NAJTEŽA GLAVOLOMKA NA SVIJETU

Prije petnaestak je godina logičar i stručnjak za glavolomke Raymond Smullyan[1] smislio glavolomku koja, prema mnogim mišljenjima stručnjaka, nema ozbiljnijega protukandidata za titulu najteže svjetske glavolomke. Ovdje ćemo navesti jednu varijantu te glavolomke, dati njezino rješenje i ukratko komentirati neke posljedice toga rješenja.

Osnovna glavolomka:

Lutajući afričkim prašumama u potrazi za izgubljenim blagom, poznatoga matematičara-pustolovca Matka Skitaralića zarobilo je pleme Mljac-Mljac. U prvi su ga mah odlučili pojesti za nedjeljni ručak, ali ih je vrlo rječiti Matko uspio nagovoriti neka mu pruže priliku da preživi. Poglavica plemena Mljac-Mljac donio je odluku: ukoliko Matko pogodi ime svakoga od triju božanstava plemena Mljac–Mljac, pustit će ga na slobodu. Potom su Matka doveli u prostoriju u kojoj su sjedila spomenuta tri božanstva: Istinoljubac, Lažac i Slučajac. Matku nije unaprijed poznato niti kako se zove koje božanstvo, niti njihov redoslijed sjedenja. Jedino što je doznao o njima jest da Istinoljubac uvijek govori istinu, Lažac uvijek govori neistinu, a Slučajac na potpuno slučajan način odgovara ili istinito ili lažno. Matko ima pravo postaviti najviše tri pitanja. Svako pitanje mora biti postavljeno točno jednom božanstvu, a na njega se mora moći odgovoriti ili samo s "da" ili samo s "ne" (ako pitanje nije takvoga oblika, niti jedno božanstvo neće dati nikakav odgovor). Božanstva razumiju, ali ne govore hrvatski jezik, pa odgovaraju na svojemu (zajedničkomu) jeziku, i to isključivo ili `de` *ili* `na`. *Matko ne razumije jezik božanstava, pa ne zna točno značenje svake od tih riječi, ali mu je lijepa poglavičina kćerka krišom prišapnula da* `de` *i* `na` *u nekom redoslijedu znače "da" i "ne" (tj. točno jedna od tih riječi znači "da", a točno jedna "ne").*

Koja pitanja Matko treba postaviti božanstvima tako da na temelju odgovora na njih jednoznačno može odrediti ime svakoga božanstva i tako se spasiti?

Najprije navedimo neke pretpostavke uobičajene za ovakav tip glavolomke:

- Istom božanstvu Matko smije postaviti najviše tri pitanja, odnosno moguće je da nekom od božanstava ne postavi niti jedno pitanje.
- Postavljanje drugoga pitanja i izbor božanstva kojemu će ono biti postavljeno smije ovisiti o odgovoru dobivenomu na prvo pitanje (analogno i za treće pitanje).
- Odgovaranje Slučajca treba zamišljati na sljedeći način: Kad čuje postavljeno pitanje, Slučajac na slučajan način baci simetričan novčić. Ako novčić padne na *pismo*, Slučajac odgovara istinito, a ako novčić padne na *glavu*, Slučajac odgovara neistinito.

Prije izlaganja rješenja osnovne glavolomke, postavit ćemo i riješiti tri pomoćne glavolomke povezane s netom postavljenom glavolomkom, ali bitno lakše od nje. Potom ćemo iskoristiti njihova rješenja kako bismo riješili osnovnu glavolomku. Posljednje dvije od triju pomoćnih glavolomki poznate su i otprije, dok je varijantu prve smislio George Boolos[2] rješavajući osnovnu glavolomku.

Glavolomka 1.

Za kupnju novoga automobila Ćiro Zapijalo želi posuditi novac od svojega brata, strastvenoga kartaša Ferde Zapijala. Ferdo je na stol postavio tri karte: dva asa i jednoga

[1] Raymond Merrill Smullyan (1919. –), američki matematičar, logičar i pijanist.
[2] George Stephen Boolos (1940. – 1996.), američki matematičar i filozof.

© mr.sc. Bojan Kovačić

jockera, pri čemu mu je poznat točan poredak svih triju karata. Potom je rekao Ćiri neka odabere bilo koju od postavljenih karata i postavi mu točno jedno pitanje na koje se može odgovoriti ili s "da" ili s "ne". (Ako pitanje nije takvoga oblika, Ferdo neće dati nikakav odgovor). Pritom je Ferdo čvrsto obećao: bude li Ćiro odabrao asa, istinito će odgovoriti na Ćirino pitanje, a bude li odabrao jockera, slučajno će odgovoriti na Ćirino pitanje (tj. Ferdin odgovor može biti ili istinit ili lažan). Nakon što Ćiro čuje Ferdin odgovor, treba odrediti točno jednu kartu na kojoj se nalazi as i, ako to ispravno napravi, Ferdo će mu posuditi novac.
Koje pitanje Ćiro treba postaviti Ferdi tako da na temelju odgovora dobivenoga na to pitanje sigurno može odrediti koja karta je as?

***Glavolomka* 2.**

Tragajući za izgubljenim blagom cara Tvrdislava, logičar–pustolovac Logičko Skitalarić doznao je da se blago nalazi u jednoj od dviju spiljâ ispred kojih sjede dva božanstva: Istinoljubac i Lažac. U drugoj spilji nalazi se gladni zmaj koji će pojesti Logička uđe li u njegovu spilju. Logičko ne zna unaprijed niti kako se zove koje božanstvo niti njihov redoslijed sjedenja, ali zna da Istinoljubac uvijek govori istinu, a Lažac uvijek laže. Božanstva razumiju i govore hrvatski jezik, te na njemu odgovaraju na postavljena pitanja. Pritom ta pitanja moraju biti postavljena tako da se na njih može odgovoriti ili "da" ili "ne" (ako pitanje nije takvoga oblika, niti jedno božanstvo ne daje nikakav odgovor na njega). Božanstva dozvoljavaju ulaz u točno jednu spilju, ali ne dozvoljavaju izlaz iz spilje u kojoj se nalazi zmaj.

Koje pitanje Logičko treba postaviti točno jednom od božanstava tako da iz njegova odgovora jednoznačno može izvesti istinit zaključak u kojoj se spilji nalazi blago?

***Glavolomka* 3.**

Tragajući za izgubljenim blagom cara Škrtislava, matematičarka-pustolovka Matkica Skitaralić doznala je da se blago nalazi u jednoj od dviju spilja ispred kojih sjedi božanstvo Istinoljubac. U drugoj spilji nalazi se gladni zmaj koji će pojesti Matkicu uđe li u njegovu spilju. Istinoljubac odgovara isključivo na pitanja na koja se može odgovoriti ili "da" ili "ne" (ako pitanje nije takvoga oblika, Istinoljubac ne daje nikakav odgovor), a njegovi odgovori su uvijek istiniti. Istinoljubac razumije, ali ne govori hrvatski jezik, pa odgovara na svojemu jeziku u kojemu riječi `de` *i* `na` *u nekom redoslijedu znače "da" i "ne".*

Koje pitanje Matkica treba postaviti tako da iz dobivenoga odgovora može izvesti istinit zaključak u kojoj se spilji nalazi blago?

U nastavku iznosimo rješenja postavljenih glavolomki.

***Rješenje Glavolomke* 1.**

Strategija je sljedeća:

– Ćiro odabire srednju od triju izloženih karata i postavlja Ferdi pitanje:

"*Je li lijeva karta as*?"

– Bude li Ferdin odgovor "*da*", Ćiro treba odabrati lijevu kartu (tj. ta karta je as).
– Bude li Ferdin odgovor "*ne*", Ćiro treba odabrati desnu kartu (tj. ta karta je as).

Uvjerimo se da *neovisno o tome koja je srednja karta* opisanom strategijom Ćiro sigurno može odrediti koja karta je as. Razmotrimo sljedeće slučajeve:

a) Pretpostavimo da je srednja karta as. Tada odgovor na postavljeno pitanje mora biti istinit. Odgovori li Ferdo "*da*", to znači da je lijeva karta uistinu as, pa Ćiro treba odabrati upravo tu kartu. Odgovori li Ferdo "*ne*", to znači da lijeva karta nije as (tj. lijeva karta je *jocker*). Stoga su preostale dvije karte asevi, pa Ćiro može točno odabrati desnu kartu (u ovom je slučaju i srednja karta as, ali to je nebitno).

b) Pretpostavimo da je srednja karta *jocker*. Tada su lijeva i desna karta asevi. Sada lako vidimo da odabir karte *ne ovisi o istinitosti* dobivena odgovora: odgovori li Ferdo "*da*", Ćiro sigurno može odabrati lijevu kartu (u ovom je slučaju i desna karta as, ali to je nebitno) a odgovorim li Ferdo "*ne*", Ćiro sigurno može odabrati desnu kartu (u ovom je slučaju i lijeva karta as, ali to je nebitno).

Kako vidimo, opisana strategija ne ovisi o tome koja karta je srednja, pa u svakom slučaju možemo napraviti ispravan izbor karte.

<u>*Bilješka*</u> <u>1</u>. Opisana strategija ponekad se naziva *metoda isključenja srednjega*. U matematičkoj se logici ona može opisati činjenicom da je za svaku izjavu X točno jedna od izjava X i $-X$ (ili $\neg X$) istinita. Brojni matematičari i filozofi i dalje osporavaju da je isključenje srednjega valjano logičko pravilo, ali iz rješenja navedene glavolomke je razvidno da bi naša sposobnost rasuđivanja o alternativnim mogućnostima u svakodnevnom životu bila gotovo potpuno paralizirana bez uporabe toga pravila

<u>*Bilješka* 2.</u> Ćiro je mogao postaviti i pitanje: "*Je li desna karta as*?", pa u tom slučaju odabrati desnu kartu bude li Ferdin odgovor "*da*", odnosno lijevu kartu bude li Ferdin odgovor "*ne*". Potpuno analognim zaključivanjem kao u rješenju Glavolomke 1. zaključujemo da i ta strategija vodi na ispravan izbor karte.

<u>*Rješenje Glavolomke* 2.</u>

Najprije podsjetimo na logički operator *ako i samo ako* (oznaka: $\Leftrightarrow$) Njegova tablica istinitosti je sljedeća:

$\tau(A)$	$\tau(B)$	$\tau(A \Leftrightarrow B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Dakle, logička izjava $A \Leftrightarrow B$ je istinita u točno dva slučaja:

1.) Izjava A i izjava B su istovremeno istinite;
2.) Izjava A i izjava B su istovremeno neistinite.

Pogledajmo to na primjerima. Uzmimo izjave

A: Rijeka Dunav protječe kroz Zagreb.
B: Zagreb je glavni grad Republike Slovenije.

Obje navedene izjave su očito neistinite[3], ali je izjava $A \Leftrightarrow B$ istinita. Ona glasi: *Rijeka Dunav protječe kroz Zagreb ako i samo ako je Zagreb glavni grad Republike Slovenije*.

[3] Za neznalice: Zagreb je glavni grad Republike Hrvatske kroz koji protječe rijeka Sava.

Nadalje, definirajmo izjave A_1 i B_1 s:

$$A_1 := \neg A,$$
$$B_1 := \neg B,$$

tj. neka su

A_1: Rijeka Dunav ne protječe kroz Zagreb.
B_1: Zagreb nije glavni grad Republike Slovenije.

Obje izjave A_1 i B_1 su istinite, pa je i izjava $A_1 \Leftrightarrow B_1$ istinita. Ona glasi: *Rijeka Dunav ne protječe kroz Zagreb ako i samo ako Zagreb nije glavni grad Republike Slovenije*.

Naposljetku, promotrimo izjave A_1 i B. Izjava A_1 je istinita, a izjava B je neistinita. Stoga je izjava $A_1 \Leftrightarrow B$ neistinita. Ona glasi: *Rijeka Dunav ne protječe kroz Zagreb ako i samo ako je Zagreb glavni grad Republike Slovenije*. Analogno razmatranje provodimo utvrđujući istinitost izjave $A \Leftrightarrow B_1$ (taj dio prepuštamo čitatelju).

Iskoristimo ovaj logički operator u rješavanju Glavolomke 2. Pitanje koje Logičko treba postaviti *bilo kojemu* od dvaju božanstava glasi:

Jesi li ti Istinoljubac ako i samo ako je blago u prvoj spilji?

Odgovor na postavljeno pitanje ujedno je i odgovor na pitanje je li blago u prvoj spilji.

Uvjerimo se da nam ova strategija daje istinitu informaciju.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je Logičko postavio pitanje prvom božanstvu. Ne znamo je li to božanstvo Istinoljubac ili Lažac, pa ćemo pokazati da ta činjenica uopće nije bitna. Budući da oba božanstva znaju istinit odgovor na postavljeno pitanje, razmatranja ćemo provoditi u skladu s tom pretpostavkom. Radi jednostavnosti, označimo:

A: *Ja sam Istinoljubac*.
B: *Blago je u prvoj spilji*.

Primijetimo da je, uz navedene oznake, postavljeno pitanje zapravo pitanje je li tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ istinita. Stoga je *istinit* odgovor na to pitanje "*da*" ako i samo ako je tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ istinita, a "*ne*" ako i samo ako je tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ neistinita. Razmišljamo na sljedeći način:

- Pretpostavimo da je upitano božanstvo Istinoljubac, te da je blago doista u prvoj spilji. Tada su tvrdnje A i B istovremeno istinite, pa je i tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ istinita. Budući da Istinoljubac uvijek govori istinu, njegov odgovor na postavljeno pitanje je "*da*".
- Pretpostavimo da je upitano božanstvo Istinoljubac, te da je blago u drugoj spilji. Tada je tvrdnja A istinita, a tvrdnja B neistinita. Stoga je tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ neistinita. Budući da Istinoljubac uvijek govori istinu, njegov odgovor na postavljeno pitanje je "*ne*".
- Pretpostavimo da je upitano božanstvo Lažac, te da je blago u prvoj spilji. Tada je tvrdnja A neistinita, a tvrdnja B istinita. Stoga je tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ neistinita. Stoga je istinit odgovor na postavljeno pitanje "*ne*". Budući da Lažac uvijek govori neistinu, njegov odgovor na postavljeno pitanje je "*da*".
- Pretpostavimo da je upitano božanstvo Lažac, te da je blago u drugoj spilji. Tada su obje tvrdnje A i B istovremeno neistinite, pa je tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ istinita. Stoga je istinit odgovor na postavljeno pitanje "*da*". Budući da Lažac uvijek govori neistinu, njegov odgovor na postavljeno pitanje je "*ne*".

Iz gore navedenoga vidimo da se istinitost tvrdnje B uvijek podudara s odgovorom "*da*", a neistinitost tvrdnje B s odgovorom "*ne*". Drugim riječima, pokazali smo da su tvrdnje:

C: Blago je u prvoj spilji ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva "*da*".
D: Blago je u drugoj spilji ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva "*ne*".

istinite *neovisno o božanstavu kojemu je postavljeno pitanje*. Stoga navedena strategija uvijek daje istinitu informaciju.

<u>*Bilješka* 3.</u> Promotrimo što bi se dogodilo da smo postavili točno jedno od sljedećih pitanja:

"*Jesi li ti Istinoljubac ako i samo ako je blago u drugoj spilji*?",
"*Jesi li ti Lažac ako i samo ako je blago u prvoj spilji*?"
"*Jesi li ti Lažac ako i samo ako je blago u drugoj spilji*?"

Na prvo i drugo pitanje oba bi božanstva dala odgovor "*da*" ako je blago u drugoj spilji, odnosno "*ne*" ako je blago u prvoj spilji. Stoga se u tim slučajevima blago nalazi u spilji različitoj od one o kojoj govori upitano božanstvo.

Na treće bi pitanje oba božanstva dala odgovor "*da*" ako se blago nalazi u prvoj spilji, odnosno odgovor "*ne*" ako se blago nalazi u drugoj spilji. Stoga se u tim slučajevima blago nalazi u spilji o kojoj govori upitano božanstvo (kao i u gore opisanoj strategiji).

<u>***Rješenje Glavolomke* 3.**</u>

Rješenje ove glavolomke je vrlo slično rješenju Glavolomke 2. Najvažnije je da *ne trebamo znati točno značenje riječi* `de` *i/li* `na`. Pitanje koje Matkica treba postaviti Istinoljupcu je:

Znači li riječ `de` "*da*" *ako i samo ako je blago u prvoj spilji*?

Bude li Istinoljupčev odgovor na postavljeno pitanje `de`, blago se nalazi u prvoj spilji, a bude li njegov odgovor `na`, blago se nalazi u drugoj spilji.

Uvjerimo se da ova strategija daje istinitu informaciju neovisno o značenjima riječi `de` i/li `na`.

Radi jednostavnosti, ponovno označimo:

A: *Riječ* `de` *znači* "*da*".
B:*Blago se nalazi u prvoj spilji*.

Primijetimo da je, uz navedene oznake, postavljeno pitanje zapravo pitanje je li tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ istinita. No, sad ne možemo, kao u rješenju prethodne glavolomke, reći: "Odgovor je "*da*" ako je blago u prvoj spilji" i sl. jer ne znamo pravo značenje te riječi. Stoga razmišljamo na sljedeći način:

- Pretpostavimo da `de` znači "*da*" i da je blago doista u prvoj spilji. Tada su obje tvrdnje A i B istovremeno istinite, pa je i tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ istinita. Da govori hrvatski, u ovom bi slučaju Istinoljubac odgovorio "*da*". Prema pretpostavci, "*da*" na Istinoljupčevom jeziku glasi `de`, što znači da će Istinoljupčev odgovor biti `de`.
- Pretpostavimo da `de` znači "*da*", te da je blago u drugoj spilji. Tada je tvrdnja A istinita, a tvrdnja B neistinita, pa je tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ neistinita. Da govori hrvatski, u ovom bi slučaju Istinoljubac odgovorio "*ne*". Prema pretpostavci, riječ `de` znači "*da*", što znači da riječ `na` znači "*ne*". Stoga će Istinoljupčev odgovor biti `na`.

- Pretpostavimo da `de` znači "*ne*", te da je blago doista u prvoj spilji. Tada je tvrdnja A lažna, a tvrdnja B istinita, pa je tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ neistinita. Da govori hrvatski, Istinoljubac bi odgovorio "*ne*". Prema pretpostavci, riječ `de` znači "*ne*", pa će Istinoljupčev odgovor biti `de`.
- Pretpostavimo da `de` znači "*ne*", te da je blago u drugoj spilji. Tada su obje tvrdnje A i B istovremeno neistinite, pa je tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ istinita. Da govori hrvatski, Istinoljubac bi odgovorio "*da*". Prema pretpostavci, riječ `de` znači "*ne*", što znači da riječ `na` znači "*da*". Stoga će Istinoljupčev odgovor biti `na`.

Tako smo pokazali da su obje tvrdnje:

E: *Blago je u prvoj spilji ako i samo ako je Istinoljupčev odgovor* `de`.
F: *Blago je u drugoj spilji ako i samo ako je Istinoljupčev odgovor* `na`.

istinite *neovisno o značenjima riječi* `de` *i* `na`. Stoga Matkica iz Istinoljupčeva odgovora može točno zaključiti je li blago u prvoj spilji, što smo i željeli pokazati.

Bilješka 4. Pogledajmo što bi se dogodilo da je Matkica isto pitanje uputila Lašcu. Razmišljanje je potpuno analogno gornjemu, samo su krajnji odgovori (redom) `na`, `de`, `na` i `de`. Stoga možemo zaključiti:

E_1: *Blago je u prvoj spilji ako i samo ako je Laščev odgovor* `na`.
F_1: *Blago je u drugoj spilji ako i samo ako je Laščev odgovor* `de`.

Bilješka 5. Iskoristimo netom pokazanu činjenicu za izvođenje još jednoga zaključka. Naime, neka je X bilo koja tvrdnja (koja može biti ili istinita ili lažna). Pretpostavimo da smo ili Istinoljupcu ili Lašcu postavili sljedeće pitanje:

Znači li `de` "*da*" *ako i samo ako si ti Istinoljubac ako i samo ako je X istinita tvrdnja*?

Ovo je pitanje vrlo kompleksno i potrebno ga je raščlaniti. Radi jednostavnosti, označimo:

A: *Riječ* `de` *znači* "*da*".
B: *Ja sam Istinoljubac*.

Tada je naše pitanje ili Istinoljupcu ili Lašcu zapravo pitanje je li tvrdnja

$$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$$

istinita.

Sada ćemo pokazati istinitosti sljedećih tvrdnji:

G: *X je istinita tvrdnja ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva* `de`.
H: *X je neistinita tvrdnja ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva* `na`.

Napišimo najprije tablicu istinitosti za izjavu $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$. Imamo ukupno 8 mogućnosti:

A	B	X	$B \Leftrightarrow X$	$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**1**
0	1	0	0	**1**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	1	**1**

A	B	X	$B \Leftrightarrow X$	$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$
1	0	1	0	**0**
1	1	0	0	**0**
1	1	1	1	**1**

Sada zaključujemo na sljedeći način:

1.) Pretpostavimo da su sve tri tvrdnje A, B i X neistinite (2. redak gornje tablice). Ta pretpostavka zapravo znači da riječ `de` znači "*ne*", da je pitanje upućeno Lašcu i – još jednom – da je tvrdnja X neistinita.

Tada je tvrdnja $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$ neistinita (jer u 5. stupcu 2. retka stoji 0), pa *istinit* odgovor na postavljeno pitanje glasi: "*ne*". Budući da je pitanje postavljeno Lašcu, on daje neistinit odgovor na postavljeno pitanje i taj (na hrvatskom jeziku) glasi: "*da*". Prema pretpostavci, riječ `de` znači "*ne*", pa riječ `na` znači "*da*". Stoga će Laščev odgovor u ovom slučaju biti `na`.

2.) Pretpostavimo da su tvrdnje A i B neistinite, a da je tvrdnja X istinita (3. redak gornje tablice). Ta pretpostavka zapravo znači da riječ `de` znači "*ne*", da je pitanje upućeno Lašcu, te – još jednom – da je tvrdnja X istinita.

Tada je tvrdnja $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$ istinita (jer u 5. stupcu 3. retka stoji 1), pa *istinit* odgovor na postavljeno pitanje glasi: "*da*". Budući da je pitanje postavljeno Lašcu, on daje neistinit odgovor na postavljeno pitanje i taj (na hrvatskom jeziku) glasi: "*ne*". Prema pretpostavci, riječ `de` znači "*ne*",. pa će Laščev odgovor u ovom slučaju biti `de`.

3.) Pretpostavimo da su tvrdnje A i X neistinite, a da je tvrdnja B istinita (4. redak gornje tablice). Ta pretpostavka zapravo znači da riječ `de` znači "*ne*", da je pitanje upućeno Istinoljupcu, te – još jednom - da je tvrdnja X lažna.

Tada je tvrdnja $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$ istinita (jer u 5. stupcu 4. retka stoji 1), pa *istinit* odgovor na postavljeno pitanje glasi: "*da*". Budući da je pitanje postavljeno Istinoljupcu, on daje istinit odgovor na postavljeno pitanje i taj (na hrvatskom jeziku) glasi: "*da*". Prema pretpostavci, riječ `de` znači "*ne*", pa riječ `na` znači "*da*". Stoga će Istinoljupčev odgovor u ovom slučaju biti `na`.

4.) Pretpostavimo da je tvrdnja A neistinita, a da su tvrdnje B i X istinite (5. redak gornje tablice). Ta pretpostavka zapravo znači da riječ `de` znači "*ne*", da je pitanje upućeno Istinoljupcu, te – još jednom - da je tvrdnja X istinita..

Tada je tvrdnja $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$ neistinita (jer u 5. stupcu 5. retka stoji 0), pa *istinit* odgovor na postavljeno pitanje glasi: "*ne*". Budući da je pitanje postavljeno Istinoljupcu, on daje istinit odgovor na postavljeno pitanje i taj (na hrvatskom jeziku) glasi: "*ne*". Prema pretpostavci, riječ `de` znači "*ne*", pa će Istinoljupčev odgovor u ovom slučaju biti `de`.

5.) Pretpostavimo da je tvrdnja A istinita, a da su obje tvrdnje B i X neistinite (6. redak gornje tablice). Ta pretpostavka zapravo znači da riječ `de` znači "*da*", da je pitanje upućeno Lašcu, te – još jednom – da je tvrdnja X lažna.

Tada je tvrdnja $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$ istinita (jer u 5. stupcu 6. retka stoji 1), pa *istinit* odgovor na postavljeno pitanje glasi: "*da*". Budući da je pitanje postavljeno Lašcu, on daje neistinit odgovor na postavljeno pitanje i taj (na hrvatskom jeziku) glasi: "*ne*". Prema pretpostavci, riječ `de` znači "*da*", pa riječ `na` znači "*ne*". Stoga će Laščev odgovor u ovom slučaju biti `na`.

6.) Pretpostavimo da su tvrdnje A i X istinite, a tvrdnja B neistinita (7. redak gornje tablice). Ta pretpostavka zapravo znači da riječ `de` znači "*da*", da je pitanje upućeno Lašcu, te – još jednom – da je tvrdnja X istinita.

Tada je tvrdnja $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$ neistinita (jer u 5. stupcu 7. retka stoji 0), pa *istinit* odgovor na postavljeno pitanje glasi: "*ne*". Budući da je pitanje postavljeno Lašcu, on daje neistinit odgovor na postavljeno pitanje i taj (na hrvatskom jeziku) glasi: "*da*". Prema pretpostavci, riječ `de` znači "*da*", pa će Laščev odgovor u ovom slučaju biti `de`.

7.) Pretpostavimo da su tvrdnje A i B istinite, a da je tvrdnja X neistinita (8. redak gornje tablice). Ta pretpostavka zapravo znači da riječ `de` znači "*da*", da je pitanje upućeno Istinoljupcu, te – još jednom – da je tvrdnja X neistinita.

Tada je tvrdnja $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$ lažna (jer u 5. stupcu 8. retka stoji 0), pa *istinit* odgovor na postavljeno pitanje glasi: "*ne*". Budući da je pitanje postavljeno Istinoljupcu, on daje istinit odgovor na postavljeno pitanje i taj (na hrvatskom jeziku) glasi: "*ne*". Prema pretpostavci, riječ `de` znači "*da*", pa riječ `na` znači "*ne*". Stoga će Istinoljupčev odgovor u ovom slučaju biti `na`.

8.) Pretpostavimo da su sve tri tvrdnje A, B i X istinite (9. redak gornje tablice). Ta pretpostavka zapravo znači da riječ `de` znači "*da*", da je pitanje upućeno Istinoljupcu, te – još jednom – da je tvrdnja X istinita

Tada je tvrdnja $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow X)$ istinita (jer u 5. stupcu 9. retka stoji 1), pa *istinit* odgovor na postavljeno pitanje glasi: "*da*". Budući da je pitanje postavljeno Istinoljupcu, on daje istinit odgovor na postavljeno pitanje i taj (na hrvatskom jeziku) glasi: "*da*". Prema pretpostavci, riječ `de` znači "*da*", pa će Istinoljupčev odgovor u ovom slučaju biti `de`.

Ovim smo iscrpli sve moguće slučajeve i dokazali istinitost tvrdnji G i H. Na taj smo način ujedno i završili sve pripreme nužne za rješavanje osnovne glavolomke.

Rješenje osnovne glavolomke:

Prvi Matkov potez je odrediti koje od triju božanstava *sigurno nije* Slučajac, tj. odrediti barem jedno božanstvo za koje će biti siguran da je ili Istinoljubac ili Lažac. U tu svrhu označimo božanstva s $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ sukladno njihovu redoslijedu sjedenja.

Prvom božanstvu (tj. božanstvu $\mathcal{A}$) Matko treba postaviti sljedeće pitanje:

Znači li `de` *"da" ako i samo ako si ti Istinoljubac ako i samo ako je B Slučajac*?

Razlikujemo dva moguća slučaja:

1. Božanstvo $\mathcal{A}$ je nije Slučajac (tj. božanstvo $\mathcal{A}$ je ili istinoljubac ili Lažac).

U netom dokazane tvrdnje G i H stavimo:

X: *$\mathcal{B}$ je Slučajac*.

Tada posebno tvrdnje G i H prelaze u:

G_1: *$\mathcal{B}$ je Slučajac ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva* `de`.
H_1: *$\mathcal{B}$ nije Slučajac ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva* `na`.

Budući da želimo odrediti koje božanstvo *sigurno* nije Slučajac, zaključujemo ovako:

Božanstva $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ nisu Slučajci ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva `de` (jer je u tom slučaju božanstvo $\mathcal{B}$ Slučajac).
Božanstva $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nisu Slučajci ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva `na` (božanstvo $\mathcal{A}$ nije Slučajac prema pretpostavci, a božanstvo $\mathcal{B}$ nije Slučajac prema tvrdnji H_1).

2. Božanstvo $\mathcal{A}$ je Slučajac (odnosno, ekvivalentno, božanstva $\mathcal{B}$ i C nisu Slučajci).

Označimo:

A_1: *Riječ* `de` *znači* "*da*".
B_1: *Ja sam Istinoljubac*.
X: *B je Slučajac*.

Postavljeno pitanje je ponovno pitanje je li tvrdnja $A_1 \Leftrightarrow (B_1 \Leftrightarrow X)$ istinita. No, pretpostavka da je $\mathcal{A}$ Slučajac izravno povlači da su obje tvrdnje B_1 i X neistinite, odnosno da je tvrdnja $B_1 \Leftrightarrow X$ istinita. Sada razmatramo sljedeće podslučajeve:

a) Tvrdnja A_1 je istinita i božanstvo $\mathcal{A}$ je na slučajan način odlučilo odgovoriti istinito.

Tada je tvrdnja $A_1 \Leftrightarrow (B_1 \Leftrightarrow X)$ istinita, pa Slučajac odgovara (istinito) `de`. Zabilježimo posebno da taj odgovor u ovom podslučaju znači da je $\mathcal{A}$ Slučajac, a da $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ nisu Slučajci.

b) Tvrdnja A_1 je istinita i božanstvo $\mathcal{A}$ je na slučajan način odlučilo odgovoriti neistinito.

Tada je tvrdnja $A_1 \Leftrightarrow (B_1 \Leftrightarrow X)$ opet istinita, ali sada Slučajac (neistinito) odgovara `na` (jer, sukladno pretpostavci o istinitosti tvrdnje A_1, riječ `de` znači "*da*", pa riječ `na` znači "*ne*"). Zabilježimo posebno da taj odgovor u ovom podslučaju znači da je $\mathcal{A}$ Slučajac, a da $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ nisu Slučajci.

c) Tvrdnja A_1 je neistinita i božanstvo $\mathcal{A}$ je na slučajan način odlučilo odgovoriti istinito.

Tada je tvrdnja $A_1 \Leftrightarrow (B_1 \Leftrightarrow X)$ neistinita. Slučajac (istinito) odgovara `de` (jer, sukladno pretpostavci o neistinitosti tvrdnje A_1, riječ `de` znači "*ne*", pa riječ `na` znači "*da*"). Zabilježimo posebno da taj odgovor u ovom slučaju znači da je $\mathcal{A}$ Slučajac, a da $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ nisu Slučajci.

d) Tvrdnja A_1 je neistinita i božanstvo $\mathcal{A}$ je na slučajan način odlučilo odgovoriti neistinito.

Tada je tvrdnja $A_1 \Leftrightarrow (B_1 \Leftrightarrow X)$ opet neistinita, ali sada Slučajac (neistinito) odgovara `na` (jer, sukladno pretpostavci o istinitosti tvrdnje A_1, riječ `de` znači "*ne*", pa riječ `na` znači "*da*"). Zabilježimo posebno da taj odgovor u ovom slučaju znači da je $\mathcal{A}$ Slučajac, a da $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ nisu Slučajci.

Pogledajmo sada što smo dobili razmatrajući slučajeve 1.) i 2.) (i pripadajuće podslučajeve):

Ako je odgovor na postavljeno pitanje `de`, onda ili $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ nisu Slučajci (1. slučaj) ili $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ nisu Slučajci (svi podslučajevi 2. slučaja). Stoga *sigurno* možemo zaključiti: Ako je odgovor na postavljeno pitanje `de`, onda božanstvo $\mathcal{C}$ nije Slučajac.

Ako je odgovor na postavljeno pitanje `na`, onda ili $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nisu Slučajci (1. slučaj) ili $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ nisu Slučajci (svi podslučajevi 2. slučaja). Stoga *sigurno* možemo zaključiti da božanstvo B nije Slučajac.

Tako smo pokazali istinitost sljedećih tvrdnji:

I: *𝓑 je ili Istinoljubac ili Lažac ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva* `na`.
J: *𝒞 je ili Istinoljubac ili Lažac ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva* `de`

i to *neovisno o upitanom božanstvu* (Istinoljubac, Lažac ili Slučajac). T Time Matko jednim pitanjem (i dobivenim odgovorom) dolazi u situaciju da *sigurno* može odrediti koje od božanstava nije Slučajac.

Nakon ovoga zaključka bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je odgovor na prvo pitanje bio `na`, tj. da je 𝓑 ili Istinoljubac ili Lažac (za drugi slučaj jednostavno možemo božanstvo 𝒞 preimenovati u 𝓑 i provesti potpuno isto razmatranje). Stoga svoje drugo pitanje Matko postavlja upravo tom božanstvu i ono glasi:

Znači li `de` "*da*" *ako i samo ako je Zagreb glavni grad Republike Hrvatske*[4]?

Iz rješenja Glavolomke 3. znamo da će Istinoljupčev odgovor na ovo pitanje svakako biti `de`, a iz Bilješke 4. znamo da će Laščev odgovor na ovo pitanje svakako biti `na` (jer, kako znamo, Zagreb jest glavni grad Republike Hrvatske).

Prema tome, *ne znajući pravo značenje riječi* `de` *i* `na`, iz odgovora na postavljeno pitanje Matko može identificirati božanstvo 𝓑. Dobije li odgovor `de`, božanstvo 𝓑 je Istinoljubac, a dobije li odgovor `na`, božanstvo 𝓑 je Lažac.

Preostaje identificirati preostala dva božanstva. U tu svrhu Matko postavlja (ponovno) božanstvu 𝓑 (čiji je identitet već otkrio) treće i posljednje pitanje:

Znači li `de` "*da*" *ako i samo ako je 𝒜 Slučajac*?

Pogledajmo kako na temelju njegova odgovora možemo otkriti identitet preostalih dvaju božanstava. Razlikujemo dva slučaja:

1. 𝓑 je Istinoljubac.

U tvrdnjama *E* i *F* zamijenimo tvrdnju

B: *Blago je u prvoj spilji.*

tvrdnjom

B': *𝒜 je Slučajac.*

pa dobivamo sljedeće dvije tvrdnje:

E_2: *𝒜 je Slučajac ako i samo ako je Istinoljupčev odgovor* `de`.
F_2: *𝒜 nije Slučajac ako i samo ako je Istinoljupčev odgovor* `na`.

Odatle slijedi:

a) Ako je Istinoljupčev odgovor `de`, onda je 𝒜 Slučajac, pa je 𝒞 Lažac. Poredak božanstava prema redoslijedu sjedenja je: *Slučajac*, *Istinoljubac*, *Lažac*.

[4] Ovdje umjesto izjave *Zagreb je glavni grad Republike Hrvatske* može stajati bilo koja istinita izjava čiju istinitost unaprijed znamo.

b) Ako je Istinoljupčev odgovor na, zaključujemo da $\mathcal{A}$ nije Slučajac, pa – jer je B, prema pretpostavci, Istinoljubac – $\mathcal{A}$ mora biti Lažac. Stoga je $\mathcal{C}$ Slučajac, pa je poredak božanstava prema redoslijedu sjedenja: *Lažac*, *Istinoljubac*, *Slučajac*.

2. $\mathcal{B}$ je Lažac.

Sada u tvrdnje E_1 i F_1 (navedene neposredno iza Bilješke 4.) stavimo:

X: *$\mathcal{A}$ je Slučajac*

pa dobivamo sljedeće dvije tvrdnje:

E_3: *$\mathcal{A}$ je Slučajac ako i samo ako je Laščev odgovor* na.
F_3: *$\mathcal{A}$ nije Slučajac ako i samo ako je Laščev odgovor* de.

Iz tih dviju tvrdnji slijedi:

a) Ako je Laščev odgovor de, onda $\mathcal{A}$ nije Slučajac, pa – jer je $\mathcal{B}$, prema gornjoj pretpostavci, Lažac – $\mathcal{A}$ mora biti Istinoljubac. Stoga je $\mathcal{C}$ Slučajac, pa je poredak božanstava prema redoslijedu sjedenja: *Istinoljubac*, *Lažac*, *Slučajac*.

b) Ako je Laščev odgovor na, onda je $\mathcal{A}$ Slučajac, pa – jer je $\mathcal{B}$, prema gornjoj pretpostavci, Lažac – $\mathcal{C}$ mora biti Istinoljubac. Stoga je poredak božanstava prema redoslijedu sjedenja: *Slučajac*, *Lažac*, *Istinoljubac*.

Time je osnovna glavolomka u potpunosti razriješena.

Zaključno istaknimo da je Gabriel Uzquiano[5] 2010. pokazao da se gornja glavolomka može riješiti postavljanjem točno dvaju pitanja. Ta su pitanja nešto kompleksnija od ovdje navedenih (a potrebna su i još neka dodatna razmatranja), pa zainteresiranoga čitatelja upućujemo na literaturu [3].

Pitanja za promišljanje

1. Može li u rješenju Glavolomke 1. Ćiro postaviti točno jedno od sljedećih pitanja:

Je li srednja karta as?
Je li lijeva karta jocker?
Je li srednja karta jocker?
Je li desna karta jocker?

tako da pomoću odgovora na to pitanje može točno zaključiti koja karta je as? Ako je moguće, izložite strategiju sigurnoga odabira točno jedne karte na kojoj se nalazi as.

2. Može li u rješenju Glavolomke 3. Matkica postaviti točno jedno od sljedećih pitanja:

Znači li riječ de "*ne*" *ako i samo ako je blago u prvoj spilji*?
Znači li riječ de "*da*" *ako i samo ako je blago u drugoj spilji*?
Znači li riječ de "*ne*" *ako i samo ako je blago u drugoj spilji*?
Znači li riječ na "*da*" *ako i samo ako je blago u prvoj spilji*?

[5] Gabriel Uzquiano, američki filozof, matematičar i logičar.

Znači li riječ na "*ne*" *ako i samo ako je blago u prvoj spilji*?
Znači li riječ na "*da*" *ako i samo ako je blago u drugoj spilji*?
Znači li riječ na "*ne*" *ako i samo ako je blago u drugoj spilji*?

tako da iz Istinoljupčeva odgovora može točno zaključiti je li blago u prvoj spilji? Ako je moguće, navedite strategiju zaključivanja koja vodi na ispravan zaključak.

3. Riješite prethodni zadatak uz pretpostavku da je Matkica pitanje uputila Lašcu.

4. Neka je *X* bilo koja tvrdnja (koja može biti ili istinita ili lažna). Pretpostavimo da Istinoljubac i Lažac razumiju, ali ne govore hrvatski jezik, te da smo točno jednom od njih postavili točno jedno od sljedećih pitanja:

Znači li de "*da*" *ako i samo ako si ti Lažac ako i samo ako je X istinita tvrdnja*?
Znači li de "*da*" *ako i samo ako si ti Istinoljubac ako i samo ako je X lažna tvrdnja*?
Znači li de "*ne*" *ako i samo ako si ti Istinoljubac ako i samo ako je X istinita tvrdnja*?
Znači li de "*ne*" *ako i samo ako si ti Lažac ako i samo ako je X istinita tvrdnja*?
Znači li de "*ne*" *ako i samo ako si ti Istinoljubac ako i samo ako je X lažna tvrdnja*?

Za svako od tih pitanja razmotrite postoji li strategija pomoću koje iz odgovora upitanoga božanstva možemo sigurno istinito zaključiti je li *X* istinita ili lažna tvrdnja.

5. Riješite prethodni zadatak uz uvjet da ste točno jedno od navedenih pitanja postavili Slučajcu (koji također razumije, ali ne govori hrvatski jezik).

LITERATURA:

1. G. Boolos: *The hardest logic puzzle ever*, The Harvard Review of Philosophy, 6, str. 62–65, 1996.
2. B. Rabern, L. Rabern: *A simple solution to the hardest logic puzzle ever* Analysis 68(2), str. 105–112, 2008.
3. G. Uzquiano: *How To Solve The Hardest Logic Puzzle Ever In Two Questions*, Analysis 70(1), str. 39 – 44, 2010.
4. M. Vuković: *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2010.