 1.) 4. Iz zadanoga pravila funkcije očitamo njezine nultočke tako da svaku pojedinu zagradu izjednačimo s nulom. Lako dobivamo: $x_1=-1,\ x_2=5$. Funkcija poprima najveću vrijednost za $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-1+5}{2}=\dfrac{4}{2}=2$ i ta najveća vrijednost iznosi

$$f(2)=-\frac{4}{9}\cdot(2+1)\cdot(2-5)=-\frac{4}{9}\cdot 3\cdot(-3)=4.$$

2.) Vidjeti Sliku 1. Iz prethodnoga podzadatka zaključujemo da graf zadane funkcije prolazi točkama (–1, 0), (5, 0) i (2, 4). Ucrtamo te točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa ih spojimo parabolom. Dobivamo Sliku 1.



Slika 1.

22. 1.) 5.1. Iz pravila kojim je definiran niz a_n slijedi da je svaki član niza, osim prvoga, za 0.7 manji od prethodnoga člana niza. Stoga je osmi član niza za $7\cdot 0.7=4.9$ manji od prvoga člana niza. Budući da je prvi član niza jednak 10, osmi član niza jednak je $10-4.9=5.1$.

2.) $\frac{9}{2}=4.5$. Neka su v i m redom masa brašna u većoj, odnosno manjoj posudi (iskazane u kilogramima). Ako iz veće posude presipamo jednu petinu mase brašna (u toj posudi) u manju posudu, u većoj posudi ostat će $v-\frac{1}{5}\cdot v=v\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=v\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\cdot v$, dok će u manjoj posudi biti ukupno $m+\frac{1}{5}\cdot v$ kg brašna. Prema zahtjevu zadatka, te dvije mase moraju biti jednake, pa vrijedi jednakost:

$$\frac{4}{5}\cdot v=m+\frac{1}{5}\cdot v \Leftrightarrow \frac{4}{5}\cdot v-\frac{1}{5}\cdot v=m \Leftrightarrow m=\frac{3}{5}\cdot v \Leftrightarrow v=\frac{5}{3}\cdot m.$$

Ako iz manje posude presipamo 1.5 kg brašna u veću posudu, masa brašna u većoj posudi iznosit će $v+1.5$ kg, a masa brašna u manjoj posudi iznosit će $m-1.5$ kg. Prema zahtjevu zadatka, prva od tih dviju masa mora biti trostruko veća od druge, pa vrijedi jednakost:

$$v+1.5=3\cdot(m-1.5) \Leftrightarrow v+1.5=3\cdot m-4.5 \Leftrightarrow v-3\cdot m=-4.5-1.5 \Leftrightarrow v-3\cdot m=-6.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} v=\frac{5}{3}\cdot m, \\ v-3\cdot m=-6. \end{cases}$$

Iz toga sustava odredimo nepoznanicu *m*. Uvrstimo prvu jednadžbu sustava u drugu jednadžbu, pa dobijemo:

$$\begin{aligned} &\frac{5}{3}\cdot m-3\cdot m=-6, \\ &m\cdot\left(\frac{5}{3}-3\right)=-6, \\ &m\cdot\frac{5-9}{3}=-6, \\ &\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot m=-6. \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s $-\frac{4}{3}$ slijedi $m=\frac{9}{2}=4.5$.

23. 1.) $t=-\frac{1}{11}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} &1\cdot(6\cdot t^2+5)=(3\cdot t-4)\cdot(2\cdot t-1), \\ &6\cdot t^2+5=6\cdot t^2-8\cdot t-3\cdot t+4, \\ &6\cdot t^2-6\cdot t^2+8\cdot t+3\cdot t=4-5, \\ &11\cdot t=-1, \quad /:11 \\ &t=-\frac{1}{11}. \end{aligned}$$

2.) 5. Vrijednost funkcije *f* za $x=-2$ treba biti jednaka nuli. Tako dobivamo:

$$-2\cdot a+10=0\Leftrightarrow -2\cdot a=-10\Leftrightarrow a=5.$$

24. 1.) $7\cdot x^2-15\cdot y^2$**.** Imamo redom:

$$3\cdot(2\cdot x-y)\cdot(x+5\cdot y)+x\cdot(x-27\cdot y)=(6\cdot x-3\cdot y)\cdot(x+5\cdot y)+x^2-27\cdot x\cdot y=$$
$$=6\cdot x^2-3\cdot x\cdot y+30\cdot x\cdot y-15\cdot y^2+x^2-27\cdot x\cdot y=7\cdot x^2-15\cdot y^2.$$

2.) $\frac{4}{2-x}$**.** Koristeći formulu za razliku kvadrata dobivamo:

$$\frac{x^2}{2-x}+x+2=\frac{x^2+(2-x)\cdot(x+2)}{2-x}=\frac{x^2+(2-x)\cdot(2+x)}{2-x}=\frac{x^2+2^2-x^2}{2-x}=\frac{4}{2-x}.$$

25. 1.) 2. Jedan radnik bi sam obavio berbu za $22\cdot 7=154$ dana. Posao kojega u četiri dana odradi sedam radnika jedan radnik bi odradio za ukupno $4\cdot 7=28$ dana. Preostali dio posla jedan radnik bi odradio za $154-28=126$ dana. Budući da taj preostali dio posla mora biti gotov za 14 dana, njega treba odraditi ukupno $\frac{126}{14}=9$ radnika. Sedam radnika je već otprije angažirano, pa je traženi broj radnika jednak $9-7=2$.

2.) 14. Ukupan broj kuglica jednak je $7+9+10+14+19=59$. Nakon što je Marko dao vrećicu Ani, preostali broj kuglica mora biti djeljiv s 3. Naime, plavih kuglica ima dvostruko više nego zelenih, pa je ukupan broj svih preostalih kuglica trostruko veći od broja zelenih kuglica. Zbog toga treba utvrditi koja od pet razlika $59-7$, $59-9$, $59-10$, $59-14$ i $59-19$ je djeljiva s 3. Te razlike redom iznose 52, 50, 49, 45 i 40. Od tih pet brojeva, jedino je 45 djeljiv s 3. Dakle, Marko je dao Ani vrećicu s 14 kuglica (i ostalo mu je još 45 kuglica).

26. 1.) $\frac{3}{2}\cdot\pi$**.** Pojednostavnimo najprije zadani kompleksan broj primjenom formule za kvadrat binoma: $(1-i)^2=1^2-2\cdot 1\cdot i+i^2=1-2\cdot i+(-1)=-2\cdot i$. Tome broju odgovara točka $(0,-2)$ kompleksne ravnine. Spojnica ishodišta te ravnine i navedene točke je negativni dio imaginarne osi. Taj polupravac zatvara s pozitivnim dijelom realne osi kut čija je mjera $\frac{3}{2}\cdot\pi$ (krećemo od pozitivnoga dijela realne osi u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu, dođemo do negativnoga dijela imaginarne osi i pogledamo koliki smo kut opisali pri tom kretanju). Zbog toga je traženi glavni argument jednak $\frac{3}{2}\cdot\pi$.

Napomena: U zadatku je pogrešno navedeno da treba odrediti argument zadanoga kompleksnoga broja. Naime, argument kompleksnoga broja *z* je *bilo koji* element skupa $S=\{\varphi+k\cdot 2\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\}$, gdje je φ glavni argument broja *z*. Stoga je ispravno rješenje zadatka (u postavljenoj formulaciji) skup $S=\left\{\frac{3}{2}\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2.) $\frac{1}{2}$**.** Pojednostavnimo lijevu stranu zadane jednakosti koristeći osnovni trigonometrijski identitet i formulu $\cos(2 \cdot x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Imamo redom:

$$\frac{\sin x - \sin^3 x}{1 + \cos(2 \cdot x)} = t \cdot \sin x,$$

$$\frac{\sin x \cdot (1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} = t \cdot \sin x,$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{2 \cdot \cos^2 x} = t \cdot \sin x,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin x = t \cdot \sin x.$$

Odatle lagano slijedi $t = \frac{1}{2}$.

27. 1.) 9 puta. Ako se duljina svake stranice kvadra poveća 3 puta, onda će se površina svake strane kvadra povećati $3 \cdot 3 = 9$ puta. Budući da je oplošje kvadra jednako zbroju površina svih strana kvadra, zaključujemo da će se ukupan zbroj površina povećati 9 puta (ako se svaki pribrojnik poveća 9 puta, onda se i zbroj poveća 9 puta).

2.) $(x+3)^2 + y^2 = 9.$ Prema pretpostavci, kružnica prolazi ishodištem i dodiruje os ordinata. No, ishodište se nalazi na osi ordinata, pa zaključujemo da kružnica dodiruje os ordinata upravo u ishodištu. Pravac koji prolazi ishodištem okomito na os ordinata je os apscisa, pa zaključujemo da jedan promjer kružnice pripada osi apscisa. Dakle, središte kružnice leži na osi apscisa. Prema pretpostavci, prva koordinata središta kružnice je strogo negativna, pa to središte leži na negativnom dijelu osi apscisa. Točka na negativnom dijelu osi apscisa udaljena od ishodišta za 3 jedinične duljine je očito $S = (-3, 0)$. Preostaje napisati jednadžbu kružnice sa središtem u točki $S = (-3, 0)$ i polumjerom $r = 3$. Ta jednadžba glasi: $(x+3)^2 + y^2 = 9.$

3.) $x \in \left\{\frac{3}{k}, -1,\ 1\right\}$**.** Rastavimo lijevu stranu jednadžbe na faktore. Imamo redom:

$$k \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - k \cdot x + 3 = 0,$$

$$x^2 \cdot (k \cdot x - 3) - (k \cdot x - 3) = 0,$$

$$(k \cdot x - 3) \cdot (x^2 - 1) = 0,$$

$$(k \cdot x - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0,$$

$$k \cdot x - 3 = 0 \text{ ili } x - 1 = 0 \text{ ili } x + 1 = 0,$$

$$k \cdot x = 3 \text{ ili } x = 1 \text{ ili } x = -1,$$

$$x_1 = \frac{3}{k},\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,$$

$$x \in \left\{\frac{3}{k}, -1,\ 1\right\}.$$

28. 1.) $\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$**.** Primijetimo da nužno mora biti $\sin x\cdot\cos x\neq 0$. Naime, kad bi jedna od tih vrijednosti bila jednaka nuli, prema osnovnoj trigonometrijskoj jednakosti druga vrijednost bi morala biti jednaka 1 ili –1, pa bi vrijednost lijeve strane jednadžbe tada bila 1, –1, $\sqrt{3}$ ili $-\sqrt{3}$ i ne bi mogla biti jednaka nuli. Zbog toga cijelu jednadžbu smijemo podijeliti sa $\sin x$ i dobiti:

$$\sqrt{3}-\frac{\cos x}{\sin x}=0,$$
$$\sqrt{3}-\operatorname{ctg} x=0,$$
$$\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}.$$

Odatle odmah slijedi $x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2.) $[-4,1]\cup[5,6]$**.** Umnožak dvaju realnih brojeva je nenegativan ako i samo ako oba faktora imaju isti predznak ili je barem jednak od njih jednak nuli. Iz grafa lako vidimo da su funkcije *f* i *g* strogo pozitivne na intervalu $\langle -4,1\rangle$, strogo negativne na intervalu $\langle 5,6\rangle$ i da sijeku os apscisa u točkama čije su apscise –4, 1, 5 i 6. Dakle, rješenje zadatka je unija skupova $\langle -4,1\rangle$, $\langle 5,6\rangle$ i $\{-4,\ 1,\ 5,\ 6\}$, a to je skup $[-4,1]\cup[5,6]$.

3.) 3; 2. Graf prolazi točkom (–2, 0), što znači da vrijedi jednakost $\log_b(-2+a)=0.$ Ta jednakost je ekvivalentna jednakosti $a-2=b^0$, odnosno $a-2=1$, a odatle je $a=3.$ Nadalje, graf prolazi točkom (1, 2), što znači da vrijedi jednakost $\log_b(1+a)=2.$ Ovamo uvrstimo $a=3$, pa dobijemo $\log_b(1+3)=2,$ odnosno $b^2=1+3$, odnosno $b^2=4.$ Jedino strogo pozitivno rješenje ove jednadžbe je $b=2$. Dakle, $(a,b)=(3,2).$

29. 1.) $D_f=\mathbb{R}\setminus(\langle -3,3\rangle\cup\{5\})=\langle -\infty,-3]\cup[3,5\rangle\cup\langle 5,+\infty\rangle$**.** Bilo koji razlomak je definiran ako su definirani njegov brojnik i njegov nazivnik i ako je njegov nazivnik različit od nule. Drugi korijen iz realnoga broja je definiran ako i samo ako je radikand (izraz pod korijenom) nenegativan. Zbog toga imamo ukupno dva uvjeta na vrijednost varijable *x*. To su $x^2-9\geq 0$ i $5-x\neq 0$.

Iz drugoga je uvjeta odmah $x\neq 5.$ Riješimo li kvadratnu jednadžbu $x^2-9=0$, dobit ćemo $x_1=-3$ i $x_2=3$, pa je skup svih rješenja nejednadžbe $x^2-9\geq 0$ jednak $\mathbb{R}\setminus\langle -3,3\rangle$. Da bismo dobili traženu domenu, iz ovoga skupa treba izbaciti broj 5 (jer za njega i samo za njega ne vrijedi nejednakost $x\neq 5.$), pa dobivamo:

$$D_f=\mathbb{R}\setminus(\langle -3,3\rangle\cup\{5\})=\langle -\infty,-3]\cup[3,5\rangle\cup\langle 5,+\infty\rangle.$$

2.) $\frac{1}{2}\cdot\log_2 3=\log_4 3.$ Svedimo obje strane jednadžbe na potenciju s bazom 2. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&g(f(x)) = -\left(2^2\right)^x,\\
&2^{2\cdot x+1} - 9 = -2^{2\cdot x},\\
&2^{2\cdot x+1} + 2^{2\cdot x} = 9,\\
&2^{2\cdot x}\cdot 2^1 + 2^{2\cdot x} = 9,\\
&2^{2\cdot x}\cdot (2^1+1) = 9,\\
&2^{2\cdot x}\cdot (2+1) = 9,\\
&2^{2\cdot x}\cdot 3 = 9, \quad / : 3\\
&2^{2\cdot x} = 3, \quad / \log_2\\
&2\cdot x = \log_2 3, \quad / : 2\\
&x = \frac{1}{2}\cdot \log_2 3.
\end{aligned}$$

Koristeći identitet $\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\cdot \log_a b$, posljednji izraz možemo zapisati u ekvivalentnom obliku $x = \log_{2^2} 3 = \log_4 3$.

3.) $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$. Odredimo prvu derivaciju zadane funkcije. Primjenom pravila za deriviranje količnika dviju funkcija dobivamo:

$$f'(x) = \frac{(2\cdot x-1)'\cdot(x^2+2) - (2\cdot x-1)\cdot(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \frac{(2\cdot 1-0)\cdot(x^2+2) - (2\cdot x-1)\cdot(2\cdot x+0)}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot(x^2+2) - (2\cdot x-1)\cdot 2\cdot x}{(x^2+2)^2} = \frac{2\cdot x^2 + 4 - 4\cdot x^2 + 2\cdot x}{(x^2+2)^2} = \frac{-2\cdot x^2 + 2\cdot x + 4}{(x^2+2)^2}.$$

Potom odredimo sve stacionarne točke. Derivacija racionalne funkcije je ponovno racionalna funkcija, pa su stacionarne točke polazne funkcije nultočke brojnika funkcije f'. Stoga imamo:

$$\begin{aligned}
&-2\cdot x^2 + 2\cdot x + 4 = 0, \quad / : (-2)\\
&x^2 - x - 2 = 0,\\
&x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm\sqrt{1-(-8)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2},\\
&x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2,\ x_2 = \frac{1-3}{2} = -\frac{2}{2} = -1.
\end{aligned}$$

Primijetimo da je prirodna domena zadane racionalne funkcije skup $\mathbb{R}$ jer za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $x^2 + 2 > 0$. Drugim riječima, nazivnik zadane funkcije nije jednak nuli ni za koji $x \in \mathbb{R}$. Zbog toga određujemo predznak funkciju f' na svakome od intervala $\langle -\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 2\rangle$ i $\langle 2, +\infty\rangle$. Budući da je $x^2 + 2 > 0$, predznak funkcije f' jednak je predznaku njezina brojnika, odnosno izraza $-2\cdot x^2 + 2\cdot x + 4$.

Intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$ pripada $x=-2$. Lako izračunamo: $-2\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)+4=-2\cdot 4-4+4=-8$. Taj broj je strogo manji od nule, što znači da je funkcija $f^{'}$ strogo negativna na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$. Odatle zaključujemo da polazna funkcija *f* strogo pada na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$.

Intervalu $\langle -1,\ 2\rangle$ pripada $x=0$. Lako izračunamo: $-2\cdot 0^2+2\cdot 0+4=-2\cdot 0-0+4=4$. Taj broj je strogo veći od nule, što znači da je funkcija $f^{'}$ strogo pozitivna na intervalu $\langle -1,\ 2\rangle$. Odatle zaključujemo da polazna funkcija *f* strogo raste na intervalu $\langle -1,\ 2\rangle$.

Intervalu $\langle 2, +\infty\rangle$ pripada $x=3$. Lako izračunamo: $-2\cdot 3^2+2\cdot 3+4=-2\cdot 9+6+4=-18+10=-8$. Taj broj je strogo manji od nule, što znači da je funkcija $f^{'}$ strogo negativna na intervalu $\langle 2, +\infty\rangle$. Odatle zaključujemo da polazna funkcija *f* strogo pada na intervalu $\langle -1,\ 2\rangle$.

Lokalni maksimum bit će točka u kojoj funkcija $f^{'}$ pri prolazu mijenja predznak + u – . Iz gornjih razmatranja zaključujemo da funkcija $f^{'}$ pri prolazu kroz točku s apscisom $x=-1$ mijenja predznak iz – u +, pa u toj točki funkcija postiže lokalni minimum. No, $f^{'}$ pri prolazu kroz točku s apscisom $x=2$ mijenja predznak iz + u –, pa u toj točki funkcija postiže lokalni maksimum. Vrijednost toga maksimuma jednaka je:

$$f(2)=\frac{2\cdot 2-1}{2^2+2}=\frac{4-1}{4+2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Dakle, tražena točka grafa funkcije *f* je $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$**.**

4.) $x\in\left\{-\frac{13}{2},-\frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{13}{2}\right\}$**.** Koristit ćemo identitet $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4\cdot x_1\cdot x_2$ koji se lako dokazuje primjenom formule za kvadrat binoma. Prema podacima u zadatku je $x_1-x_2=4$, dok prema Vièteovim formulama vrijede jednakosti $x_1+x_2=-\frac{p}{4},\ x_1\cdot x_2=\frac{65}{4}$. Uvrštavanjem tih triju jednakosti u gore navedeni identitet dobivamo:

$$\begin{aligned}
&4^2=\left(-\frac{p}{4}\right)^2-4\cdot\frac{65}{4},\\
&16=\frac{p^2}{16}-65,\\
&\frac{p^2}{16}=65+16,\\
&\frac{p^2}{16}=81,\\
&p^2=81\cdot 16=9^2\cdot 4^2=(9\cdot 4)^2,\\
&p_1=9\cdot 4=36,\ p_2=-(9\cdot 4)=-36.
\end{aligned}$$

Za $p_1 = 36$ dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$4 \cdot x^2 + 36 \cdot x + 65 = 0.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$4 \cdot x^2 + 36 \cdot x + 65 = 0,$$
$$x_{1,2} = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 4 \cdot 65}}{2 \cdot 4} = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 1040}}{8} = \frac{-36 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{-36 \pm 16}{8},$$
$$x_1 = \frac{-36 + 16}{8} = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2},\ x_2 = \frac{-36 - 16}{8} = -\frac{52}{8} = -\frac{13}{2}.$$

Za $p_2 = -36$ dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$4 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 65 = 0.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$4 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 65 = 0,$$
$$x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 65}}{2 \cdot 4} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1040}}{8} = \frac{36 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{36 \pm 16}{8},$$
$$x_3 = \frac{36 + 16}{8} = \frac{52}{8} = \frac{13}{2},\ x_4 = \frac{36 - 16}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}.$$

Dakle, sva rješenja zadane jednadžbe su $-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$ i $\frac{13}{2}$.

30. $\frac{328000}{2187} \cdot \pi \approx 471.16707379$ **cm²**. Polumjer prve upisane sfere jednak je polovici brida zadane kocke: $r_1 = \frac{10}{2} = 5$ cm. Duljina prostorne dijagonale prve upisane kocke jednaka je promjeru prve upisane sfere: $a_1 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot r_1 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot r_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 5 = \frac{10}{\sqrt{3}}$ cm. Polumjer druge upisane sfere jednak je polovici brida prve upisane kocke: $r_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{\frac{10}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{5}{\sqrt{3}}$ cm itd. Uočavamo da polumjeri upisanih sfera tvore geometrijski niz $5, \frac{5}{\sqrt{3}}, \ldots$ čiji je prvi član $r_1 = 5$, a količnik $q = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{5}{\sqrt{3}}}{5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Opći član toga niza je $r_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$. Odredimo koliko je članova toga niza strogo veće od 0.1. U tu svrhu riješimo nejednadžbu:

$$5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1} > 0.1$$

po nepoznanici k. Imamo redom:

$$5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}>0.1,\quad /:5$$
$$\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^{k-1}>0.02,$$
$$\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{k-1}>0.02,$$
$$3^{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(k-1)}>0.02,$$
$$3^{-\frac{1}{2}\cdot k+\frac{1}{2}}>0.02,\quad /\log$$
$$-\frac{1}{2}\cdot k+\frac{1}{2}>\frac{\log 0.02}{\log 3},$$
$$-\frac{1}{2}\cdot k>\frac{\log 0.02}{\log 3}-\frac{1}{2},\quad /\cdot(-2)$$
$$k<1-\frac{2\cdot\log 0.02}{\log 3}=1-\frac{2\cdot\log(2\cdot 10^{-2})}{\log 3}=1-\frac{2\cdot\left(\log 2+\log 10^{-2}\right)}{\log 3}=1-\frac{2\cdot(\log 2-2)}{\log 3},$$
$$k<1+\frac{4-2\cdot\log 2}{\log 3}=1+\frac{4-\log(2^2)}{\log 3}=1+\frac{4-\log 4}{\log 3},$$
$$k<8.12175359.$$

Najveći prirodan broj koji zadovoljava ovu nejednakost je $k=8$. Dakle, trebamo izračunati zbroj oplošja prvih osam upisanih sfera.

Oplošje prve upisane sfere je $O_1=4\cdot r_1^2\cdot\pi=4\cdot 5^2\cdot\pi=4\cdot 25\cdot\pi=100\cdot\pi.$ Oplošje druge upisane sfere je $O_2=4\cdot r_2^2\cdot\pi=4\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\pi=4\cdot\frac{25}{3}\cdot\pi=\frac{100}{3}\cdot\pi.$ Oplošja upisanih sfera također tvore geometrijski niz (vidjeti Tvrdnju 1. neposredno iza rješenja ovoga zadatka) čiji je prvi član $100\cdot\pi$, a količnik $\frac{\frac{100}{3}\cdot\pi}{100\cdot\pi}=\frac{1}{3}.$ Tražimo zbroj prvih osam članova toga niza. On je jednak:

$$Z=100\cdot\pi\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^8-1}{\frac{1}{3}-1}=100\cdot\pi\cdot\frac{\frac{1}{3^8}-1}{-\frac{2}{3}}=100\cdot\pi\cdot\frac{\frac{1}{6561}-1}{-\frac{2}{3}}=100\cdot\pi\cdot\frac{\frac{1-6561}{6561}}{-\frac{2}{3}}=100\cdot\pi\cdot\frac{\frac{-6560}{6561}}{-\frac{2}{3}}=$$
$$=100\cdot\pi\cdot\frac{3280}{2187}=\frac{328000}{2187}\cdot\pi\approx 471.16707379\text{ cm}^2.$$

Preostaje dokazati tvrdnju korištenu u rješenju ovoga zadatka.

Tvrdnja 1. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilo koji geometrijski niz čiji je količnik q. Tada je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran pravilom $b_n = 4\cdot\pi\cdot a_n^2$ također geometrijski niz čiji je količnik q^2.

Dokaz: Dovoljno je dokazati da je količnik bilo kojega člana niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (osim prvoga člana) i njemu neposredno prethodnoga člana konstantan i jednak q^2. Stoga za bilo koji $k\in\mathbb{N}$, $k>1$, imamo:

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{4\cdot\pi\cdot a_k^2}{4\cdot\pi\cdot a_{k-1}^2} = \frac{a_k^2}{a_{k-1}^2} = \left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)^2 = q^2,$$

jer je $\frac{a_k}{a_{k-1}} = q$ prema definiciji geometrijskoga niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Budući da je vrijednost q konstantna, to je i vrijednost q^2 konstantna. Dakle, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je geometrijski niz s količnikom q^2, a to smo i željeli pokazati. ■

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač