TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB	Matematika na državnoj maturi	rješenja zadataka iz kolovoza 2021. (osnovna razina)

1. **C**. Prema pretpostavci, vrijedi jednakost: $M = \frac{1}{5} \cdot N$. Iz te jednakosti slijedi:

$$M = \frac{1 \cdot 20}{5 \cdot 20} \cdot N = \frac{20}{100} \cdot N = 20\% \cdot N.$$

Dakle, broj M je 20% broja N.

2. **B**. Vrijede aproksimacije:

$$\frac{-11}{3} = -3.\dot{6} \approx -3.66667,$$
$$\frac{-2}{3} = -0.\dot{6} \approx -0.66667.$$

Odatle zaključujemo da brojevi –3.7, –0.6 i –0.2 ne pripadaju zadanom intervalu (prvi od tih triju brojeva je strogo manji od $\frac{-11}{3}$, dok su ostala dva strogo veća od $\frac{-2}{3}$). Dakle, zadanom intervalu pripada jedino broj –2.1.

3. **D**. Omjer površine kružnoga isječka čiji je središnji kut 200° i površine kruga mora biti jednak omjeru broja osobnih automobila i ukupnoga broja vozila koja su u tom danu prošla križanjem. Označimo li traženi broj s N, a polumjer zadanoga kruga s r, dobivamo:

$$\frac{r^2 \cdot \pi \cdot 200^\circ}{360^\circ} : r^2 \cdot \pi = 150 : N,$$
$$\frac{200^\circ}{360^\circ} = \frac{150}{N},$$
$$\frac{5}{9} = \frac{150}{N},$$
$$\frac{N}{150} = \frac{9}{5},$$
$$N = \frac{9}{5} \cdot 150 = 9 \cdot 30 = 270.$$

Prema tome, križanjem je toga dana prošlo ukupno 270 vozila.

4. **D**. Izračunajmo vrijednosti zadane funkcije za $x \in \{-1, 2, 3\}$:

$$f(-1) = 4 \cdot (-1) - (-1)^2 = -4 - 1 = -5,$$
$$f(2) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4,$$

$$f(3) = 4 \cdot 3 - 3^2 = 12 - 9 = 3.$$

Odatle zaključujemo da zadanoj funkciji pripada četvrta ponuđena tablica.

5. **D**. Imamo redom:

$$\left| \frac{2 \cdot (-1) - 3}{|-1| - 2} \right| = \left| \frac{-2-3}{1-2} \right| = \left| \frac{-5}{-1} \right| = |5| = 5.$$

6. **D**. Primijetimo najprije da je nužno $y \neq 0$. Množenjem prve jednadžbe s y dobivamo $x = 7 \cdot y$. Uvrštavanjem ovoga izraza u drugu jednadžbu slijedi:

$$3 \cdot (7 \cdot y) = y + 5 \Leftrightarrow 21 \cdot y = y + 5 \Leftrightarrow 21 \cdot y - y = 5 \Leftrightarrow 20 \cdot y = 5.$$

Odatle dijeljenjem s 20 slijedi $y = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

7. **C**. Od 20 sati i 37 minuta do 21 sat prošle su 23 minute. Od 21 sat do ponoći prošla su 3 sata. Od ponoći do 7 sati ujutro prošlo je 7 sati. Od 7 sati ujutro do 7 sati i 40 minuta prošlo je 40 minuta. Dakle, ukupno je prošlo

$$(3+7)\text{ sati} + (23+40)\text{ minuta} = 10\text{ sati} + 63\text{ minute} =$$
$$= 10\text{ sati} + (1\text{ sat} + 3\text{ minute}) = 11\text{ sati i } 3\text{ minute}.$$

8. **B**. Promatrana grupa se sastoji od 18 učenica i $32 - 18 = 14$ učenika. Budući da svi učenici nisu dešnjaci, ukupan broj učenika koji su dešnjaci je jednak ili manji od 13. Budući da je ukupan broj svih dešnjaka jednak 23, ukupan broj učenica koje pišu desnom rukom mora biti jednak ili veći od $23 - 13 = 10$. Dakle, traženi je broj jednak 10.

9. **B**. Mjera unutrašnjega kuta jednakostraničnoga trokuta iznosi $\frac{(3-2) \cdot 180^\circ}{3} = 60^\circ$. Mjera unutrašnjega kuta kvadrata iznosi $\frac{(4-2) \cdot 180^\circ}{4} = 90^\circ$. Mjera unutrašnjega kuta pravilnoga peterokuta iznosi $\frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. Tražena mjera zbrojena zajedno s navedenim trima mjerama mora dati mjeru punoga kuta, tj. 360°, pa dobivamo:

$$\alpha = 360^\circ - \left(60^\circ + 90^\circ + 108^\circ\right) = 360^\circ - 258^\circ = 102^\circ.$$

10. **B**. Primjenom Pitagorina poučka odredimo duljinu druge stranice pravokutnika:

$$b=\sqrt{13.3^2-4.8^2}=\sqrt{176.89-23.04}=\sqrt{153.85}\approx 12.4036285 \text{ cm}.$$

Tako slijedi da je traženi opseg jednak približno:

$$O\approx 2\cdot(4.8+12.4)=2\cdot 17.2=34.4 \text{ cm}.$$

11. **A**. Osjenčano tijelo je piramida. Njezina osnovka je pravokutnik čije su stranice duge 4.2 cm i 2 cm, dok je duljina njezine visine jednaka $\frac{1}{2}\cdot 3.8=1.9$ cm. Tako je traženi obujam jednak:

$$V=\frac{1}{3}\cdot 4.2\cdot 2\cdot 1.9=1.4\cdot 2\cdot 1.9=5.32 \text{ cm}^3.$$

12. **C**. Najprije dokažimo pomoćnu tvrdnju.

Tvrdnja 1. Neka je $n\in\mathbb{N}$ proizvoljan, ali fiksiran prirodan broj. Pretpostavimo da aritmetička sredina svih modaliteta nekoga obilježja u uzorku od N_i objekata iznosi s_i, za svaki $i=1,2,...,n$. Tada je aritmetička sredina vrijednosti svih $\sum_{i=1}^{n}N_i$ modaliteta toga obilježja jednaka

$$s=\frac{\sum_{i=1}^{n}s_i\cdot N_i}{\sum_{i=1}^{n}N_i}.$$

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su objekti označeni brojevima $1,...,N_1,N_1+1,...,N_1+N_2,N_1+N_2+1,...,\sum_{i=1}^{n}N_i$, te da je x_i vrijednost obilježja za *i*-ti objekt, za svaki $i=1,2,...,\sum_{i=1}^{n}N_i$. Prema pretpostavci zadatka vrijedi sljedećih *n* jednakosti:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{N_1}}{N_1}=s_1,$$

$$\frac{x_{N_1+1}+x_{N_1+2}+...+x_{N_1+N_2}}{N_2}=s_2,$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_{\sum_{i=1}^{n-1}N_i+1}+x_{\sum_{i=1}^{n-1}N_i+2}+...+x_{\sum_{i=1}^{n}N_i}}{N_n}=s_n.$$

Množenjem svake od njih nazivnikom razlomka na njezinoj lijevoj strani dobivamo:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \ldots + x_{N_1} = s_1 \cdot N_1, \\
&x_{N_1+1} + x_{N_1+2} + \ldots + x_{N_1+N_2} = s_2 \cdot N_2, \\
&\vdots \\
&x_{\sum_{i=1}^{n-1} N_i + 1} + x_{\sum_{i=1}^{n-1} N_i + 2} + \ldots + x_{\sum_{i=1}^{n} N_i} = s_n \cdot N_n.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem svih dobivenih jednakosti (posebno zbrajajući njihove lijeve, a posebno njihove desne strane) slijedi:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{N_1} + x_{N_1+1} + x_{N_1+2} + \ldots + x_{N_1+N_2} + \ldots + x_{\sum_{i=1}^{n-1} N_i + 1} + x_{\sum_{i=1}^{n-1} N_i + 2} + \ldots + x_{\sum_{i=1}^{n} N_i} =$$

$$s_1 \cdot N_1 + s_2 \cdot N_2 + \ldots + s_n \cdot N_n,$$

$$\sum_{i=1}^{\sum_{i=1}^{n} N_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot N_i, \qquad / : \sum_{i=1}^{n} N_i$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\sum_{i=1}^{n} N_i} x_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot N_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i}.$$

Lijeva strana posljednje jednakosti je upravo aritmetička sredina vrijednosti svih $\sum_{i=1}^{n} N_i$ modaliteta promatranoga obilježja jer je riječ o količniku zbroja vrijednosti svih modaliteta i njihovoga ukupnoga broja. Dakle,

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot N_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i},$$

što je i trebalo dokazati. ■

Posljedica: Pretpostavimo da aritmetička sredina svih modaliteta nekoga obilježja u uzorku od N_i objekata iznosi s_i, za svaki $i = 1, 2$. Tada je aritmetička sredina vrijednosti svih $N_1 + N_2$ modaliteta toga obilježja jednaka

$$s = \frac{s_1 \cdot N_1 + s_2 \cdot N_2}{N_1 + N_2}.$$

U zadatku kojega rješavamo su $s_1 = 58\%$, $s_2 = 63\%$, $N_1 = 23$, $N_2 = 27$, pa je tražena aritmetička sredina jednaka:

$$s = \frac{58\% \cdot 23 + 63\% \cdot 27}{23 + 27} = \frac{1334\% + 1701\%}{50} = \frac{3035\%}{50} = 60.7\%.$$

13. A. Neka je x ukupan broj dana u kojima je radnik radio u jutarnjoj smjeni, a y ukupan broj dana u kojima je radnik radio u poslijepodnevnoj smjeni. Budući da radnik svakoga dana radi u točno jednoj smjeni, zbroj $x + y$ mora biti jednak ukupnom broju radnih dana, odnosno 23. Dakle, mora vrijediti jednakost:

$$x + y = 23.$$

Ukupna radnikova zarada u *svakom* od x radnih dana u kojima je radio u prijepodnevnoj smjeni iznosi $8 \cdot 30 = 240$ kn. Zbog toga ukupna radnikova zarada u svih x dana u kojima je radio u prijepodnevnoj smjeni iznosi $240 \cdot x$ kn.

Ukupna radnikova zarada u *svakom* od y radnih dana u kojima je radio u poslijepodnevnoj smjeni iznosi $8 \cdot 35 = 280$ kn. Zbog toga ukupna radnikova zarada u svih y dana u kojima je radio u poslijepodnevnoj smjeni iznosi $280 \cdot y$ kn.

Dakle, ukupna radnikova zarada u sva 23 radna dana iznosi $240 \cdot x + 280 \cdot y$ kn. Prema podacima u zadatku, taj zbroj treba biti jednak 6040 kn, pa mora vrijediti jednakost:

$$240 \cdot x + 280 \cdot y = 6040 \Leftrightarrow 6 \cdot x + 7 \cdot y = 151.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x + y = 23, \\ 6 \cdot x + 7 \cdot y = 151. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe toga sustava je $y = 23 - x$, pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\begin{aligned} &6 \cdot x + 7 \cdot (23 - x) = 151, \\ &6 \cdot x + 161 - 7 \cdot x = 151, \\ &-x = 151 - 161, \\ &-x = -10, \\ &x = 10. \end{aligned}$$

Dakle, radnik je ukupno 10 radnih dana radio u jutarnjoj smjeni, pa njegova zarada koju je ostvario radeći samo u jutarnjoj smjeni iznosi $10 \cdot 240 = 2400$ kn.

Napomena: U zadatku se zapravo pretpostavlja da radnik u <u>svakom</u> danu radi u samo jednoj smjeni, a ne da je u točno jednom danu radio u točno jednoj smjeni (a u svim ostalim danima u obje smjene). Naime, ako bi radnik u točno jednom danu radio u točno jednoj smjeni, a u svim ostalim danima u obje smjene, onda bi u svakom od $23-1=22$ radna dana u kojima je radio u obje smjene zaradio $8\cdot(35+30)=8\cdot 65=520$ kn, odnosno ukupno najmanje $22\cdot 520=11440$ kn, što je nemoguće jer njegova ukupna zarada iznosi 6040 kn.

14. A. Zapišemo obje strane zadane jednadžbe kao potencije s bazom 10, pa imamo:

$$\begin{aligned}
&10^{x-m}=\left(10^{-1}\right)^{3-m},\\
&10^{x-m}=10^{(-1)\cdot(3-m)},\\
&10^{x-m}=10^{-3+m},\\
&x-m=-3+m,\\
&x=-3+m+m=2\cdot m-3.
\end{aligned}$$

Napomena: Za rješavanje zadatka nije bitna pretpostavka $m>0$ jer su eksponenti na objema stranama jednadžbe definirani za svaki $m\in\mathbb{R}$.

15. D. Prema podacima u zadatku mora vrijediti:

$$\frac{1-5}{x-2}=\frac{-2}{3}.$$

Uz pretpostavku $x\neq 2$ dalje redom slijedi:

$$\begin{aligned}
&\frac{x-2}{-4}=\frac{-3}{2}, \quad /\cdot(-4)\\
&x-2=6,\\
&x=6+2=8.
\end{aligned}$$

16. C. Odredimo:

$$\begin{aligned}
&f(2)=\frac{4}{3}\cdot(2-2)^2+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}\cdot 0^2+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}\cdot 0+\frac{1}{12}=0+\frac{1}{12}=\frac{1}{12},\\
&f(5)=\frac{4}{3}\cdot(5-2)^2+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}\cdot 3^2+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}\cdot 9+\frac{1}{12}=12+\frac{1}{12}=\frac{145}{12},\\
&f(1)=\frac{4}{3}\cdot(1-2)^2+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}\cdot(-1)^2+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}\cdot 1+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}+\frac{1}{12}=\frac{17}{12},\\
&f(3)=\frac{4}{3}\cdot(3-2)^2+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}\cdot 1^2+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}\cdot 1+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}+\frac{1}{12}=\frac{17}{12},
\end{aligned}$$

$$f(-5)=\frac{4}{3}\cdot(-5-2)^2+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}\cdot(-7)^2+\frac{1}{12}=\frac{4}{3}\cdot 49+\frac{1}{12}=\frac{196}{3}+\frac{1}{12}=\frac{785}{12}.$$

Odatle odmah slijedi da jednakosti navedene pod **A**., **B**. i **D** nisu točne, odnosno da je jedina točna jednakost ona navedena pod **C**.

17. (0,-4) ili (0, 4). *Svaka* točka na osi ordinata ima prvu koordinatu jednaku 0. Zbog toga možemo pretpostaviti da je tražena točka $T=(0,y)$. Njezina udaljenost od ishodišta jednaka je

$$d=\sqrt{(0-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{0^2+y^2}=\sqrt{0+y^2}=\sqrt{y^2}=|y|.$$

(Apsolutnu vrijednost moramo uzeti jer ne znamo predznak broja *y*.) Tako iz jednadžbe $|y|=4$, a prema definiciji apsolutne vrijednosti, odmah slijedi $y_1=-4$ i $y_2=4$. Dakle, postoje točno dvije točke s traženim svojstvom i to su $T_1=(0,-4)$ i $T_2=(0,4)$.

18. $3\cdot a-5\cdot b$. Imamo redom:

$$a+3\cdot b+2\cdot(a-4\cdot b)=a+3\cdot b+2\cdot a-8\cdot b=3\cdot a-5\cdot b.$$

19. 1.) $\frac{-11}{2}=-5.5$. Standardnim postupkom dobivamo:

$$\begin{aligned}
&1+3\cdot(5-2+4\cdot x)=10\cdot x-1,\\
&1+15-6+12\cdot x=10\cdot x-1,\\
&12\cdot x-10\cdot x=-1-1-15+6,\\
&2\cdot x=-11,\\
&x=\frac{-11}{2}=-5.5.
\end{aligned}$$

2.) $x\geq 10$ ili $x\in[10,+\infty\rangle$. Pomnožimo obje strane zadane nejednadžbe s 18, pa redom dobivamo:

$$\begin{aligned}
&3\cdot 5\cdot x-2\cdot(x+2)\leq 18\cdot(x-3),\\
&15\cdot x-2\cdot x-4\leq 18\cdot x-54,\\
&15\cdot x-2\cdot x-18\cdot x\leq -54+4,\\
&(-5)\cdot x\leq -50.
\end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s (-5) slijedi $x\geq 10$. Dakle, skup rješenja zadane nejednadžbe tvore svi realni brojevi jednaki ili veći od 10. Taj je skup interval $[10,+\infty\rangle$.

20. 1.) 23. Imamo redom:

$$\pi^3 - \sqrt{65} \approx 31.00627668 - 8.06225775 = 22.94401893.$$

Prva znamenka iza decimalne točke je veća od 5, pa dobiveni rezultat zaokružujemo naviše. Zbog toga je rješenje zadatka broj 23.

2.) $\dfrac{2 \cdot a}{a \cdot c + 3}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} & a \cdot b \cdot c + 3 \cdot b = 2 \cdot a, \\ & b \cdot (a \cdot c + 3) = 2 \cdot a, \quad / : (a \cdot c + 3) \\ & b = \frac{2 \cdot a}{a \cdot c + 3}. \end{aligned}$$

21. 1.) 82.95. Cijena 1 kg banana iznosi $\dfrac{43.96}{4} = 10.99$ kn. Cijena 1 kg borovnica iznosi $\dfrac{124.95}{5} = 24.99$ kn. Za 3 kg banana i 2 kg borovnica Katarina treba izdvojiti ukupno $3 \cdot 10.99 + 2 \cdot 24.99 = 32.97 + 49.98 = 82.95$ kn.

2.) 1086. *Svi* prirodni brojevi koji pri dijeljenju s 35 daju ostatak 1 imaju oblik $35 \cdot k + 1$, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Taj izraz zapišimo ovako:

$$35 \cdot k + 1 = (36 \cdot k - k) + 1 = 36 \cdot k - k + 1 = 36 \cdot k - (k - 1).$$

Taj izraz će biti djeljiv s 3 ako i samo ako broj $k - 1$ bude djeljiv s 3.

Podijelimo li 1000 (najmanji četveroznamenkasti prirodan broj) s 35, dobit ćemo 28 i ostatak 20. Podijelimo li 9999 (najveći četveroznamenkasti prirodan broj) s 35, dobit ćemo 285 i ostatak 24. Odatle zaključujemo da će broj $35 \cdot k + 1$ biti četveroznamenkasti prirodan broj ako i samo ako je k prirodan broj iz segmenta $[29, 285]$.

Najmanji prirodan broj k iz segmenta $[29, 285]$ takav da je broj $k - 1$ djeljiv s 3 je očito $k = 31$. (Tada je $k - 1 = 31 - 1 = 30$ i taj je broj djeljiv s 3.) Zbog toga je traženi broj jednak $35 \cdot 31 + 1 = 1086$.

22. 1.) 72. Cijena promatranoga proizvoda u lipnju iznosi

$$300 - \frac{20}{100} \cdot 300 = 300 - 60 = 240 \text{ kn}.$$

U srpnju je ta cijena snižena za 30%, odnosno za

$$\frac{30}{100}\cdot 240 = 72 \text{ kn.}$$

Dakle, u srpnju je promatrani proizvod bio za 72 kn jeftiniji nego u lipnju.

2.) 30. Neka su x i y brojevi iz zadatka. Iz podatka da su ti brojevi u omjeru 2 : 3 slijedi:

$$x : y = 2 : 3.$$

Uvećamo li svaki od njih za 8, dobit ćemo brojeve $x+8$ i $y+8$. Prema zahtjevu zadatka, ti brojevi moraju biti u omjeru 10 : 13, pa slijedi:

$$(x+8) : (y+8) = 10 : 13.$$

Pritom istaknimo da iz $x : y = 2 : 3$ slijedi da je $x < y$, pa je i $x+8 < y+8$. Zbog toga mora biti $(x+10) : (y+10) = 10 : 13$, tj. nije moguće $(y+8) : (x+8) = 10 : 13$.

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x : y = 2 : 3, \\ (x+8) : (y+8) = 10 : 13. \end{cases}$$

Taj sustav riješimo primjenom osnovnih svojstava razmjera:

$$\begin{cases} 3\cdot x = 2\cdot y, \\ 13\cdot(x+8) = 10\cdot(y+8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\cdot x - 2\cdot y = 0, \\ 13\cdot x + 104 = 10\cdot y + 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\cdot x - 2\cdot y = 0, \\ 13\cdot x - 10\cdot y = 80 - 104 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\cdot x - 2\cdot y = 0, \quad / \cdot(-5) \\ 13\cdot x - 10\cdot y = -24 \end{cases}$$

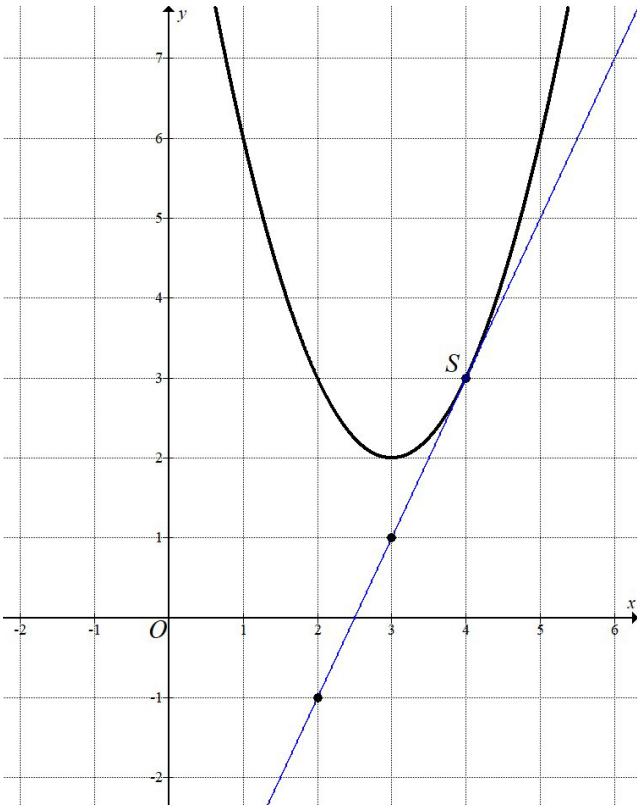
$$\begin{cases} -15\cdot x + 10\cdot y = 0, \\ 13\cdot x - 10\cdot y = -24. \end{cases}$$

Zbrajanjem posljednjih dviju jednadžbi dobivamo $(-2)\cdot x = -24$, a odatle je $x = 12$. Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu dobivamo $2\cdot y = 3\cdot 12$, a odatle je $y = \frac{3\cdot 12}{2} = 18$. Prema tome, traženi je zbroj jednak $x + y = 12 + 18 = 30$.

23. 1.) $x_1 = 1+\sqrt{7},\ x_2 = 1-\sqrt{7}$ **ili obratno.** Pomnožimo zadanu jednadžbu s 2. Koristeći formulu za rješenje kvadratne jednadžbe imamo redom:

$$x^2 - 6 = 2\cdot x,$$
$$x^2 - 2\cdot x - 6 = 0,$$
$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{4-(-24)}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{4+24}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{28}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{4\cdot 7}}{2} =$$
$$= \frac{2\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}}{2} = \frac{2\pm 2\cdot\sqrt{7}}{2} = \frac{2}{2}\pm\frac{2\cdot\sqrt{7}}{2} = 1\pm\sqrt{7},$$
$$x_1 = 1+\sqrt{7},\ x_2 = 1-\sqrt{7}.$$

2.) 4: 3. 1. rješenje: Nacrtajmo pravac $y = 2\cdot x - 5$ na slici u zadatku. Odaberimo dvije točke toga pravca koje možemo ucrtati na sliku. Npr. za $x = 2$ dobivamo $y = 2\cdot 2 - 5 = 4 - 5 = -1$, pa ucrtamo točku $(2,-1)$. Za $x = 3$ dobivamo $y = 2\cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1$, pa ucrtamo točku $(3,1)$. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

Iz slike očitamo da je jedino sjecište pravca i grafa funkcije f točka $S = (4,3)$. (To zapravo znači da je pravac $y = 2\cdot x - 5$ tangenta na zadanu parabolu u točki S.) Zbog toga je jedino rješenje zadanoga sustava $(x, y) = (4,3)$.

2. rješenje: Graf funkcije f je parabola koja prolazi točkama $(2,3)$, $(3,2)$ i $(4,3)$. Pritom je točka $(3,2)$ tjeme parabole. Jednadžba parabole ima oblik $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Odredimo tu jednadžbu.

Iz zaključka da parabola prolazi točkama $(2,3)$, $(3,2)$ i $(4,3)$ dobivamo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c, \\ 2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c, \\ 3 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 4 + b \cdot 2 + c, \\ 2 = a \cdot 9 + b \cdot 3 + c, \\ 3 = a \cdot 16 + b \cdot 4 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot a + 2 \cdot b + c = 3, \\ 9 \cdot a + 3 \cdot b + c = 2, \\ 16 \cdot a + 4 \cdot b + c = 3. \end{cases}$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od druge dobivamo $5 \cdot a + b = -1$, dok oduzimanjem prve jednadžbe od treće dobivamo $12 \cdot a + 2 \cdot b = 0$, odnosno, nakon dijeljenja s 2, $6 \cdot a + b = 0$.

Oduzimanjem jednadžbe $5 \cdot a + b = -1$ od jednadžbe $6 \cdot a + b = 0$ odmah dobivamo $a = 1$, pa uvrštavanjem te vrijednosti u npr. jednadžbe $6 \cdot a + b = 0$ dobivamo $6 \cdot 1 + b = 0$, odnosno $b = -6$.

Uvrštavanjem $a = 1$, $b = -6$ npr. u prvu jednadžbu gornjega sustava dobivamo $4 \cdot 1 + 2 \cdot (-6) + c = 3$, odnosno $4 - 12 + c = 3$, a odavde je $c = 3 - 4 + 12 = 11$. Dakle, jednadžba parabole je $y = x^2 - 6 \cdot x + 11$.

Preostaje riješiti sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} y = x^2 - 6 \cdot x + 11, \\ y = 2 \cdot x - 5 \end{cases}$$

Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Tako odmah dobivamo:

$$x^2 - 6 \cdot x + 11 = 2 \cdot x - 5,$$
$$x^2 - 6 \cdot x + 11 - 2 \cdot x + 5 = 0,$$

$$x^2-8\cdot x+16=0,$$
$$(x-4)^2=0,$$
$$x-4=0,$$
$$x=4.$$

Sada je $y=2\cdot 4-5=8-5=3.$ Dakle, rješenje sustava je $(x,y)=(4,3).$

24. 1.) $48\cdot\pi$. Iz podatka da manja kružnica prolazi središtem veće kružnice i dodiruje tu (veću) kružnicu iznutra zaključujemo da je promjer manje kružnice jednak polumjeru veće kružnice. Budući da je promjer manje kružnice $2\cdot 4=8$ cm, slijedi da je polumjer veće kružnice 8 cm. Tako slijedi da je tražena površina jednaka razlici površine kruga omeđenoga većom kružnicom i površine kruga omeđenoga manjom kružnicom:

$$P=8^2\cdot\pi-4^2\cdot\pi=64\cdot\pi-16\cdot\pi=48\cdot\pi \text{ cm}^2.$$

2.) $24.18\cdot\pi\approx 75.96371$. Tražena je površina jednaka umnošku duljine promjera (d) osnovke valjka, duljine visine valjka (h) i broja π, pa dobivamo:

$$P=d\cdot h\cdot\pi=7.8\cdot 3.1\cdot\pi=24.18\cdot\pi\approx 75.96371 \text{ cm}^2.$$

25. 1.) $16\cdot x^2-7\cdot x\cdot y.$ Koristeći formulu za kvadrat binoma dobivamo:

$$\begin{aligned}(4\cdot x-y)^2-y\cdot(y-x)&=16\cdot x^2-2\cdot 4\cdot x\cdot y+y^2-y^2+x\cdot y=\\&=16\cdot x^2-8\cdot x\cdot y+x\cdot y=\\&=16\cdot x^2-7\cdot x\cdot y.\end{aligned}$$

2.) $\dfrac{3}{x-3}$. Koristeći formulu za razliku kvadrata imamo redom:

$$\begin{aligned}\left(3+\frac{3}{x+2}\right)\cdot\frac{x+2}{x^2-9}&=\left(\frac{3\cdot(x+2)+3}{x+2}\right)\cdot\frac{x+2}{x^2-3^2}=\\&=\left(\frac{3\cdot x+6+3}{x+2}\right)\cdot\frac{x+2}{(x-3)\cdot(x+3)}=\\&=\left(\frac{3\cdot x+9}{x+2}\right)\cdot\frac{x+2}{(x-3)\cdot(x+3)}=\\&=\frac{3\cdot(x+3)}{x+2}\cdot\frac{x+2}{(x-3)\cdot(x+3)}=\\&=\frac{3}{x-3}.\end{aligned}$$

26. **1.) Mađarsku i Srbiju.** Tražimo sve zemlje za koje je visina sivoga pravokutnika manja od 2000.
Za Njemačku i Italiju su visine pripadnih sivih pravokutnika nešto veće od 5000.
Za Sloveniju je visina pripadnoga sivoga pravokutnika malo veća od 4000.
Za BiH je visina pripadnoga sivoga pravokutnika između 3000 i 4000.
Za Austriju je visina pripadnoga sivoga pravokutnika malo veća od 2000.
Za Mađarsku i Srbiju su visine pripadnih sivih pravokutnika između 1000 i 2000, što znači da je izvoz u te dvije zemlje u prva četiri mjeseca 2019. godine bio strogo manji od 2000 milijuna kuna (zapravo, dvije milijarde kuna).
Dakle, tražene zemlje su Mađarska i Srbija.

2.) Italiju. Tražimo sve zemlje za koje je razlika visine sivoga pravokutnika i visine crvenoga pravokutnika strogo veća od 1000. Primijetimo da razmak između dviju uzastopnih vodoravnih crta na grafikonu odgovara vrijednosti od 1000 milijuna kuna (tj. jedne milijarde kuna). Označimo taj razmak s d.
Izravnim mjerenjem (ravnalom ili trokutom) potvrđujemo da je razlika visine sivoga pravokutnika i visine crvenoga pravokutnika za Njemačku, Sloveniju, BiH, Austriju i Srbiju strogo manja od d.
Izvoz u Mađarsku u 2020. godini je veći od izvoza u tu zemlju u 2019. godini, pa je besmisleno mjeriti spomenutu razliku.
Naposljetku zaključujemo da je jedino u slučaju Italije izvoz u 2020. godini za više od 1000 milijuna kuna (tj. jedne milijarde kuna) manji od izvoza u 2019. godini, odnosno da je pad izvoza u 2020. godini u odnosu na 2019. godinu veći od 1000 milijuna kuna. Dakle, tražena zemlja je Italija.

27. Neka su e_n iznos novca na Eminu računu na kraju n-toga tjedna i l_n iznos novca na Lovrinu računu na kraju n-toga tjedna. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je:

$$e_n = 40 + n \cdot 35 = 35 \cdot n + 40.$$

Pripadni grafički prikaz ove funkcije je crvena crtkana krivulja na slici uz zadatak.

Lovro je na početku imao 100 kn i svakoga je mjeseca dodavao po 20 kn. Tako zaključujemo da je

$$l_n = 100 + n \cdot 20 = 20 \cdot n + 100.$$

Pripadni grafički prikaz ove funkcije je crna crtkana krivulja na slici uz zadatak.

1.) 180. Ema i Lovro će imati jednake iznose novca u trenutku kad obje gornje funkcije poprimaju jednake vrijednosti. Sa slike vidimo da se crtkane krivulje

sijeku u točki $(4,180)$, pa je tražena vrijednost jednaka 180. Računski je možemo dobiti tako da najprije riješimo jednadžbu

$$35 \cdot n + 40 = 100 + 20 \cdot n,$$

dobijemo $n = 4$, pa izračunamo npr.

$$e_4 = 35 \cdot 4 + 40 = 140 + 40 = 180.$$

2.) **100; 20**. Crna crtkana krivulja počinje u točki $(0,100)$, što znači da na početku Lovro ima 100 kn. Lovrin tjedni novčani „dodatak“ jednak je razmaku između dviju uzastopnih vodoravnih crta na grafu, a taj iznosi 20. Dakle, Lovro je tjedno dodavao po 20 kn.

3.) **2535**. Na kraju 7. tjedna Ema ima ukupno

$$e_7 = 35 \cdot 7 + 40 = 245 + 40 = 285 \text{ kn}.$$

U svakom od preostalih $52 - 7 = 45$ tjedana Ema će dodavati po 50 kn, pa će na kraju posljednjega, 52. tjedna na svojemu računu imati ukupno

$$285 + 45 \cdot 50 = 285 + 2250 = 2535 \text{ kn}.$$

28. 1.) **19.64%.** Prema pretpostavci, x označava broj godina od osnivanja lanca 2000. godine. Mi tražimo tržišni udio u 2020. godini, pa je tražena vrijednost jednaka $f(2020 - 2000) = f(20)$, odnosno (iskazano u postotcima)

$$f(20) = 0.04 \cdot 20^2 - 0.88 \cdot 20 + 21.24 = 16 - 17.6 + 21.24 = 19.64.$$

2.) **2011.** Kvadratna funkcija f poprima svoju najmanju vrijednost za

$$x = \frac{0.88}{2 \cdot 0.04} = \frac{0.88}{0.08} = \frac{88}{8} = 11.$$

To znači da na intervalu $\langle 0,11 \rangle$ funkcija f pada, a na intervalu $\langle 11,+\infty \rangle$ ta funkcija raste. Zbog toga zaključujemo da tržišni udio toga lanca počinje rasti od 11. godine računajući od godine osnivanja lanca, tj. od $2000 + 11 = 2011.$ godine.

3.) **3.4%.** Tržišni udio na kraju pete godine (računajući od godine osnivanja lanca, tj. od 2000. godine) jednak je

$$f(5) = 0.04 \cdot 5^2 - 0.88 \cdot 5 + 21.24.$$

Tržišni udio na početku (u godini osnivanja lanca, tj. u 2000. godini) jednak je $f(0)=21.24$. Tražena je vrijednost jednaka razlici $f(5)-f(0)$, odnosno

$$\begin{aligned} f(5)-f(0) &= 0.04\cdot 5^2-0.88\cdot 5+21.24-21.24= \\ &= 0.04\cdot 25-0.88\cdot 5= \\ &= 1-4.4=-3.4. \end{aligned}$$

(Negativan predznak dobivene vrijednosti mogli smo i unaprijed predvidjeti jer 5 pripada intervalu $\langle 0,11\rangle$ na kojemu je funkcija f strogo padajuća, što – prema definiciji strogo padajuće funkcije – znači da je $f(5)<f(0)$, odnosno $f(5)-f(0)<0.$)

Dakle, traženi je pad jednak 3.4%.

Pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač