TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – VIŠA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **C.** Svi članovi zadane nejednakosti su strogo pozitivni realni brojevi, pa tu nejednakost smijemo kvadrirati. Tako dobijemo nejednakost

$$4^2 < \left(\sqrt{a}\right)^2 < 5^2 \ ,$$

odnosno

$$16 < a < 25.$$

Ovu nejednakost zadovoljava točno 8 prirodnih brojeva: 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 i 24.

2. **A.** Primijenimo adicijski teorem za funkciju tangens:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \ .$$

Uvrstimo li u gornju jednakost $x = \frac{6\cdot\pi}{7}$, $y = \frac{5\cdot\pi}{7}$, dobit ćemo:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{6\cdot\pi}{7} + \frac{5\cdot\pi}{7}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{6\cdot\pi}{7}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\cdot\pi}{7}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{6\cdot\pi}{7}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{5\cdot\pi}{7}\right)} .$$

Desna strana te jednakosti je upravo zadani izraz. Tako slijedi da je zadani izraz jednak

$$\operatorname{tg}\left(\frac{6\cdot\pi}{7} + \frac{5\cdot\pi}{7}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{11\cdot\pi}{7}\right) \approx -4.38128626753 \approx -4.3813.$$

(Peta decimala je jednaka 8, pa cjelobrojni dio i prve tri decimale prepisujemo, dok četvrtu decimalu povećavamo za 1.)

Napomena: Zadatak je moguće riješiti i decimalnom aproksimacijom svake pojedine vrijednosti funkcije tangens npr. s točnošću od 10^{-8}. No, izložena metoda je bolja i jednostavnija jer se izbjegava računanje šest približnih vrijednosti.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – VIŠA RAZINA

3. B. Imamo redom:

$$\begin{gathered}2\cdot x-2\cdot(3\cdot x+7)-5\cdot x^2-8\cdot x=2-5\cdot x^2+10\cdot x-11,\\ 2\cdot x-\ 6\cdot x-14-5\cdot x^2-8\cdot x=2-5\cdot x^2+10\cdot x-11,\\ 2\cdot x-6\cdot x-5\cdot x^2-8\cdot x+5\cdot x^2-10\cdot x=2-11+14,\\ (-22)\cdot x=5.\end{gathered}$$

Odatle dijeljenjem s (–22) dobivamo $x=-\frac{5}{22}$.

4. C. Ako je C_0 početna vrijednost knjigovodstvenoga stola, onda je njegova knjigovodstvena vrijednost nakon jedne godine

$$C_1=C_0-\frac{p}{100}\cdot C_0=\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot C_0,$$

nakon dvije godine

$$C_2=C_1-\frac{p}{100}\cdot C_1=\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot C_1=\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot C_0=\left(1-\frac{p}{100}\right)^2\cdot C_0$$

i nakon tri godine

$$C_3=C_2-\frac{p}{100}\cdot C_2=\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot C_2=\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^2\cdot C_0=\left(1-\frac{p}{100}\right)^3\cdot C_0.$$

Uvrštavanjem $C_0 = 1\ 030$ i $p = 12.5$ dobivamo:

$$C_3=\left(1-\frac{12.5}{100}\right)^3\cdot 1\ 030\approx 690.01953\approx 690.02 \text{ kn}.$$

5. B. Ako je ispleteno ukupno n šalova, onda zarada od prodaje tih n šalova iznosi:

$$Z = n\cdot 79.99-(61\cdot n+1\ 050)=79.99\cdot n-61\cdot n-1\ 050=18.99\cdot n-1\ 050.$$

Tražimo da vrijednost Z bude barem 1 000 kn, pa dobivamo linearnu nejednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$18.99 \cdot n - 1\,050 \geq 1\,000.$$

Nju riješimo na uobičajen način:

$$18.99 \cdot n \geq 1\,050 + 1\,000,$$
$$18.99 \cdot n \geq 2\,050.$$

Odatle dijeljenjem s 18.99 slijedi $n \geq 107.95$. Najmanji prirodan broj koji zadovoljava tu nejednakost je $n = 108$. Dakle, treba isplesti i prodati najmanje 108 šalova.

6. D. Apscisu točke u kojoj dotični graf siječe os apscisa dobit ćemo tako da riješimo jednadžbu $f(x) = 0$, tj. jednadžbu

$$a \cdot x + b = 0.$$

Odavde je $x = -\frac{b}{a}$, pa je sjecište s osi apscisa točka $S_1 = \left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Ordinatu točke u kojoj dotični graf siječe os ordinata dobijemo tako da u pravilo funkcije uvrstimo $x = 0$. Dobivamo:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b.$$

Dakle, sjecište s osi ordinata je točka $S_2 = (0, b)$.

7. D. Za svaku funkciju treba provjeriti jednakost $f(-x) = f(x)$. Za prvu funkciju imamo:

$$f(-x) = (-x)^2 + 3 \cdot (-x) = x^2 - 3 \cdot x \neq x^2 + 3 \cdot x = f(x),$$

pa ta funkcija nije parna. Za drugu funkciju imamo:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3 = -x^3 - 3 \neq x^3 - 3 \cdot x = f(x),$$

pa ni ta funkcija nije parna. Za treću funkciju imamo:

$$f(-x) = 3 \times \sin(2 \cdot (-x)) = 3 \cdot \sin(-2 \cdot x) = 3 \cdot (-1) \cdot \sin(2 \cdot x) = (-1) \cdot 3 \cdot \sin(2 \cdot x) = -f(x),$$

pa ta funkcija nije parna (nego neparna). Napokon, za četvrtu funkciju imamo:

$$f(-x) = 3 \cdot \cos(2 \cdot (-x)) = 3 \cdot \cos(-2 \cdot x) = 3 \cdot \cos(2 \cdot x) = f(x),$$

pa je ta funkcija parna. Ovdje smo primijenili činjenice da je funkcija sin neparna funkcija, a funkcija cos parna, tj. da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijede jednakosti $\sin(-x) = -\sin x$ i $\cos(-x) = \cos x$.

8. B. Prema definiciji logaritamske funkcije (kao inverza eksponencijalne funkcije), iz zadane jednakosti odmah slijedi $y = x^z$. (Može se primijeniti i ekvivalencija jednakosti $A^X = B$ i $\log_A B = X$.)

9. D. Imamo redom:

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1 + 2 \cdot 3) = f(1 + 6) = f(7) = 5^{7-4} = 5^3 = 125.$$

10. A. Imamo redom:

$$\left(\frac{2}{a-1}+\frac{1}{\sqrt{a}+1}\right)^{-3}+3\cdot\left(a-\sqrt{a}\right)=\left(\frac{2}{a-1}+\frac{1}{\sqrt{a}+1}\cdot\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}\right)^{-3}+3\cdot\left(a-\sqrt{a}\right)=\left(\frac{2}{a-1}+\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}\right)^{-3}+$$

$$+3\cdot\left(a-\sqrt{a}\right)=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{a-1}\right)^{-3}+3\cdot\left(a-\sqrt{a}\right)=\left(\frac{a-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{3}+3\cdot\left(a-\sqrt{a}\right)=\left(\frac{a-1}{\sqrt{a}+1}\cdot\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}\right)^{3}+3\cdot\left(a-\sqrt{a}\right)=$$

$$=\left[\frac{(a-1)\cdot\left(\sqrt{a}-1\right)}{a-1}\right]^{3}+3\cdot\left(a-\sqrt{a}\right)=\left(\sqrt{a}-1\right)^{3}+3\cdot\left(a-\sqrt{a}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^{3}-3\cdot\left(\sqrt{a}\right)^{2}\cdot 1+3\cdot\left(\sqrt{a}\right)\cdot 1^2-1^3+$$

$$+3\cdot a-3\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^3}-3\cdot a+3\cdot\sqrt{a}-1+3\cdot a-3\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^2\cdot a}-1=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}-1=a\cdot\sqrt{a}-1.$$

11. C. Opći član u razvoju navedenoga binoma je oblika

$$\binom{10}{k}\cdot(x^3)^k\cdot(x^4)^{10-k}=\binom{10}{k}\cdot x^{3\cdot k}\cdot x^{4\cdot(10-k)}=\binom{10}{k}\cdot x^{3\cdot k+4\cdot(10-k)}=\binom{10}{k}\cdot x^{3\cdot k+40-4\cdot k}=\binom{10}{k}\cdot x^{40-k}.$$

Koeficijent uz x^{33} očito dobivamo ako u navedeni izraz uvrstimo $k = 7$. Primjenom simetrije binomnih koeficijenata slijedi da je traženi koeficijent jednak:

$$\binom{10}{7}=\binom{10}{10-7}=\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120.$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – VIŠA RAZINA

12. C. Označimo s v traženu brzinu iskazanu u km/h. Tada je brzina kamiona $v - 28$ km/h. Put od 600 km kamion prijeđe za $\frac{600}{v-28}$ sati, a kamion za $\frac{600}{v}$ sati. Razlika tih dvaju vremena mora biti jednaka 2 sata i 20 minuta = 2 sata + $\frac{20}{60}$ sati $= 2 + \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$ sati, pa dobivamo jednadžbu:

$$\frac{600}{v-28} - \frac{600}{v} = \frac{7}{3} \ .$$

Množenjem te jednadžbe najmanjim zajedničkim višekratnikom nazivnika svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj, tj. izrazom $3 \cdot v \cdot (v - 28)$ dobivamo:

$$\begin{gathered} 600 \cdot 3 \cdot v - 600 \cdot 3 \cdot (v - 28) = 7 \cdot v \cdot (v - 28), \\ 1\,800 \cdot v - 1\,800 \cdot v + 50\,400 = 7 \cdot v^2 - 196 \cdot v, \\ 7 \cdot v^2 - 196 \cdot v - 50\,400 = 0, \quad /:7 \\ v^2 - 28 \cdot v - 7\,200 = 0. \end{gathered}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $v_1 = -72$ i $v_2 = 100$. Prvo rješenje je strogo negativan realan broj, pa ga zanemarujemo (jer brzina ne može biti strogo negativan realan broj). Zbog toga je jedino rješenje zadatka $v = 100$ km/h.

13. C. Izračunamo:

$$\log(23^{312}) = 312 \cdot \log 23 \approx 424.85908,$$

pa zaključujemo da je zadani broj oblika $A \cdot 10^{424}$, gdje je $A \in [1,10\rangle$. Zbog toga zadani broj ima ukupno $424 + 1 = 425$ znamenaka. (Indukcijom se lako pokaže da broj $A \cdot 10^n$, gdje je $A \in [1,10\rangle$, ima ukupno $n+1$ znamenaka.)

Posljednja znamenka zadanoga broja jednaka je ostatku dijeljenja toga broja s 10. Broj $23^2 = 529$ ima posljednju znamenku 9, pa broj $23^4 = (23^2)^2 = (529)^2$ ima posljednju znamenku 1. No, onda i broj $(23^4)^{78} = ((529)^2)^{78}$ također ima posljednju znamenku 1 jer sve potencije broja čija je posljednja znamenka 1 također imaju posljednju znamenku 1.

Dakle, zadani broj ima 425 znamenaka i njegova posljednja znamenka jednaka je 1.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – VIŠA RAZINA

14. D. Primijetimo najprije da vrijedi jednakost

$$|OA| = |OX| = |XY| = r.$$

Zbog toga je kut $\angle OXA = \alpha$, pa je

$$\angle AOX = 180° - (\alpha + \alpha) = 180° - 2 \cdot \alpha.$$

Nadalje, kutovi $\angle OXA$ i $\angle OXY$ su suplementni (zbroj njihovih mjera je 180°), pa slijedi:

$$\angle OXY = 180° - \angle OXA = 180° - \alpha.$$

Zbog toga je kut uz osnovicu OY jednakokračnoga trokuta OXY jednak

$$\frac{1}{2}\cdot\left(180^\circ - (180^\circ - \alpha)\right) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\,.$$

Posebno, $\angle XOY = \frac{1}{2}\cdot\alpha$. Tako konačno dobivamo:

$$\angle BOY = 180^\circ - (\angle AOX + \angle XOY) = 180^\circ - \left(180^\circ - 2\cdot\alpha + \frac{1}{2}\cdot\alpha\right) = \frac{3}{2}\cdot\alpha\,.$$

15. B. Neka je $ABCD$ zadani trapez takav da su AB dulja osnovica, CD kraća osnovica, $\angle DAB = 90°$ i $\angle ABC = 50°$. Neka je E nožište okomice povučene iz vrha C na osnovicu AB. Očito, $|CE| = |AD|$. Izračunajmo duljinu te dužine. U pravokutnom trokutu BCE su:

$$|BE| = |AB| - |AE| = |AB| - |CD| = 6 - 4 = 2 \text{ cm},$$
$$\angle EBC = \angle ABC = 50°.$$

Zbog toga je $|CE| = 2 \cdot \text{tg } 50°$ cm, pa je i $|AD| = |CE| = 2 \cdot \text{tg } 50°$ cm.

Vrtnjom trapeza oko njegove dulje osnovice nastaje rotacijsko tijelo koje se sastoji od točno jednoga valjka i točno jednoga stošca. Zbog toga je njegov volumen jednak zbroju volumena valjka i volumena stošca.

Polumjer osnovke valjka jednak je duljini dužine AD, dok je njegova visina jednaka duljini dužine AE. Budući da je $|AD| = 2 \cdot \text{tg } 50°$ cm i $|AE| = |CD| = 4$ cm, volumen valjka iznosi

$$V_v = |AD|^2 \cdot |AE| \cdot \pi = 4 \cdot \text{tg}^2 50° \cdot 4 = 16 \cdot \text{tg}^2 50° \cdot \pi \text{ cm}^3.$$

Polumjer osnovke stošca jednak je polumjeru osnovke valjka, a visina stošca jednaka je duljini dužine BE. Budući da su polumjer osnovke valjka $|AD| = 2 \cdot \text{tg } 50°$ cm i $|BE| = 2$ cm, volumen stošca iznosi

$$V_s = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \text{tg } 50^\circ\right)^2 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{8}{3} \cdot \text{tg}^2 50^\circ \cdot \pi \text{ cm}^3.$$

Tako je traženi volumen rotacijskoga tijela jednak

$$V = V_v + V_s = 16 \cdot \text{tg}^2 50^\circ \cdot \pi + \frac{8}{3} \cdot \text{tg}^2 50^\circ \cdot \pi = \left(16 + \frac{8}{3}\right) \cdot \text{tg}^2 50^\circ \cdot \pi = \frac{16 \cdot 3 + 8}{3} \cdot \text{tg}^2 50^\circ \cdot \pi = \frac{56}{3} \cdot \text{tg}^2 50^\circ \cdot \pi \text{ cm}^3.$$

Izračunom vrijednosti V s točnošću na dvije decimale dobivamo $V \approx 83.29$ cm^3.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

16. $\frac{S-a}{S}$ ili $1 - \frac{a}{S}$. Imamo redom:

$$S \cdot (1 - r) = a,$$
$$S - S \cdot r = a,$$
$$S \cdot r = S - a.$$

Odatle dijeljenjem sa S dobivamo:

$$r = \frac{S-a}{S} = \frac{S}{S} - \frac{a}{S} = 1 - \frac{a}{S}.$$

17. 5. Trebamo riješiti nejednadžbu

$$\frac{2}{5} < \frac{n}{11} < \frac{1}{2}$$

u skupu prirodnih brojeva **N**. Pomnožimo li tu nejednadžbu s 11, dobit ćemo:

$$\frac{22}{5} < n < \frac{11}{2},$$

odnosno, zapisom razlomaka u decimalnom obliku,

$$4.4 < n < 5.5.$$

Jedini prirodan broj koji zadovoljava ovu nejednakost jest $n = 5$. Lako se provjeri da doista vrijedi nejednakost $\frac{2}{5} < \frac{5}{11} < \frac{1}{2}$

18. 1.) $4^{\frac{3}{2}\cdot n}$**.** Imamo redom:

$$8^n = (2^3)^n = \left(\left(\sqrt{4}\right)^3\right)^n = \left(\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3\right)^n = 4^{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot n} = 4^{\frac{3}{2}\cdot n} \ .$$

2.) $\frac{30\cdot a+8}{5}$ ili $6\cdot a+\frac{8}{5}$**.** Pomnožimo prvu jednadžbu s 3. Dobivamo:

$$\frac{3}{2}\cdot x - 3\cdot y = 15\cdot a \ .$$

Zbrojimo li ovu jednadžbu s drugom jednadžbom sustava, dobit ćemo:

$$\frac{5}{2}\cdot x = 15\cdot a + 4 \, .$$

Odatle dijeljenjem s $\frac{5}{2}$, tj. množenjem s $\frac{2}{5}$ slijedi:

$$x = \frac{2}{5}\cdot(15\cdot a+4) = \frac{30\cdot a+8}{5} = 6\cdot a + \frac{8}{5} \ .$$

19. 1.) $-\frac{5}{2}$**.** Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$2 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 5 = 0.$$

Očitamo njezine koeficijente: $a = 2$, $b = 9$, $c = -5$. Prema Vièteovim formulama, traženi umnožak rješenja ove jednadžbe jednak je $\frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$

2.) $\left[\frac{1}{2},\ 3\right]$**.** Zadanu nejednadžbu transformirajmo na sljedeći način:

$$-2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 3 \geq 0 \quad / :(-1)$$
$$2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3 \leq 0.$$

Kvadratna funkcija kojoj je vodeći koeficijent (koeficijent uz x^2) strogo pozitivan realan broj poprima nepozitivne vrijednosti samo na segmentu kojega određuju (realne) nultočke te funkcije. Zbog toga riješimo kvadratnu jednadžbu

$$2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3 = 0.$$

Njezina su rješenja $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = 3$. Zbog toga je rješenje zadatka segment $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

20. 1.) 2. Pomnožimo brojnik i nazivnik zadanoga kompleksnog broja s i. Dobivamo:

$$z = \frac{a+2\cdot i}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{a\cdot i+2\cdot i^2}{i^2} = \frac{a\cdot i+2\cdot(-1)}{(-1)} = -a\cdot i+2 = 2-a\cdot i\ .$$

Odatle slijedi da je traženi realni dio jednak 2.

2.) $3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Imamo redom:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{5\cdot\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{5\cdot\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 3\cdot\left(\cos\left(\frac{5\cdot\pi}{6}-\frac{2\cdot\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{5\cdot\pi}{6}-\frac{2\cdot\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= 3\cdot\left(\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{6}\right)\right) = 3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Primijetimo da je

$$z = 3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3\cdot(0+i\cdot 1) = 3\cdot i\,.$$

21. Neka su N broj stanovnika grada Alfa, odnosno grada Beta, a P_A i P_B redom površine tih dvaju gradova. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – VIŠA RAZINA

$$\begin{cases} \dfrac{N}{P_A} = 24\ 000 \\ \dfrac{N}{P_B} = 20\ 000 \\ P_B = P_A + 10.5 \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe je $P_A = \dfrac{N}{24\ 000}$, a iz druge $P_B = \dfrac{N}{20\ 000}$. Uvrštavanjem tih dviju vrijednosti u treću jednadžbu dobijemo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$\frac{N}{20\ 000} = \frac{N}{24\ 000} + 10.5.$$

Pomnožimo li tu jednadžbu sa 120 000, dobit ćemo:

$$6 \cdot N = 5 \cdot N + 1\ 260\ 000,$$

a odatle je $N = 1\ 260\ 000$.

1.) 52.5. Tražena je površina jednaka $P_A = \dfrac{N}{24\ 000} = \dfrac{1\ 260\ 000}{24\ 000} = 52.5$ km^2.

2.) 1 260 000. U gradu Beta živi jednako stanovnika koliko i u gradu Alfa, tj. $N = 1\ 260\ 000$.

22. 1.) 125. Dvije kraće stranice zatvaraju tupi kut. Označimo taj kut s α, a stranice kojega zatvaraju s b i c. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $b = 7$ cm i $c = 10$ cm. Iz

$$P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

slijedi

$$\sin\alpha = \frac{2 \cdot P}{b \cdot c} = \frac{2 \cdot 28.67}{7 \cdot 10} = \frac{28.67}{35} = \frac{2\ 867}{3\ 500}.$$

U segmentu $[0, \pi]$ ova trigonometrijska jednadžba ima dva rješenja: $\alpha_1 = 55°$ i $\alpha_2 = 125°$. Budući da α mora biti tupi kut, rješenje α_1 zanemarujemo, pa preostaje $\alpha = 125°$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – VIŠA RAZINA

2.) $\sqrt{56} = 2 \cdot \sqrt{14}$ **.** Iz zadanih podataka zaključujemo da točka D dijeli dužinu BC u omjeru 2 : 1 računajući od točke B. Zbog toga podijelimo duljinu te dužine, tj. 12 cm, u omjeru 2 : 1. Pripadni omjerni koeficijent iznosi

$$k = \frac{12}{2+1} = \frac{12}{3} = 4 \quad ,$$

pa su duljine dijelova $2 \cdot 4 = 8$ cm i $1 \cdot 4 = 4$ cm, tj. $|BD| = 8$ cm i $|DC| = 4$ cm.

Nadalje, neka je x tražena udaljenost. Izrazimo kosinus kuta kod vrha B na dva načina: pomoću duljina stranica trokuta ABC i pomoću duljina stranica trokuta ABD. Primjenom kosinusova teorema imamo:

$$\cos\beta = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BC|} = \frac{|AB|^2 + |BD|^2 - |AD|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BD|} \quad ,$$

$$\cos\beta = \frac{8^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 12} = \frac{8^2 + 8^2 - x^2}{2 \cdot 8 \cdot 8}$$

odnosno

$$\frac{108}{12} = \frac{128 - x^2}{8},$$

$$9 = \frac{128 - x^2}{8}$$

$$128 - x^2 = 9 \cdot 8,$$

$$128 - x^2 = 72,$$

$$x^2 = 128 - 72,$$

$$x^2 = 56.$$

Ova kvadratna jednadžba ima dva rješenja, ali zbog prirodnoga uvjeta na vrijednost nepoznanice x (tj. uvjeta $x > 0$) u obzir dolazi samo strogo pozitivno rješenje

$$x = \sqrt{56} = \sqrt{4 \cdot 14} \quad = \sqrt{4} \cdot \sqrt{14} = 2 \cdot \sqrt{14} \text{ cm}.$$

23. Neka su h visina koju dosežu ljestve, d_1 udaljenost podnožja duljih ljestava od zida i d_2 udaljenost podnožja kraćih ljestava od zida. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} h^2 + d_1^2 = 5.6^2 \\ h^2 + d_2^2 = 4.2^2 \\ d_1 - d_2 = 1.96 \end{cases}$$

Oduzimanjem prve i druge jednadžbe sustava dobijemo:

$$d_1^2 - d_2^2 = 5.6^2 - 4.2^2,$$
$$(d_1 - d_2)\cdot(d_1 + d_2) = 13.72$$

U posljednju jednakost uvrstimo treću jednadžbu sustava, pa slijedi:

$$1.96\cdot(d_1 + d_2) = 13.72,$$

odnosno, nakon dijeljenja s 1.96,

$$d_1 + d_2 = 7.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$d_1 - d_2 = 1.96,$$
$$d_1 + d_2 = 7.$$

1.) 2.52. Oduzimanjem prve jednadžbe gornjega sustava od druge dobivamo:

$$2 \cdot d_2 = 5.04,$$

a odavde dijeljenjem s 2 slijedi $d_2 = 2.52$ m.

2.) 3.36. Uvrstimo $d_2 = 2.52$ u drugu jednadžbu sustava s početka rješenja zadatka, pa dobivamo:

$$h^2 + 2.52^2 = 4.2^2,$$
$$h^2 = 4.2^2 - 2.52^2,$$
$$h^2 = 11.2896.$$

Ova kvadratna jednadžba ima dva rješenja: $h_1 = -3.36$ i $h_2 = 3.36$. Zbog prirodnoga uvjeta na vrijednost nepoznanice h (tj. uvjeta $h > 0$), prvo rješenje zanemarujemo, pa preostaje $h = h_2 = 3.36$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – VIŠA RAZINA

24. 1.) $\frac{7}{6}\cdot\pi$. Mjera kuta u prvom kvadrantu čiji je kosinus jednak $\frac{\sqrt{3}}{2}$ je 30°, odnosno $\frac{\pi}{6}$ radijana. Primjenom trigonometrijskoga identiteta

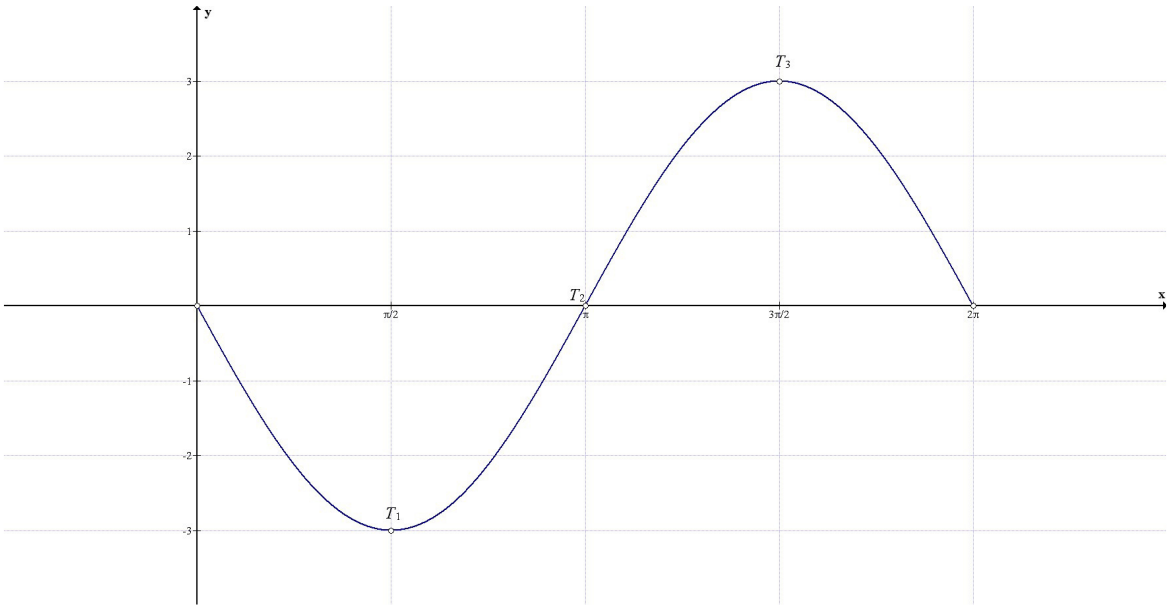
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

zaključujemo da kut čija je mjera $\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\cdot\pi$ radijana ima kosinus $\frac{-\sqrt{3}}{2}$. Dakle, $x=\frac{7}{6}\cdot\pi$.

2.) Vidjeti sliku 1. Zadanu funkciju najpodesnije je grafički prikazati tako da se izračunaju njezine vrijednosti za $x\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\cdot\pi,2\cdot\pi\right\}$. Dobivamo sljedeću tablicu:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\cdot\pi$	$2\cdot\pi$
$f(x)$	0	–3	0	3	0

Dakle, u priloženi koordinatni sustav ucrtamo točke $T_1=\left(\frac{\pi}{2},-3\right)$, $T_2=(\pi,0)$ i $T_3=\left(\frac{3}{2}\cdot\pi,\ 3\right)$ jer su točke $T_0 = O = (0, 0)$ i $T_4 = (2\cdot\pi, 0)$ već ucrtane. Potom ih spojimo sinusoidom. Dobivamo:



Slika 1.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – VIŠA RAZINA

25. 1.) $\boldsymbol{-8 \cdot x^{-5}}$**.** Primjenom pravila za deriviranje potencije imamo:

$$f'(x) = 2 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} = -8 \cdot x^{-5}.$$

2.) $3 \cdot \cos(3 \cdot x + 11)$. Primijenit ćemo pravilo za deriviranje složene funkcije, kao i identitete:

$$(\sin x)' = \cos x,$$
$$(a \cdot x + b)' = a.$$

Dakle, zadanu funkciju deriviramo tako da najprije deriviramo funkciju koja djeluje posljednja (to je funkcija sin), a njezin argument prepišemo, pa potom dobiveni izraz pomnožimo derivacijom navedenoga argumenta. Imamo redom:

$$g'(x) = \cos(3 \cdot x + 11) \cdot (3 \cdot x + 11)' = \cos(3 \cdot x + 11) \cdot 3 = 3 \cdot \cos(3 \cdot x + 11)$$

3.) $\boldsymbol{k = 12}$**.** Prema geometrijskoj interpretaciji prve derivacije funkcije u točki, traženi koeficijent smjera jednak je vrijednosti prve derivacije funkcije h u točki $x = 2$. Odredimo h':

$$h'(x) = (x^3)' - (1)' = 3 \cdot x^{3-1} - 1 = 3 \cdot x^2.$$

Zbog toga je traženi koeficijent jednak

$$k = h'(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12.$$

26. (1, 2). Vidjeti sliku 2. Iz zadanoga pravila funkcije očitamo:

$$a = 1,\ b = -2,\ c = 3.$$

Zbog toga je prva koordinata x_T tjemena parabole

$$x_T = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1.$$

Drugu koordinatu y_T najbrže ćemo izračunati kao $f(x_T)$, tj. kao $f(1)$:

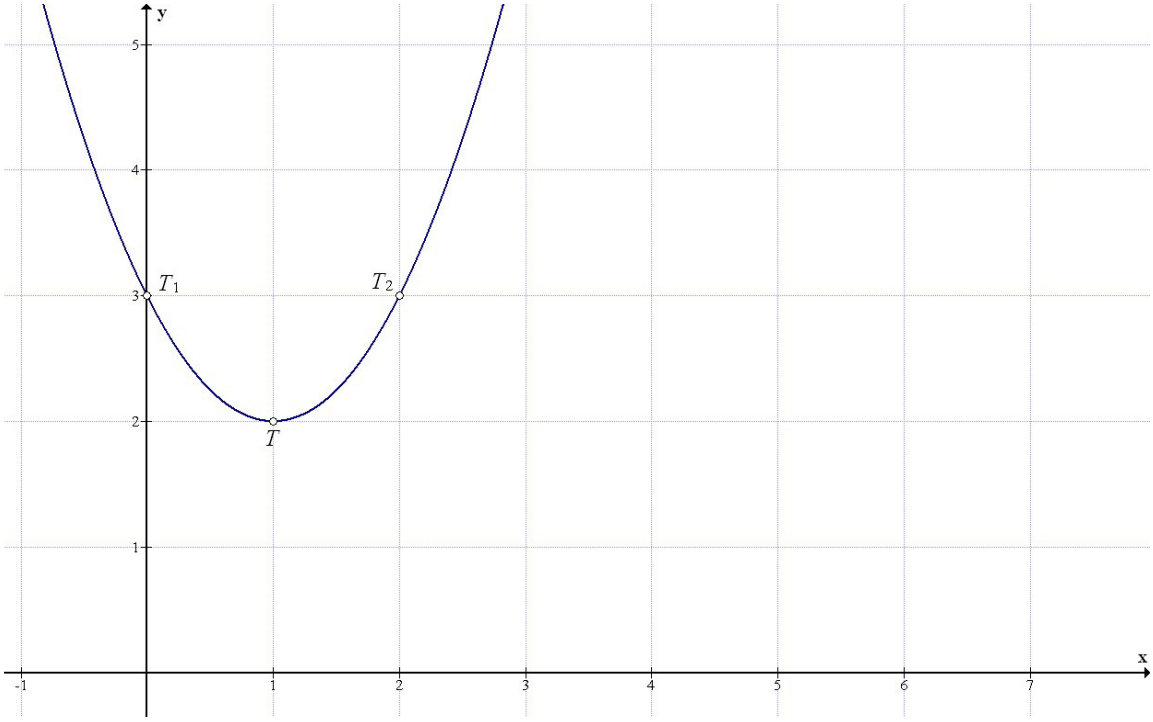
$$y_T = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2.$$

Dakle, tjeme parabole je točka $T = (1, 2)$. Da bismo nacrtali graf parabole, dovoljno je odrediti još neke dvije njezine međusobno različite točke. Budući da je $a = 1 > 0$, funkcija f

ima globalni minimum 2 (druga koordinata tjemena), pa njezin graf ne siječe os apscisa. Zbog toga odaberimo npr. $x = 0$ i $x = 2$, pa izračunajmo:

$$f(0) = c = 3,$$
$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3,$$

što znači da zadana parabola prolazi točkama $T_1 = (0,\ 3)$ i $T_2 = (2,\ 3)$. (Općenitije, ako parabola prolazi točkom $T_k = (x_T - k,\ y_k)$, onda prolazi i točkom $T_k' = (x_T + k, y_k)$, za svaki $k > 0$. U ovom smo slučaju odabrali $k = 1$.) Traženi graf prikazan je na slici 2.



Slika 2.

27. $\left\langle -1,\ \frac{3}{2} \right\rangle$; $\frac{2}{3}$. Svaki pojedini logaritmand mora biti strogo pozitivan, pa dobivamo sustav dviju linearnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom:

$$\begin{cases} 1 + x > 0, \\ 3 - 2 \cdot x > 0 \end{cases}.$$

Njega riješimo standardno:

$$\begin{cases} x > -1 \\ (-2)\cdot x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\langle -1,\ \frac{3}{2} \right\rangle.$$

Dakle, prirodno područje definicije (domena) zadane funkcije je (otvoreni) interval $\left\langle -1,\ \frac{3}{2} \right\rangle$.

Preostaje odrediti nultočke zadane funkcije. Imamo redom:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ & \log(1+x) - \log(3-2\cdot x) = 0, \\ & \log(1+x) = \log(3-2\cdot x), \\ & 1+x = 3-2\cdot x, \\ & x+2\cdot x = 3-1, \\ & 3\cdot x = 2. \end{aligned}$$

(Zbog bijektivnosti logaritamske funkcije vrijednosti logaritama su međusobno jednake ako i samo ako su i logaritmandi međusobno jednaki.) Odatle dijeljenjem s 3 slijedi $x = \frac{2}{3}$.

Ta vrijednost očito pripada intervalu $\left\langle -1,\ \frac{3}{2} \right\rangle$, pa je ona ujedno i jedinstveno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$.

28. 1.) 27. Riječ je o aritmetičkom nizu. Prvi član toga niza je $a_1 = 21$, a razlika niza je

$$d = a_2 - a_1 = \frac{87}{4} - 21 = \frac{87 - 21\cdot 4}{4} = \frac{87-84}{4} = \frac{3}{4}.$$

Zbog toga je deveti član toga niza jednak

$$a_9 = a_1 + (9-1)\cdot d = 21 + 8\cdot\frac{3}{4} = 21 + 6 = 27$$

2) 3. Prvi član reda je $a_1 = 1$, a količnik dvaju susjednih članova reda je

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}.$$

Zbog toga je traženi zbroj reda jednak

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

3.) 978. Nizovi Markovih dnevnih isplata tvore geometrijski niz čiji su prvi član i količnik jednaki 2. U n–tom danu Marko plaća iznos od točno 2^n kuna, pa ostatak duga na kraju toga dana iznosi:

$$O_n = 2\ 000 - (2+4+...+2^n) = 2\ 000 - 2\cdot\frac{2^n-1}{2-1} = 2\ 000 - 2\cdot(2^n-1) = 2\ 002 - 2^{n+1}\ .$$

Odredimo najmanji prirodan broj n takav da je ostatak duga strogo manji od predviđene dnevne rate, tj. takav da vrijedi $O_n < 2^n$. U tu ćemo svrhu riješiti nejednadžbu

$$2002 - 2^{n+1} < 2^n.$$

Transformirajmo je na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&2^{n+1} + 2^n > 2002,\\
&2^n \cdot (2+1) > 2002,\\
&3\cdot 2^n > 2002,\\
&2^n > \frac{2\ 002}{3}.
\end{aligned}$$

Odatle je

$$n > \log_2\left(\frac{2\ 002}{3}\right) = \frac{\log\left(\frac{2\ 002}{3}\right)}{\log 2} = \frac{\log(2002) - \log 3}{\log 2} \approx 9.38$$

Budući da n mora biti prirodan broj, slijedi $n = 10$. Dakle, ostatak duga nakon prvih 9 dana iznosi

$$O_9 = 2002 - 2^{9+1} = 2002 - 2^{10} = 2002 - 1024 = 978 \text{ kn}.$$

Desetoga bi dana Marko trebao vratiti $2^{10} = 1\ 024$ kn. Umjesto te svote, vratit će preostalih 978 kn.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – VIŠA RAZINA

III. ZADATCI PRODUŽENOG ODGOVORA

29. 1.) $y = 3 \cdot x + 5$. **Vidjeti sliku 3.** Skup svih točaka jednako udaljenih od dviju fiksiranih točaka A i B je simetrala dužine $\overline{AB}$. To je pravac koji prolazi polovištem dužine $\overline{AB}$ okomito na pravac kroz točke A i B. U ovom je slučaju polovište dužine $\overline{AB}$ točka

$$P = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (-1, 2),$$

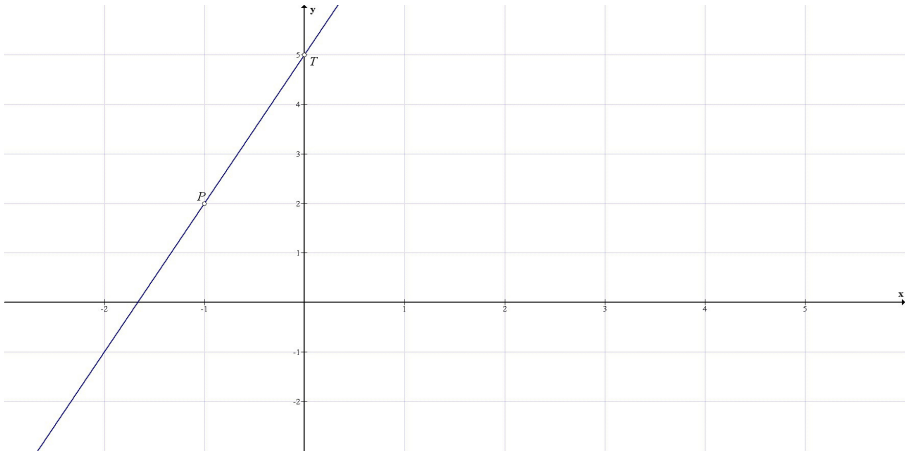
a koeficijent smjera tražene simetrale

$$k_s = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}} = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = -\frac{2-(-4)}{1-3} = -\frac{2+4}{-2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Traženu jednadžbu simetrale s odredit ćemo kao jednadžbu pravca koji prolazi točkom P i ima koeficijent smjera k_s:

$$s \ldots\ y - 2 = 3 \cdot (x - (-1)),$$
$$s \ldots\ y = 3 \cdot x + 3 + 2,$$
$$s \ldots\ y = 3 \cdot x + 5.$$

Dobiveni pravac s prolazi točkom P i na osi ordinata odsijeca odsječak $n = 5$, tj. prolazi i točkom $T = (0, 5)$. Zbog toga u priloženi pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtamo točke P i T, pa ih spojimo jednim pravcem. Dobivamo pravac prikazan na Slici 3.



Slika 3.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – VIŠA RAZINA

2.) $\vec{i}+6\cdot\vec{j}$**.** Primijetimo da je $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$, pa odmah dobivamo:

$$\overrightarrow{MP}=(x_P-x_M)\cdot\vec{i}+(y_P-_M)\cdot\vec{j}=(-1-(-2))\cdot\vec{i}+(3-(-3))\cdot\vec{j}=(-1+2)\cdot\vec{i}+(3+3)\cdot\vec{j}=1\cdot\vec{i}+6\cdot\vec{j}=\vec{i}+6\cdot\vec{j}.$$

3.) $F_1=\left(-\sqrt{13},0\right)$, $F_2=\left(\sqrt{13},0\right)$; $y=-\frac{3}{2}\cdot x$, $y=\frac{3}{2}\cdot x$ Jednadžbu hiperbole najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}&9\cdot x^2-4\cdot y^2=36 \quad /:36\\&\frac{9\cdot x^2}{36}-\frac{4\cdot y^2}{36}=1,\\&\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.\end{aligned}$$

Iz posljednjega oblika lagano očitamo $a^2=4$, $b^2=9$. Zbog toga su koordinate žarišta hiperbole

$$F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{a^2+b^2},0\right)=\left(\pm\sqrt{4+9},0\right)=\left(\pm\sqrt{13},0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}F_1=\left(-\sqrt{13},0\right)\\F_2=\left(\sqrt{13},0\right)\end{cases},$$

a jednadžbe njezinih asimptota

$$a_{1,2}...y=\pm\frac{b}{a}\cdot x=\pm\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{a^2}}\cdot x=\pm\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}\cdot x=\pm\frac{3}{2}\cdot x\Leftrightarrow\begin{cases}a_1...y=-\frac{3}{2}\cdot x,\\a_2...y=\frac{3}{2}\cdot x\end{cases}.$$

4.) $y=2\cdot x$ i $y=2\cdot x-10$. Iz zahtjeva da tražene tangente budu usporedne sa zadanim pravcem zaključujemo da svaka od njih ima jednadžbu oblika $y=2\cdot x+l$, gdje je $l\in\mathbb{R}$. Presijecimo familiju pravaca $y=2\cdot x+l$ sa zadanom kružnicom, tj. riješimo sustav:

$$\begin{cases}y=2\cdot x+l\\(x-1)^2+(y+3)^2=5\end{cases}$$

po nepoznanicama x i y. Uvrstimo li prvu jednadžbu toga sustava u drugu jednadžbu, dobit ćemo:

$$(x-1)^2+(2\cdot x+l+3)^2=5,$$

pa nakon provedenoga kvadriranja dalje imamo:

$$\begin{aligned}
&x^2-2\cdot x+1+4\cdot x^2+4\cdot x\cdot(l+3)+(l+3)^2=5,\\
&5\cdot x^2+(4\cdot(l+3)-2)\cdot x+(l+3)^2-4=0,\\
&5\cdot x^2+(4\cdot l+12-2)\cdot x+l^2+6\cdot l+9-4=0,\\
&5\cdot x^2+(4\cdot l+10)\cdot x+l^2+6\cdot l+5=0.
\end{aligned}$$

Želimo li dobiti tangente, ova kvadratna jednadžba mora imati jedinstveno rješenje (po nepoznanici x). Odredimo njezinu diskriminantu:

$$\begin{aligned}
D&=(4\cdot l+10)^2-4\cdot 5\cdot\left(l^2+6\cdot l+5\right)=\\
&=16\cdot l^2+80\cdot l+100-20\cdot l^2-120\cdot l-100=\\
&=(-4)\cdot l^2-40\cdot l=\\
&=(-4)\cdot l\cdot(l+10).
\end{aligned}$$

Da bi promatrana kvadratna jednadžba imala jedinstveno rješenje, nužno je i dovoljno da vrijedi $D = 0$ (uvjet da koeficijent uz x^2 bude različit od nule očito je ispunjen). Tako iz jednadžbe $D = 0$ odmah slijedi $l_1 = 0$ i $l_2 = -10$. Dakle, tražene tangente su t_1... $y = 2 \cdot x$ i t_2 ... $y = 2 \cdot x - 10$.

5.) $\frac{3}{2}\cdot\sqrt{5}\approx 3.3541$. Iz zadanih podataka proizlazi da je duljina velike osi poluelipse $2 \cdot a = 12$ m, dok je duljina male poluosi $b = 4.5$ m. Dakle, osnovni elementi poluelipse su $a = 6$ m i $b = 4.5$ m. Smjestimo poluelipsu u pravokutni koordinatni sustav u ravnini tako da bude simetrična s obzirom na os ordinatu i da vrhovi njezine velike osi leže na osi apscisa. To znači da je jednadžba poluelipse

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4.5^2}=1,$$

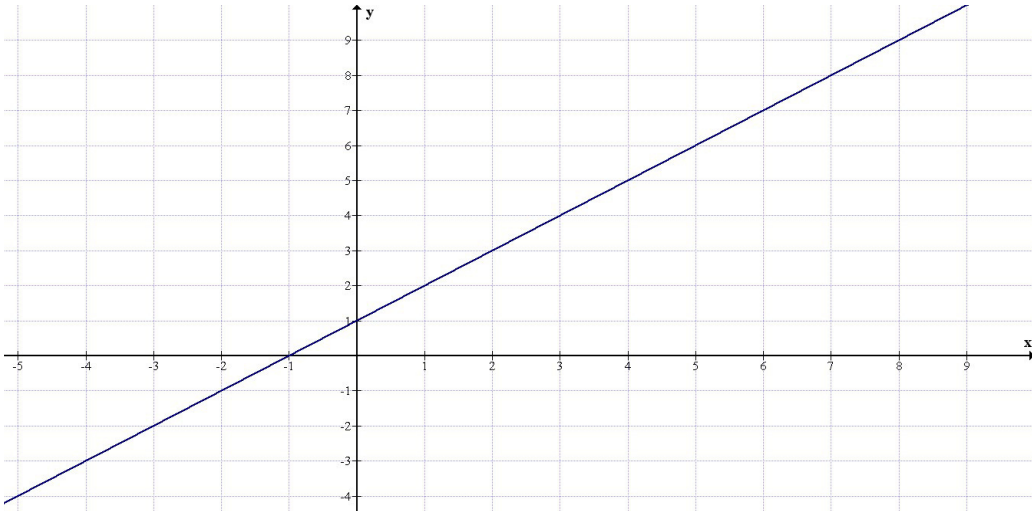
pri čemu je $x \in [-6, 6]$, $y \in [0, 4.5]$. Krajevi velike osi elipse su točke $A = (-6, 0)$ i $B = (6, 0)$. Točka na zemlji udaljena 2 m od desnoga ruba tunela ima koordinate $C = (4, 0)$. Zbog toga tražimo točku poluelipse čija je apscisa jednaka 4. Njezina ordinata h bit će upravo tražena visina. Uvrstimo li $x = 4$ u jednadžbu poluelipse, dobit ćemo:

$$\frac{4^2}{6^2}+\frac{h^2}{4.5^2}=1,$$
$$\frac{h^2}{4.5^2}=1-\frac{4^2}{6^2},$$
$$h^2=4.5^2\cdot\left(1-\left(\frac{4}{6}\right)^2\right)=\left(\frac{9}{2}\right)^2\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)=\frac{81}{4}\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right)=\frac{81}{4}\cdot\left(\frac{9-4}{9}\right)=\frac{81}{4}\cdot\frac{5}{9}=\frac{9}{4}\cdot 5.$$

Odatle uzimanjem drugoga korijena slijedi da je tražena visina jednaka

$$h=\sqrt{\frac{9}{4}\cdot 5}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{5}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{5}\approx 3.3541\,\text{m}.$$

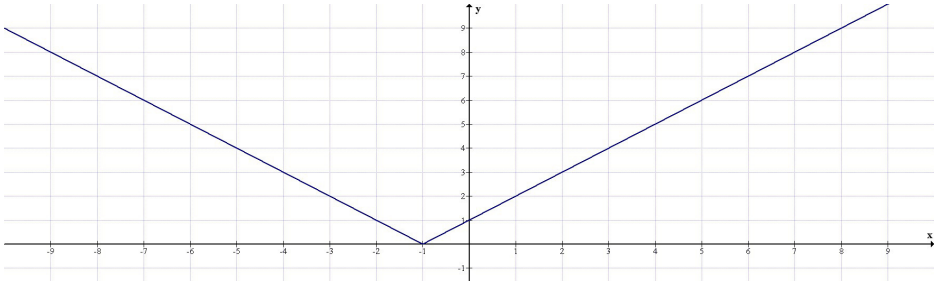
30. $a\in\left\langle-\sqrt{5},-1\right\rangle\cup\left\langle 1,\sqrt{5}\right\rangle$**.** Zadatak ćemo najlakše i najbrže riješiti grafički. U pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini nacrtamo pravac $y = x + 1$ (odaberemo npr. $x = -1$ i $x = 0$, pa dobivamo točke (–1, 0) i (0, 1) koje ucrtamo u pravokutni koordinatni sustav u ravnini i spojimo jednim pravcem). Dobivamo krivulju prikazanu na slici 4.



Slika 4.

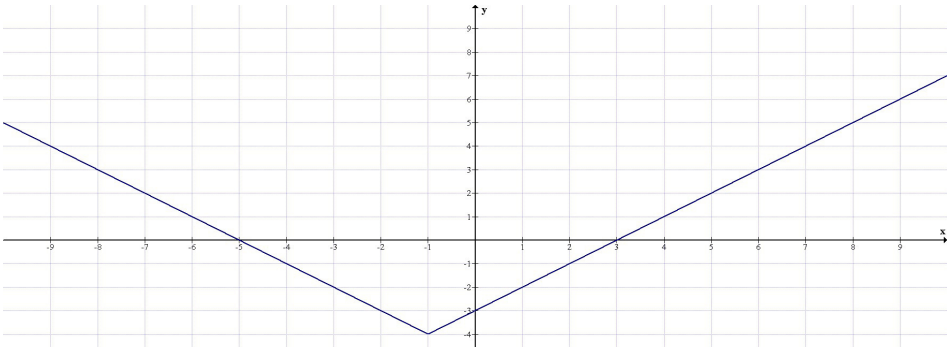
Krivulju $y = |x + 1|$ dobijemo tako da dio gornjega pravca koji se nalazi ispod osi apscisa zrcalimo s obzirom na os apscisa. Npr. ispod osi apscisa nalazi se i točka (–2, –1). Njezina zrcalna slika s obzirom na os apscisa je točka (–2, 1). Tu točku spojimo pravcem s točkom (–1, 0), pri čemu spojnica ne smije prijeći os apscisu. Dobivamo krivulju prikazanu na slici 5.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – VIŠA RAZINA



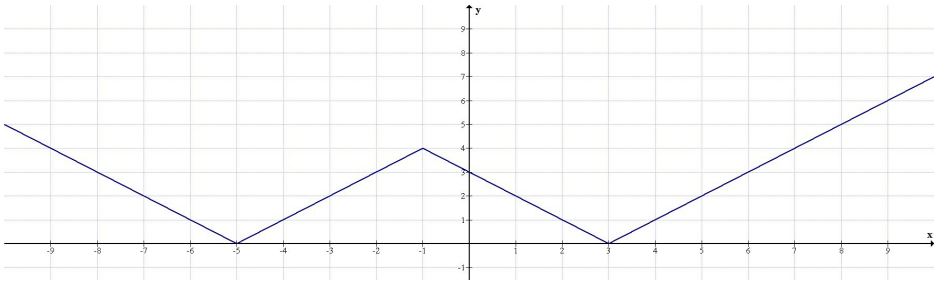
Slika 5.

Krivulju $y = |x + 1| - 4$ dobivamo tako da svaku točku gornje krivulje pomaknemo usporedno s osi y za 4 jedinice nadolje. Tako se točka s koordinatama $(x_T,\ y_T)$ preslikava u točku s koordinatama $(x_T,\ y_T - 4)$. Npr. točka (–2, 1) preslika se u točku (–2, –3), točka (–1, 0) u točku (–1, –4), a točka (0, 1) u točku (0, –3). Spojivši te točke analogno kao na slici 5., dobivamo krivulju prikazanu na slici 6:



Slika 6.

Napokon, krivulju $y = ||x + 1| - 4|$ dobivamo (ponovno) tako da dio gornje krivulje ispod osi apscisa zrcalimo s obzirom na os apscisa. Tako se točka (–1, –4) preslikava u točku (–1, 4), točka (–2, –3) u točku (–2, 3) itd., dok npr. točke (–5, 0) i (3, 0) ostaju fiksirane. Dobivamo krivulju prikazanu na Slici 7.



Slika 7.

Iz te slike vidimo da će pravac $y = 5 - a^2$ (usporedan s osi apscisa) presjeći gornju krivulju u točno četiri točke ako i samo ako je $y \in \langle 0, 4\rangle$. Za $y = 0$ dobiju se točno dva sjecišta, dok se za $y = 4$ dobiju točno tri sjecišta. Za ostale vrijednosti varijable y pravac ili uopće ne siječe gornju krivulju ili je siječe u točno dvije točke.

Zbog toga preostaje riješiti nejednadžbu

$$0 < 5 - a^2 < 4,$$

Svakom članu ove nejednadžbe oduzmemo 5, pa imamo redom:

$$\begin{aligned} -5 < -a^2 < -1 \quad & /:(-1) \\ 1 < a^2 < 5 \quad & /\sqrt{} \\ 1 < |a| < \sqrt{5}\,. & \end{aligned}$$

Rješenje ove nejednadžbe je $a \in \left\langle -\sqrt{5}, -1\right\rangle \cup \left\langle 1, \sqrt{5}\right\rangle$. Dakle, za svaki $a \in \left\langle -\sqrt{5}, -1\right\rangle \cup \left\langle 1, \sqrt{5}\right\rangle$ polazna jednadžba ima točno četiri rješenja.

Napomena: Lako se pokaže da je, uz uvjet $0 < a < b$, skup svih rješenja nejednadžbe $a < |x| < b$ dan sa $S = \langle -b, -a\rangle \cup \langle a, b\rangle$. Analogna tvrdnja vrijedi ako znakove stroge nejednakosti zamijenimo znakovima $\leq$.

pripremio:
mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač