TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES ZAGREB	Matematika na državnoj maturi	rješenja zadataka iz lipnja 2021. (osnovna razina)

1. **B**. Izračunamo redom:

$$\frac{19}{7} = 2.\overline{714285},$$
$$1.6^2 = 2.56,$$
$$0.12 \cdot 25 = 3,$$
$$2.31 + 0.08 = 2.39,$$
$$5 - 2.8 = 2.2.$$

Vidimo da je od četiriju ponuđenih brojeva jedino broj 3 veći od $\frac{19}{7}$.

2. **B.** Traženu vrijednost dobit ćemo dijeljenjem zbroja svih triju zadanih brojeva s 3:

$$s = \frac{13+22+37}{3} = \frac{72}{3} = 24.$$

3. **B**. Cijena jedne mjerice malina iznosi $\frac{70}{5} = 14$ kn. Zbog toga je cijena triju mjerica malina jednaka $3 \cdot 14 = 42$ kn.

4. **C**. Imamo redom:

$$7 \cdot M + M = 31 - K \Leftrightarrow 8 \cdot M = 31 - K \Leftrightarrow M = \frac{31-K}{8}.$$

5. **A**. Tražena je udaljenost jednaka:

$$d = \sqrt{(8-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \text{ jed. duljine.}$$

6. **C**. Riješimo zadanu jednadžbu na uobičajen način. Imamo redom:

$$\frac{3 \cdot x + 8}{5} - x = 4 \quad / \cdot 5$$
$$3 \cdot x + 8 - 5 \cdot x = 20,$$
$$(-2) \cdot x = 20 - 8,$$
$$(-2) \cdot x = 12,$$
$$x = -6.$$

Zbog toga je tražena vrijednost jednaka $-6 + 10 = 4$.

7. **D**. Izvršimo naznačena množenja, pa reducirajmo dobiveni izraz što je više moguće. Imamo redom:

$$2\cdot x^2-4\cdot x=3\cdot x+9,$$
$$2\cdot x^2-4\cdot x-3\cdot x-9=0,$$
$$2\cdot x^2-7\cdot x-9=0,\quad /:2$$
$$x^2-\frac{7}{2}\cdot x-\frac{9}{2}=0.$$

Prema Viète ovim formulama slijedi da je traženi zbroj jednak $-\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{2}$.

8. **B.** Prisjetimo se da vrijede jednakosti 1 kg = 10^3 g i 1 m^3 = $\left(10^2\right)^3=10^{2\cdot 3}=10^6$ cm^3. Iz njih odmah slijedi:

$$84\text{ kg m}^{-3}=84\cdot\frac{10^3\text{ g}}{10^6\text{ cm}^3}=84\cdot 10^{3-6}=84\cdot 10^{-3}=0.084\text{ g cm}^{-3}.$$

9. **B**. Označimo nepoznate kutove s α i β. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha<\beta$. Zbroj mjera tih dvaju kutova jednak je $180^\circ-138^\circ=42^\circ$. Tu mjeru dijelimo u omjeru 2 : 5. Iz pretpostavljenoga omjera zaključujemo da postoji $k>0^\circ$ takav da vrijede jednakosti $\alpha=2\cdot k,\ \beta=5\cdot k$. Uvrštavanjem tih jednakosti u jednakost $\alpha+\beta=42^\circ$ dobivamo:

$$2\cdot k+5\cdot k=42^\circ,$$
$$7\cdot k=42^\circ,\quad /:7$$
$$k=6^\circ.$$

Tako zaključujemo da je mjera manjega kuta, tj. mjera kuta α, jednaka $2\cdot 6^\circ=12^\circ$.

10. **D**. Iz zadanih podataka zaključujemo da je duljina hipotenuze jednaka $2\cdot a$. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo da je tražena duljina jednaka:

$$b=\sqrt{(2\cdot a)^2-a^2}=\sqrt{4\cdot a^2-a^2}=\sqrt{3\cdot a^2}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{3}=a\cdot\sqrt{3}.$$

11. **B**. Imamo redom:

$$\left(2-\frac{a+4}{3}\right):\frac{4-2\cdot a}{27\cdot a}=\left(\frac{6-(a+4)}{3}\right)\cdot\frac{27\cdot a}{4-2\cdot a}=\left(\frac{6-a-4}{3}\right)\cdot\frac{27\cdot a}{2\cdot(2-a)}=$$
$$=\left(\frac{2-a}{3}\right)\cdot\frac{27\cdot a}{2\cdot(2-a)}=\frac{9\cdot a}{2}=\frac{9}{2}\cdot a.$$

12. **D**. Razred **F** ima najveći ukupan broj izostanaka. Taj je broj jednak 1563.

Razred **I** ima najmanji ukupan broj izostanaka. Taj je broj jednak 435.

Tako zaključujemo da je traženi broj jednak:

$$1563:465 \approx 3.593103448 \approx 3.59.$$

13. **C**. Iz slike vidimo da je parabola „okrenuta prema dolje“, što znači da je vodeći koeficijent pripadne kvadratne funkcije strogo negativan. Dakle, $a<0$. Također, iz slike vidimo da parabola siječe os ordinata u nekoj točki koja pripada pozitivnom dijelu te osi. To znači da je odsječak parabole na osi ordinata strogo pozitivan. Dakle, $c>0$. Tako smo zaključili: $a<0$ i $c>0$.

14. **A.** Primijetimo da su sve četiri ponuđene funkcije polinomi oblika $p(x)=x^2+b\cdot x+c$, gdje su $b,c\in\mathbb{R}$. Njihovi su grafovi parabole simetrične s obzirom na pravac $x=\frac{-b}{2}$. Prema Vièteovim formulama, zbroj nultočaka ovih polinoma jednak je $-b$, pa zapravo tražimo polinom kojemu je aritmetička sredina njegovih nultočaka jednaka 4. Lako vidimo da su nultočke funkcije ponuđene pod **A.** jednake 2 i 6, pa je njihova aritmetička sredina $\frac{2+6}{2}=\frac{8}{2}=4$. Zbog toga je ta funkcija točno rješenje zadatka.

Nultočke funkcije ponuđene pod **B**. su -6 i -2 čija je aritmetička sredina jednaka $\frac{-6+(-2)}{2}=\frac{-6-2}{2}=\frac{-8}{2}=-4$.

Nultočke funkcije ponuđene pod **C**. su -2 i 4 čija je aritmetička sredina jednaka $\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$.

Nultočke funkcije ponuđene pod **D**. su -4 i 2 čija je aritmetička sredina jednaka $\frac{(-4)+2}{2}=\frac{-2}{2}=-1$.

15. **C**. Neka je a duljina stranice bilo kojega od četiriju sukladnih jednakostraničnih trokutova sa slike. Tada je njihova ukupna površina jednaka:

$$P=4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2\right)=\sqrt{3}\cdot a^2.$$

Ta površina treba biti jednaka površini cvjetnjaka. Ona iznosi 5 m^2, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$\sqrt{3}\cdot a^2 = 5.$$

Njezino strogo pozitivno rješenje je $a = \sqrt{\frac{5}{\sqrt{3}}}$. Tražena duljina ograde jednaka je zbroju opsega svih četiriju trokutova, a on je jednak:

$$l = 4\cdot(3\cdot a) = 12\cdot a = 12\cdot\sqrt{\frac{5}{\sqrt{3}}} \approx 20.388530934 \approx 20.4 \text{ m}.$$

16. C. Neka su I, M i P redom iznosi koje su uštedjeli Ivan, Matija i Petar. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanie:

$$\begin{cases} P = 5\cdot I, \\ P = I + M + 425, \\ M = I - 50. \end{cases}$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe toga sustava u drugu jednadžbu dobivamo:

$$5\cdot I = I + M + 425 \Leftrightarrow M = 4\cdot I - 425.$$

U ovu jednadžbu uvrstimo treću jednadžbu polaznoga sustava, pa dobivamo:

$$\begin{aligned} &I - 50 = 4\cdot I - 425, \\ &I - 4\cdot I = -425 + 50, \\ &(-3)\cdot I = -375, \quad /:(-3) \\ &I = 125. \end{aligned}$$

Dakle, Ivan je uštedio 125 kn, Matija $125 - 50 = 75$ kn, a Petar $5\cdot 125 = 625$ kn. Zajedno su uštedjeli ukupno $125 + 75 + 625 = 825$ kn.

17.. Imamo redom:

$$\sqrt{45 + 7\cdot 1.9} = \sqrt{45 + 13.3} = \sqrt{58.3} \approx 7.635443668.$$

18. $\frac{1408}{25} = 56.32$. Imamo redom:

$$11\%\cdot 512 = \frac{11}{100}\cdot 512 = \frac{5632}{100} = \frac{1408}{25} = 56.32$$

19. **1.) {4, 5, 6, 7} ili bilo koja permutacija toga skupa.** Traženi brojevi su svi prirodni brojevi strogo veći od 3 i strogo manji od 8. To su 4, 5, 6 i 7. Dakle, rješenje zadatka je skup {4, 5, 6, 7}.

2.) $[13,+\infty\rangle$. Traženi skup očito obuhvaća broj 13 i sve realne brojeve veće od broja 13, pa je riječ o intervalu $[13,+\infty\rangle$.

20. 1.) $\frac{3402}{3125}=1.08864$. Odmah imamo:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{18}{25}\right)^2\cdot\frac{63}{10}=\frac{324}{625}\cdot\frac{21}{10}=\frac{162}{625}\cdot\frac{21}{5}=\frac{3402}{3125}=1.08864.$$

2.) $5\cdot y^2-8$. Primjenom formula za kvadrat binoma i razliku kvadrata dobivamo:

$$\begin{aligned}&(2\cdot y-1)^2+(y-3)\cdot(y+3)+4\cdot y=\\&=(2\cdot y)^2-2\cdot(2\cdot y)\cdot 1+1^2+y^2-3^2+4\cdot y=\\&=4\cdot y^2-4\cdot y+1+y^2-9+4\cdot y=\\&=5\cdot y^2-8\end{aligned}$$

21. 1.) $7\cdot t-12$. Prema pretpostavci je $t>10$. Zbog toga je:

$$\begin{aligned}&(-7)\cdot t<(-7)\cdot 10,\\&(-7)\cdot t<-70,\\&(-7)\cdot t+12<-70+12,\\&12-7\cdot t<-58<0.\end{aligned}$$

Dakle, argument apsolutne vrijednosti je strogo negativan, pa apsolutna vrijednost mijenja njegov predznak. Tako je konačno:

$$|12-7\cdot t|=-(12-7\cdot t)=-12+7\cdot t=7\cdot t-12,\ \forall t>10.$$

2.) Bilo koji element konačnoga aritmetičkoga niza 122, 145, 168, …, 973, 996. Svi *cijeli* brojevi koji pri dijeljenju s 23 daju ostatak 7 imaju oblik $23\cdot k+7$, gdje je $k\in\mathbb{Z}$. Međutim, mi tražimo troznamenkaste prirodne brojeve s ovim svojstvom, što znači da oni moraju pripadati segmentu $[100,999]$. Zbog toga riješimo nejednadžbu

$$100\le 23\cdot k+7\le 999$$

po *cjelobrojnoj* nepoznanici k. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&100-7\le 23\cdot k\le 999-7,\\&93\le 23\cdot k\le 992,\\&\frac{93}{23}\le k\le\frac{992}{23}.\end{aligned}$$

U segmentu $\left[\frac{93}{23},\frac{992}{23}\right]$ nalaze se prirodni brojevi 5, 6, 7, 8, ..., 41, 42, 43. Uvrštavanjem *bilo kojega* od njih kao vrijednost varijable k dobivamo broj s traženim svojstvima. Dakle, rješenje zadatka je bilo koji element konačnoga aritmetičkoga niza 122, 145, 168, ..., 950, 973, 996.

22. 1.) $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad. Spojnica točke T na kružnici i središta kružnice je polumjer te kružnice. Tangenta povučena na kružnicu u *bilo kojoj* točki kružnice uvijek je okomita na pripadni polumjer kružnice. Tako je i u ovom slučaju: kut između povučene tangente i pravca koji spaja točku T i središte kružnice jednak je pravom kutu, pa je njegova mjera $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad.

2.) $4\cdot\pi$. Tražena je duljina jednaka:

$$l = \frac{16\cdot\pi\cdot 45^\circ}{180^\circ} = \frac{16\cdot\pi}{4} = 4\cdot\pi \text{ cm.}$$

Primijetite da je $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$, pa je tražena duljina zapravo jednaka osmini opsega kružnice polumjera 16, odnosno $\frac{1}{8}\cdot 2\cdot 16\cdot\pi = 4\cdot\pi$ cm.

23. 1.) **3.** Neka je r polumjer zadane kugle. Dijeljenjem jednadžbe

$$\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi = 36\cdot\pi$$

s $\frac{4}{3}\cdot\pi$ dobivamo jednadžbu $r^3 = 27$. Jedino realno rješenje te jednadžbe je $r = \sqrt[3]{27} = 3$. Dakle, traženi je polumjer jednak 3 m.

2.) **34 kv. jed.** Osjenčani lik je trapez. Njegove osnovice su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, dok je visina jednaka kraku $\overline{BC}$. Iz slike vidimo da su $\left|\overline{AB}\right| = 6+4 = 10$, $\left|\overline{CD}\right| = 3+4 = 7$, $\left|\overline{BC}\right| = 4$, pa je tražena površina jednaka:

$$P = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{CD}\right|\right)\cdot\left|\overline{BC}\right| = \frac{1}{2}\cdot(10+7)\cdot 4 = 17\cdot 2 = 34 \text{ kv. jed.}$$

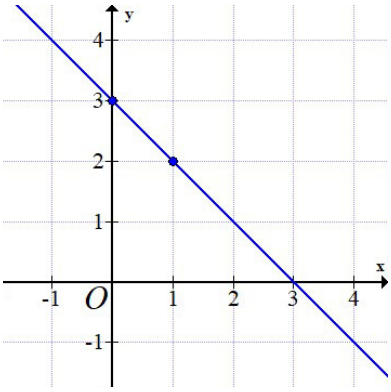
24. 1.) $y = 6\cdot x + 1$. Koeficijent smjera traženoga pravca jednak je koeficijentu smjera zadanoga pravca, a taj je jednak 6. Odsječak na osi ordinata traženoga pravca očito

je jednak 1 jer pravac prolazi točkom (0, 1). Tako odmah slijedi da traženi pravac ima jednadžbu $y = 6 \cdot x + 1$.

Napomena: U zadatku nije naveden oblik u kojemu treba zapisati traženu jednadžbu pravca, pa su $6 \cdot x - y + 1 = 0$ i $\frac{x}{\frac{-1}{6}} + \frac{y}{1} = 1$ također točna rješenja.

2.) Vidjeti sliku 1. Primijetimo da je zadana funkcija polinom 1. stupnja. Njegov je graf pravac. Za potpuno određivanje *bilo kojega* pravca dovoljno je zadati dvije njegove međusobno različite točke. Za $x = 0$ dobivamo $f(0) = 0 + 3 = 3$, pa traženi pravac prolazi točkom $(0,3)$. Za $x = 1$ dobivamo $f(1) = -1 + 3 = 2$, pa traženi pravac prolazi točkom $(1,2)$.

Dakle, u pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtamo točke (0, 3) i (1, 2), pa ih spojimo pravcem. Dobivamo donju sliku.



Slika 1.

25. 1.) $f(52), f(0), f(-16)$. Podsjetimo da je *bilo koja* funkcija f strogo padajuća ako za sve $x_1, x_2 \in D(f)$ vrijedi implikacija: $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2))$. Odatle slijedi da *povećanje* vrijednosti nezavisne varijable strogo padajuće funkcije povlači *smanjenje* vrijednosti te funkcije. Konkretno, ako vrijedi $x_1 < x_2 < x_3$, onda je $f(x_1) > f(x_2) >$ $> f(x_3)$. Očito je $-16 < 0 < 52$, pa je $f(-16) > f(0) > f(52)$, odnosno, ekvivalentno zapisano, $f(52) < f(0) < f(-16)$. Zbog toga je traženi poredak: $f(52), f(0), f(-16)$.

2.) $f(x) = 60 + 150 \cdot x$. Prema pretpostavci, serviser naplaćuje svoj terenski rad po cijeni od 150 kn/sat. To znači da će za x sati rada serviser naplatiti ukupno $150 \cdot x$ kn. Toj svoti treba pribrojiti i cijenu izlaska na teren, tj. još 60 kn, pa ukupna cijena serviserove usluge iznosi $150 \cdot x + 60 = 60 + 150 \cdot x$ kn.

26. 1.) 2000. Traženi je broj jednak $B(0)$, tj.

$$B(0)=\frac{2000\cdot(1+3\cdot 0)}{1+0.05\cdot 0}=\frac{2000\cdot(1+0)}{1+0}=2000.$$

2.) **20 godina**. Treba riješiti jednadžbu $B(t)=61000$ po nepoznanici t. Imamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{2000\cdot(1+3\cdot t)}{1+0.05\cdot t}=61000, \quad /\cdot\frac{1+0.05\cdot t}{1000}\\
&2\cdot(1+3\cdot t)=61\cdot(1+0.05\cdot t),\\
&2+6\cdot t=61+3.05\cdot t,\\
&6\cdot t-3.05\cdot t=61-2,\\
&2.95\cdot t=59,\\
&t=\frac{59}{2.95}=20 \text{ godina.}
\end{aligned}$$

27. 1.) $x<-8$ **ili** $x\in\langle-\infty,-8\rangle$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&x-5>7\cdot x+43,\\
&x-7\cdot x>43+5,\\
&(-6)\cdot x>48, \quad /:(-6)\\
&x<-8.
\end{aligned}$$

Dakle, skup svih rješenja zadane nejednadžbe jednak je skupu svih realnih brojeva strogo manjih od -8. Ti brojevi tvore interval $\langle-\infty,-8\rangle$.

2.) 11. Iz druge jednadžbe sustava je $x=y+5$. Uvrštavanjem ovoga izraza u prvu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\begin{aligned}
&2\cdot(y+5)-3\cdot y+1=0,\\
&2\cdot y+10-3\cdot y+1=0,\\
&-y+11=0,\\
&y=11.
\end{aligned}$$

3.) $x=2$. Primijetimo da je $0.0001=10^{-4}$. Tako je polazna jednadžba ekvivalentna jednadžbi $10^{x-6}=10^{-4}$ iz koje izjednačavanjem eksponenata slijedi $x-6=-4$, a odatle je $x=-4+6=2$.

28. 1.) $74\frac{1}{4}=\frac{297}{4}=74.25$ **sati.** Tri dana imaju ukupno $3\cdot 24=72$ sata. 15 minuta je $\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$ sata. Dakle, u tri dana dva sata i petnaest minuta ima ukupno $72+2+\frac{1}{4}=74\frac{1}{4}=\frac{297}{4}=74.25$ sati.

2.) $\frac{11}{178} \approx 0.0618\text{ g}$. Iz zadanih podataka slijedi da je omjer srebra i bakra u ružičastom zlatu jednak:

$$2.75 : 22.25 = 275 : 2225 = 11 : 89.$$

Neka je m tražena masa srebra. Tada vrijedi razmjer:

$$m : 0.5 = 11 : 89.$$

Riješimo taj razmjer na uobičajen način:

$$89 \cdot m = 11 \cdot 0.5 \Leftrightarrow m = \frac{11}{89} \cdot 0.5 = \frac{11}{89} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{178} \approx 0.06179775 \approx 0.0618\text{ g},$$

3.) 35. Prije ulaska triju putnika na drugoj stanici u autobusu su bilo $25 - 3 = 22$ putnika. Taj je broj putnika jednak dvjema trećinama broja putnika u autobusu između prve i druge stanice (jer je trećina putnika izašla na drugoj stanici). Zbog toga su između prve i druge stanice u autobusu bila $22 : \frac{2}{3} = 22 \cdot \frac{3}{2} = 33$ putnika. Prije ulaska 11 putnika na prvoj stanici u autobusu su bila $33 - 11 = 22$ putnika. Budući da je prije dolaska na prvu stanicu u autobusu bilo 57 putnika, na prvoj je stanici izašlo ukupno $57 - 22 = 35$ putnika.

Alternativno rješenje: Neka je x traženi broj. Autobus napušta prvu stanicu s ukupno $57 - x + 11 = 68 - x$ putnika. Na drugoj stanici izlazi ukupno $\frac{1}{3} \cdot (68 - x)$ putnika, a ulaze tri putnika, pa u autobusu ima ukupno $68 - x - \frac{1}{3} \cdot (68 - x) + 3 =$ $= 68 - x - \frac{68}{3} + \frac{1}{3} \cdot x + 3 = \frac{145}{3} - \frac{2}{3} \cdot x$ putnika. Taj broj treba biti jednak 25, pa dobivamo jednadžbu $\frac{145}{3} - \frac{2}{3} \cdot x = 25.$ Ona je ekvivalentna jednadžbi $2 \cdot x = 70$ čije je rješenje $x = 35.$

Pripremio:

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač