VELEUČILIŠTE U POŽEGI

NIKOLINA GLAVIĆ, 232

PRIMJENA RAČUNALNOG PROGRAMA *MAXIMA* NA PROBLEME ELASTIČNOSTI PONUDE I POTRAŽNJE

ZAVRŠNI RAD

Požega, 2016. godine

VELEUČILIŠTE U POŽEGI

DRUŠTVENI ODJEL

SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ

TRGOVINSKO POSLOVANJE

PRIMJENA RAČUNALNOG PROGRAMA *MAXIMA* NA PROBLEME ELASTIČNOSTI PONUDE I POTRAŽNJE

ZAVRŠNI RAD

IZ KOLEGIJA: KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

MENTOR: mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač

STUDENT: Nikolina Glavić

Matični broj studenta: 232

Požega, 2016. godine

Sažetak

Ovaj rad prikazuje osnovne pojmove elastičnosti ekonomskih veličina i moguća rješenja nekoliko pogodno odabranih problemskih zadataka iz područja elastičnosti ponude i potražnje robe pomoću računalnog programa *Maxima.* Cilj rada je usporediti standardne analitičke načine rješavanja tih zadataka s načinom rješavanja pomoću računalnog programa *Maxima.*

Rad je izrađen u nekoliko cjelina. Opisani su osnovni pojmovi elastičnosti ekonomskih veličina. Objašnjene su osnovne funkcije računalnog programa *Maxima* koje su primijenjene u rješavanju zadataka. Navedeni su pogodno odabrani primjeri problema elastičnosti ponude i potražnje robe. Opisano je njihovo detaljno rješavanje standardnim analitičkim načinom i pomoću računalnog programa *Maxima*. Pojedini rezultati su interpretirani i komentirani.

Na kraju je dan osvrt na završni rad u cjelini.

Ključne riječi: elastičnost ponude, elastičnost potražnje, računalni program *Maxima*

Summary

In this thesis basic concepts of elasticity and some possible solutions of properly chosen problems are described. All problems are solved in two different ways: analytically and using a computer software *Maxima*. The basic aim of the thesis is to compare these two ways of solving problems.

The thesis is made in several sections. The basic concept of elasticity of economic size is described. The basic functions of *Maxima*, which are used in solving problems, are also explained. Some of given results are interpreted.

At the end the review of the whole thesis is given.

Key words: elasticity of supply, demand elasticity, computer software *Maxima.*

Sadržaj

1. UVOD

U ovom radu bit će opisani osnovni pojmovi elastičnosti ekonomskih veličina. Pogodno odabrani primjeri iz područja elastičnosti ponude i potražnje robe bit će riješeni i analizirani na dva načina: standardnim analitičkim načinom i primjenom računalnog programa *Maxima*. Detaljno će se opisati svaki od tih načina, te će se komentirati razlike među njima.

Rad se sastoji od četiri poglavlja.

Prvo poglavlje je uvod u kojem se daje kratak pregled rada.

Drugo poglavlje opisuje osnovne pojmove elastičnosti ekonomskih veličina. Objašnjavaju se koeficijent elastičnosti i koeficijent parcijalne elastičnosti.

U trećem poglavlju se opisuje način rada računalnog programa *Maxima.* Detaljnije su opisani izbornici i funkcije koji će biti korišteni u rješavanju primjera.

Četvrto poglavlje prikazuje konkretne primjere koji se odnose na probleme elastičnosti ponude i potražnje robe. Opisuje se detaljno rješavanje konkretnih primjera standardnim analitičkim načinom i pomoću računalnog programa *Maxima*.

2. OSNOVNI POJMOVI ELASTIČNOSTI EKONOMSKIH VELIČINA

2.1. Koeficijent elastičnosti

U ekonomici se promatra povezanost različitih ekonomskih veličina. Pritom se nastoji utvrditi kako promjena jedne od njih utječe na promjenu druge. Npr., za poznatu funkciju potražnje $q = f(p)$ neke robe, gdje je p cijena te robe, treba utvrditi kako se promijeni potražnja q ako se cijena p na nekoj razini poveća za 1%. Pogodna mjera za određivanje te promjene je koeficijent elastičnosti. Općenito, elastičnost u ekonomici je sposobnost jedne ekonomske veličine da reagira na promjenu neke druge ekonomske veličine koja je s njom međuzavisna (prema Martić, Lj. (1992.)).

Ako su x i y međusobno zavisne ekonomske veličine, onda se koeficijent elastičnosti $E_{y,x}$ veličine y u odnosu na promjenu veličine x definira relacijom:

$$E_{y.x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Može se pokazati da je koeficijent elastičnosti veličine y u odnosu na promjenu veličine x približno jednak relativnoj promjeni veličine y (izraženoj u postotcima) koja nastaje povećanjem veličine x za 1%.

Koeficijent elastičnosti je općenito neka realna funkcija koja izražava veličinu y pomoću veličine x. U praksi je podesnije izračunati vrijednost te funkcije za konkretne vrijednosti veličine x. Tako se dobije koeficijent elastičnosti u točki. Ako se odabere točka x_0, onda se koeficijent elastičnosti izračunan u točki x_0 obično označava s $(E_{y,x})_{x=x_0}$. U daljnjem će se tekstu taj koeficijent kraće označavati s E_{x_0}.

Koeficijent E_{x_0} ima svoju ekonomsku interpretaciju. Preciznije, ako se vrijednost veličine x u točki x_0 poveća za 1%, tada:

- ako je $E_{x_0} > 0$, onda će se vrijednost veličine y približno povećati za $E_{x_0}\%$;
- ako je $E_{x_0} < 0$, onda će se vrijednost veličine y približno smanjiti za $\left|E_{x_0}\right|\%$.

Ako u nekoj točki x_0 vrijedi $E_{x_0} = 0$, kaže se da je u toj točki veličina y *savršeno neelastična* u odnosu na promjenu veličine x.

Elastičnost ekonomskih veličina je moguće i dodatno klasificirati.

Ako je $\left|E_{x_0}\right| > 1$, kaže se da je veličina *y elastična* u točki x_0. To znači da je u tom slučaju apsolutna vrijednost relativne promjene veličine y veća od apsolutne vrijednosti relativne promjene veličine x.

Ako je $\left|E_{x_0}\right| < 1$, kaže se da je veličina *y neelastična* u točki x_0. To znači da je u tom slučaju apsolutna vrijednost relativne promjene veličine y manja od apsolutne vrijednosti relativne promjene veličine x.

Ako je $\left|E_{x_0}\right| = 1$, kaže se da se radi o *jediničnoj elastičnosti* veličine *y* u točki x_0. U tom slučaju se vrijednost veličine y približno promijeni (tj. poveća ili smanji, ovisno o predznaku koeficijenta E_{x_0}) za 1% kad se vrijednost veličine x poveća za 1%.

Ako u točki x_0 vrijedi jednakost:

$$\lim_{x \to x_0} \left|E_{y,x}\right| = +\infty ,$$

kaže se da je veličina *y savršeno elastična* u toj točki.

Koeficijent elastičnosti u točki nema dimenziju, odnosno ne ovisi o jedinicama u kojima su izražene veličine x i y. To svojstvo daje koeficijentu elastičnosti prednost u odnosu na druge mjere promjene ekonomskih veličina, a posebno pri usporedbi ekonomskih veličina izraženih u različitim jedinicama mjere.

2.2. Koeficijent parcijalne elastičnosti

Ekonomske veličine često ovise o dvije ili više drugih ekonomskih veličina (varijabli). Tako npr. količina potražnje q_1 nekog dobra ovisi ne samo o cijeni p_1 tog dobra, nego i o cijeni p_2 nekog drugog dobra. Tada se veza među tim varijablama iskazuje funkcijama dviju ili više varijabli:

$$q = f(p_1, p_2, ...) .$$

Analogoni koeficijenta elastičnosti za veličine povezane takvom funkcijom su koeficijenti parcijalne elastičnosti. Njihova definicija se iznosi prema Neralić, L., Šego, B. (2014.).

Neka je $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funkcija od n varijabli definirana na skupu $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je koeficijent parcijalne elastičnosti varijable-z u odnosu na promjenu varijable $x_i = 1,\ 2, ...,\ n$ u točki $T = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ jednak

$$E_{z,x_i} = \frac{x_i}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_i}, \text{ za svaki } i = 1,\ 2, ...,\ n.$$

Koeficijent parcijalne elastičnosti E_{z,x_i} pokazuje za koliko postotaka se približno promijeni zavisna varijabla z ako se varijabla x_i poveća za 1%, dok vrijednosti svih ostalih varijabli ostaju nepromijenjene.

Posebno se izdvaja veza koeficijenata parcijalne elastičnosti izračunanih za homogene funkcije. Radi potpunosti izlaganja, navodi se definicija homogene funkcije prema Neralić, L., Šego, B. (2014).

<u>Definicija 1.</u> Funkcija $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ od n varijabli definirana na skupu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je homogena funkcija stupnja homogeniteta α ako vrijedi jednakost:

$$f(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, ..., \lambda \cdot x_n) = \lambda^\alpha \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

za proizvoljno $\lambda \in \mathbb{R}$ i svako $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ za koje je $(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, ..., \lambda \cdot x_n) \in A$.

Vrijedi sljedeća tvrdnja.

<u>Tvrdnja 1.</u> Neka je $z = f(x_1, ..., x_n)$ homogena funkcija čije su sve parcijalne derivacije neprekidne funkcije i neka je α njezin stupanj homogeniteta. Tada vrijedi jednakost:

$$\sum_{i=1}^{n} E_{z,x_i} = E_{z,x_1} + ... + E_{z,x_n} = \alpha.$$

Dokaz te tvrdnje vidjeti u Neralić, L., Šego, B. (2014.).

Navedena razmatranja će se primijeniti na funkcije potražnje $q_1 = f(p_1, p_2, ..., p_n, k, t)$ koje opisuju vezu (zavisnost) količine q_1 nekoga dobra ocijeni p_1 toga istoga dobra, cijenama $p_2, ..., p_n$ dobara koja imaju utjecaj na potražnju promatranoga dobra, dohotku potrošača k i vremenu t.

Koeficijent E_{q_1,p_1} definira se kao relativna promjena vrijednosti veličine q_1 kad se vrijednost veličine p_1 poveća za 1%, a vrijednosti svih ostalih veličina ostanu nepromijenjene.

Koeficijenti $E_{q_1,p_2},...,E_{q_1,p_n}$ nazivaju se koeficijenti križne elastičnosti. Navode se njihove interpretacije.

Za svaki i = 2, …, n koeficijent E_{q_1,p_i} definira se kao relativna promjena vrijednosti veličine q_1 kad se vrijednost veličine p_i poveća za 1%, a vrijednosti svih ostalih veličina ostanu nepromijenjene.

Koeficijent dohodovne elastičnosti definira se kao relativna promjena vrijednosti veličine q_1 kad se dohodak potrošača poveća za 1%, a vrijednosti svih ostalih veličina ostanu nepromijenjene. Ovaj koeficijent označava se s $E_{q_1,k}$.

Odnosi među dobrima mogu se dodatno klasificirati pomoću koeficijenata križne elastičnosti. Najčešća klasifikacija je sljedeća.

- Dva dobra su supstituti ako rast cijene jednoga od njih uzrokuje rast potražnje za drugim. Može se pokazati: ako je $E_{q_1,p_2} > 0$, onda su promatrana dobra supstituti.
- Dva dobra su komplementi ako rast cijene jednog od njih uzrokuje pad potražnje za drugim. Može se pokazati: ako je $E_{q_1,p_2} < 0$, onda su promatrana dobra komplementi.

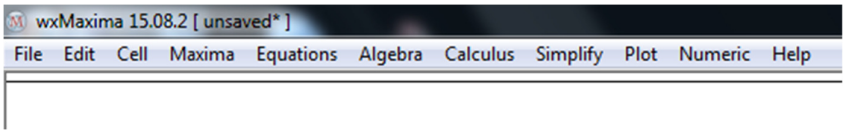
3. OSNOVNO O RAČUNALNOM PROGRAMU *MAXIMA*

3.1. Korisničko sučelje *wxMaxima*

Maxima je simbolički računalni program koji sadrži niz funkcija za matematičke izračune (npr. algebarski izračuni, računi iz matrične algebre itd.) Osim toga, *Maxima* omogućuje i diferenciranje i integriranje funkcija, rješavanje sustava linearnih jednadžbi itd. *Maxima* daje visoku preciznost numeričkih rezultata pomoću točnih vrijednosti (iskazanih u obliku razlomaka ili decimalnih brojeva) ili decimalnih brojeva zapisanih u formatu pomične točke. Detaljnije o tome može se naći u Urroz, Gilberto E. (2008.)

Korisničko sučelje programa *Maxima* naziva se *wxMaxima*. Ono će se koristiti u rješavanju primjera navedenih u 4. poglavlju. Njegovi najvažniji izbornici su *File*, *Edit, Equations*, *Algebra*, *Calculus*, *Simplify* i *Plot* (vidjeti Sliku 1.)

Slika 1. wxMaxima i njegovi najvažniji izbornici



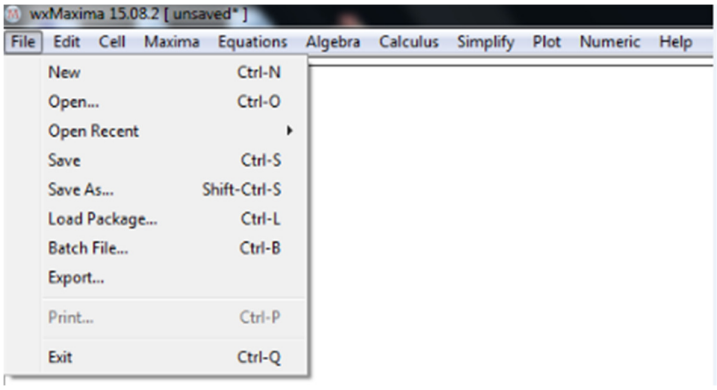
Izvor: autor

Ukratko će se opisati svaki pojedini izbornik i njegove najvažnije opcije.

Izbornik *File* sadrži opcije *New*, *Open*, *Save*, *Export* i *Exit* (vidjeti Sliku 2.)

- Opcija *New* omogućava otvaranje novoga radnoga prozora.
- Opcija *Open* omogućava otvaranje datoteke programa *Maxima* pohranjene na računalu.
- Opcija *Save* omogućava pohranu dokumenta kao datoteke s ekstenzijom *wxm* ili *wxmx*.
- Opcija *Export* omogućuje izvoz podataka iz *Maxime* u obliku HTML ili PDF dokumenta.
- Opcija *Exit* omogućava izlaz iz programa *Maxima.*

Slika 2. Izbornik *File*

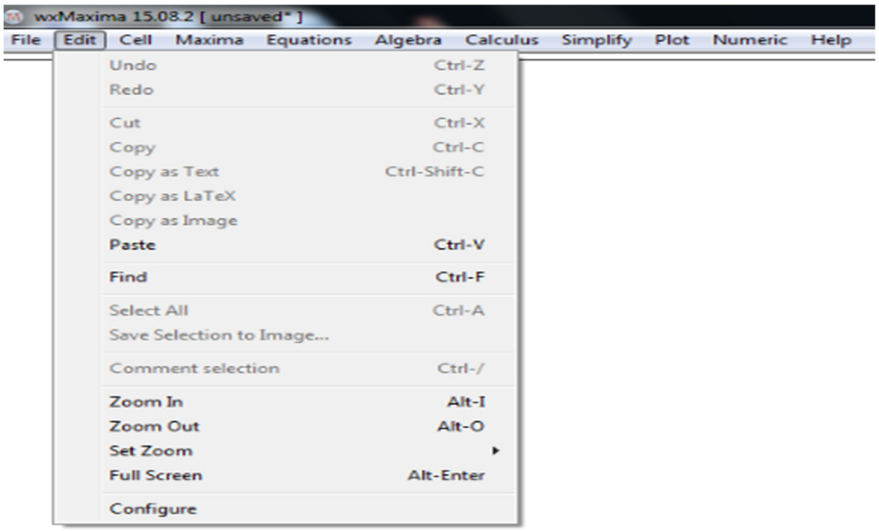


Izvor: autor

Izbornik *Edit* , između ostalih, sadrži opcije *Undo*, *Cut*, *Copy* i *Paste*.

- Opcija *Undo* poništava posljednje napravljenu promjenu u radnom prozoru.
- Opcija *Cut* omogućava „rezanje“ prethodno označenoga dijela radnoga prozora.
- Opcija *Copy* omogućava kopiranje prethodno označenoga dijela radnoga prozora u međuspremnik.
- Opcija *Paste* omogućava umetanje sadržaja iz međuspremnika.

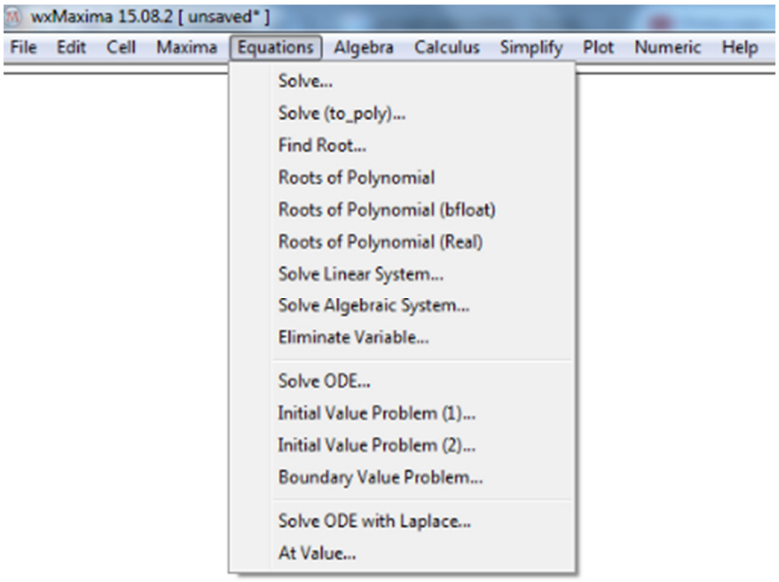
Slika 3. Izbornik *Edit*



Izvor: autor

Izbornik *Equations*, između ostalih, sadrži opcije *Solve*… i *Solve Linear System*…(vidjeti Sliku 4.). Opcija *Solve Linear System*… omogućuje rješavanje sustava linearnih jednadžbi. U ovom radu će biti korištena opcija *Solve*…, pa će se ona opisati zasebno.

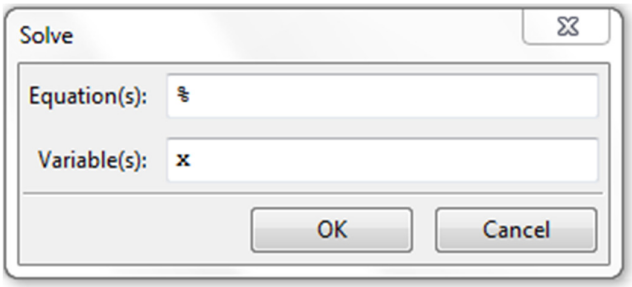
Slika 4. Izbornik *Equations*



Izvor: autor

- Opcija *Solve* omogućava rješavanje jednadžbi. U pravokutnik pored natpisa *Equation*(*s*) treba upisati jednadžbu, a u pravokutnik pored natpisa *Variable*(*s*) treba upisati oznaku nepoznanice u upisanoj jednadžbi (vidjeti Sliku 5.).

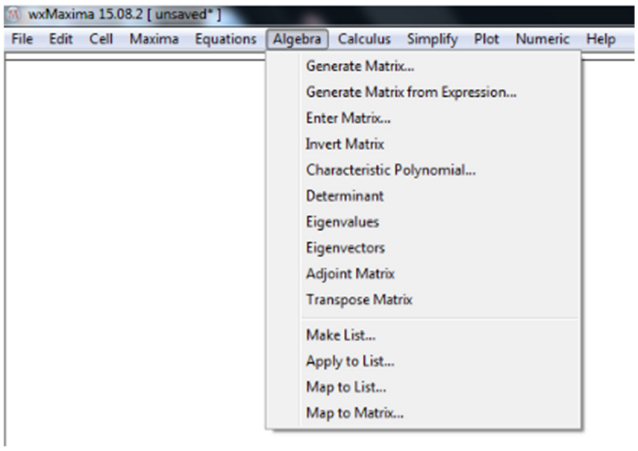
Slika 5. Opcija *Solve* u programu *Maxima*.



Izvor: autor

Izbornik *Algebra*, između ostalih, sadrži opcije *Enter Matrix*…, *Invert Matrix*… i *Determinant* (vidjeti Sliku 6.)

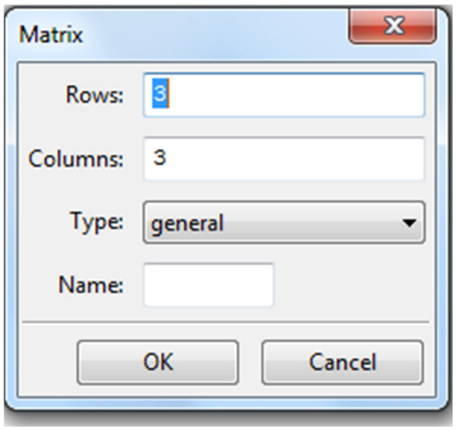
Slika 6. Izbornik *Algebra*



Izvor: autor

- Opcija *Enter Matrix* omogućava unos matice. Otvori se prozor koji omogućava upisivanje redaka i stupaca koliko matrica sadrži, tip i naziv matrice (vidjeti Sliku 7.).
- Opcija *Invert Matrix* omogućava izračun inverza matrice.
- Opcija *Determinant* omogućava izračunavanje determinante matrice.

Slika 7. Primjer zadavanja matrice

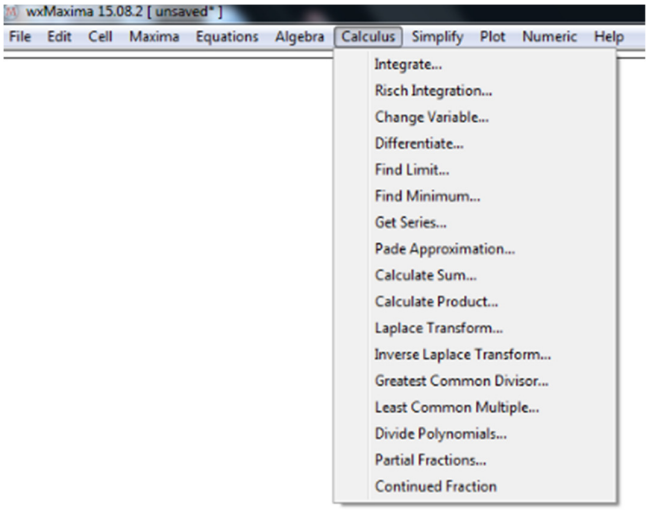


Izvor: autor

Izbornik *Calculus*, između ostalih, sadrži opcije *Differentiate*… i *Integrate*…(vidjeti Sliku 8.)

- Opcija *Differentiate* omogućava određivanje derivacije i parcijalne derivacije funkcije.
- Opcija *Integrate* omogućava određivanje standardne antiderivacije neke funkcije, kao i izračun određenih integrala.

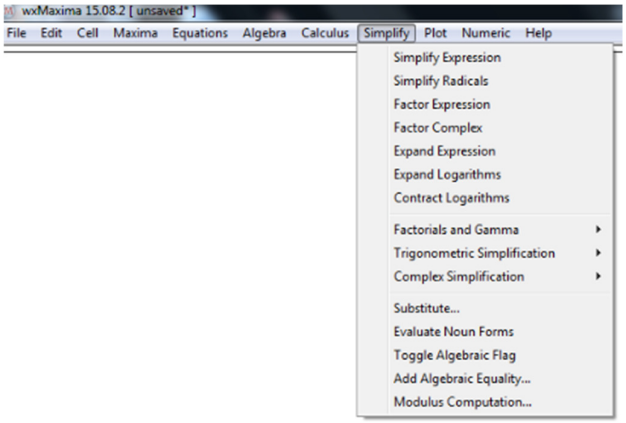
Slika 8. Izbornik *Calculus*



Izvor: autor

Izbornik *Simplify*, između ostalih, sadrži opcije *Simplify Expression* i *Expand Expression* (vidjeti Sliku 9.). Koristeći različite algoritme, prva od njih pojednostavljuje različite algebarske izraze, dok ih druga zapisuje u tzv. razvijenom obliku.

Slika 9. Izbornik *Simplify*



Izvor: autor

3.2. Pregled korištenih funkcija programa *Maxima*

U ovoj se točki daje (abecedni) pregled funkcija programa *Maxima* koje će biti korištene u rješavanju problema izloženih u 4. poglavlju. Uz svaku funkciju ukratko su navedeni njezina sintaksa i značenje. Radi preglednosti, podaci su prikazani tablično.

Naziv funkcije	***Sintaksa***	***Značenje***
diff	diff (*izraz*)	određuje derivacije i parcijalne derivacije funkcije
ev	ev (*izraz*)	izračunava izraz koji je zadan određenim brojem argumenata
expand	expand(*izraz*)	ispisuje izraz simbolički u razvijenom obliku
float	float (*izraz*)	zapisuje simboličke brojeve u decimalnom obliku
ratsimp	ratsimp(*izraz*)	omogućava pojednostavljeni zapis izraza
solve	solve (*izraz*)	omogućava rješavanje jednadžbi
sqrt	sqrt (*izraz*)	omogućava zapis drugoga korijena

Tablica 1. Pregled korištenih funkcija programa *Maxima* (prema Urroz, Gilberto E. (2008.))

Treba napomenuti da u *Maximi* znakovi :, := i ; imaju svoje posebno značenje.

Znak : koristi se za dodjeljivanje vrijednosti nekoj varijabli.

Znak := koristi se za definiciju funkcije jedne ili više varijabli.

Znak ; koristi se za završetak retka, čime se izvode sve operacije navedene u dotičnom retku.

4. PRIMJERI PRIMJENE RAČUNALNOG PROGRAMA *MAXIMA* NA PROBLEME ELASTIČNOTI PONUDE I POTRAŽNJE

4.1. Primjer 1.

(Prilagođeno prema Martić, Lj. (1992.)) Pri proizvodnji 70 jedinica nekoga proizvoda varijabilni troškovi iznose 14 000 n.j.[1], a pri proizvodnji 90 jedinica toga proizvoda varijabilni troškovi iznose 20 000 n.j.

a) Izračunati koeficijent elastičnosti varijabilnih troškova. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

b) Treba li uprava tvornice donijeti odluku o povećanju proizvodnje sa 70 na 90 jedinica proizvoda? Objasniti svoj odgovor.

***Analitičko rješenje*:**

a) Koeficijent elastičnosti varijabilnih troškova računa se prema formuli:

$$E_{\frac{VT}{Q}} = \frac{\frac{VT_2 - VT_1}{VT_1}}{\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}}.$$

Uvrštavanjem vrijednosti $Q_1 = 70,\ Q_2 = 90,\ VT_1 = 14000$ i $VT_2 = 20000$ dobiva se:

$$E_{\frac{VT}{Q}} = \frac{\frac{VT_2 - VT_1}{VT_1}}{\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}} = \frac{\frac{20000 - 14000}{14000}}{\frac{90 - 70}{70}} = \frac{\frac{6000}{14000}}{\frac{20}{70}} = \frac{420000}{280000} = 1.5.$$

Dobiveni koeficijent elastičnosti je strogo veći od 1. To znači da varijabilni troškovi rastu brže nego količina proizvoda koji se proizvodi.

b) Ne bi trebalo donijeti odluku o povećanju proizvodnje jer djeluje zakon opadajućeg prinosa. Prema Ferenčak, I. (2003.), zakon opadajućeg prinosa javlja se kada je granični proizvod dodatno angažirane jedinice promjenjivog čimbenika proizvodnje (rada) manji

[1] Oznaka za „novčanih jedinica“.

od graničnog proizvoda prethodne jedinice istog čimbenika. Svaki proizvođač koji povećava jedan input zadržavajući veličine ostalih čimbenika neizmijenjenima, prije ili kasnije, sučeljava se sa zakonom opadajućih prinosa.

***Rješenje pomoću programa Maxima*:**

U radni prozor se utipkava redom:

```
E(VT,Q):=((VT2-VT1)/VT1)/((Q2-Q1)/Q1);
E:ev(E(VT,Q),VT2=20000,VT1=14000,Q2=90,Q1=70);
float(E);
```

Pritom se nakon završetka unosa svakoga pojedinoga retka istodobno pritisnu tipke *Shift* i *Enter*.

Slijedi pojašnjenje svakog pojedinog retka.

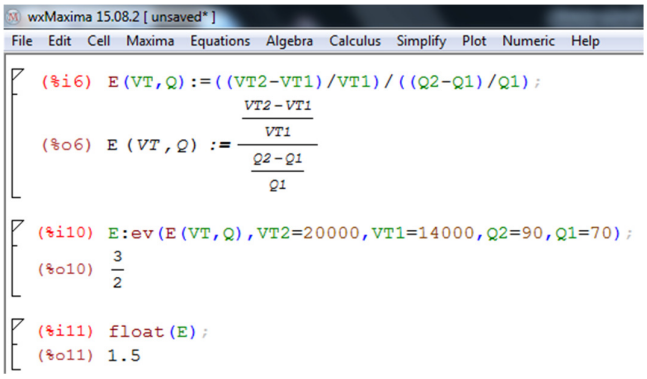
U prvom retku je definirana funkcija *E*. Pripadno pravilo funkcije predstavlja izraz za izračun koeficijenta elastičnosti na bilo kojoj razini.

U drugom retku zadan je izraz za izračun vrijednosti zadane funkcije za podatke $Q1 = 70, Q2 = 90, VT1 = 14000$ i $VT2 = 20000$. Dobivena vrijednost je također označena s *E*.

U trećem retku se primijeni funkcija `float` koja zapisuje simboličke brojeve u decimalnom obliku. Tako se dobije decimalan zapis koeficijenta *E*. Treba primijetiti da *Maxima* kao rezultat najprije ispisuje razlomak.

Nakon izvršavanja svih triju redaka dobiva se Slika 10.

Slika 10. Rješenje Primjera 1. pomoću programa *Maxima*



Izvor: autor

4.2. Primjer 2.

(Prilagođeno prema Neralić, L., Šego, B. (2014.)) Zadana je funkcija $y = -x^3 + 10 \cdot x - 1$.

a) Izračunati koeficijent elastičnosti varijable *y* u odnosu na varijablu *x* na razini *x* = 2. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

b) Izračunati koeficijent elastičnosti varijable *x* u odnosu na varijablu *y* na razini *x* = 1. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

***Analitičko rješenje*:**

a) Najprije se odredi izraz za koeficijent elastičnosti:

$$E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{-x^3 + 10 \cdot x - 1} \cdot (-x^3 + 10 \cdot x - 1)' = \frac{x \cdot (-3 \cdot x^2 + 10)}{-x^3 + 10 \cdot x - 1} = \frac{-3 \cdot x^3 + 10 \cdot x}{-x^3 + 10 \cdot x - 1}.$$

U dobiveni izraz se uvrsti $x = 2$:

$$(E_{y,x})_{x=2} = \frac{-3 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2}{-2^3 + 10 \cdot 2 - 1} = \frac{-3 \cdot 8 + 10 \cdot 2}{-8 + 20 - 1} = -\frac{4}{11} = -0.3636.$$

Zaključuje se da povećanje vrijednosti varijable *x* na razini $x = 2$ za 1% uzrokuje smanjenje vrijednosti varijable *y* za približno 0.3636%.

b) Može se pokazati da vrijedi jednakost :

$$E_{x,y} = \frac{1}{E_{y,x}}.$$

Koristeći **a)** podzadatak, najprije se izračuna koeficijent $(E_{y,x})_{x=1}$:

$$(E_{y,x})_{x=1} = \frac{-3 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1}{-1^3 + 10 \cdot 1 - 1} = \frac{-3 \cdot 1 + 10}{-8 + 10 - 1} = \frac{7}{1} = 7.$$

Sada se u jednakost $E_{x,y} = \frac{1}{E_{y,x}}$ uvrsti $(E_{y,x})_{x=1} = 2$, pa se dobije:

$$(E_{x,y})_{x=1} = \frac{1}{(E_{y,x})_{x=1}} = \frac{1}{7} = 0.14.$$

Odatle se zaključuje da povećanje vrijednosti varijable *y* na razini $x = 1$ uzrokuje povećanje vrijednosti varijable *x* za približno 0.14%.

***Rješenje pomoću programa Maxima*:**

U radni prozor se utipkava redom:

```
y:-x^3+10*x-1;
E:x/y*diff(y,x,1);
ratsimp(%);
E1:ev(E,x=2);
float(E1);
```

Pritom se nakon završetka unosa svakoga pojedinoga retka istodobno pritisnu tipke *Shift* i *Enter*.

Slijedi pojašnjenje svakog pojedinog retka.

U prvom retku je definirana funkcija *y*.

U drugom retku zadano je pravilo za određivanje koeficijenta elastičnosti na bilo kojoj razini. Pripadna funkcija je označena s *E*.

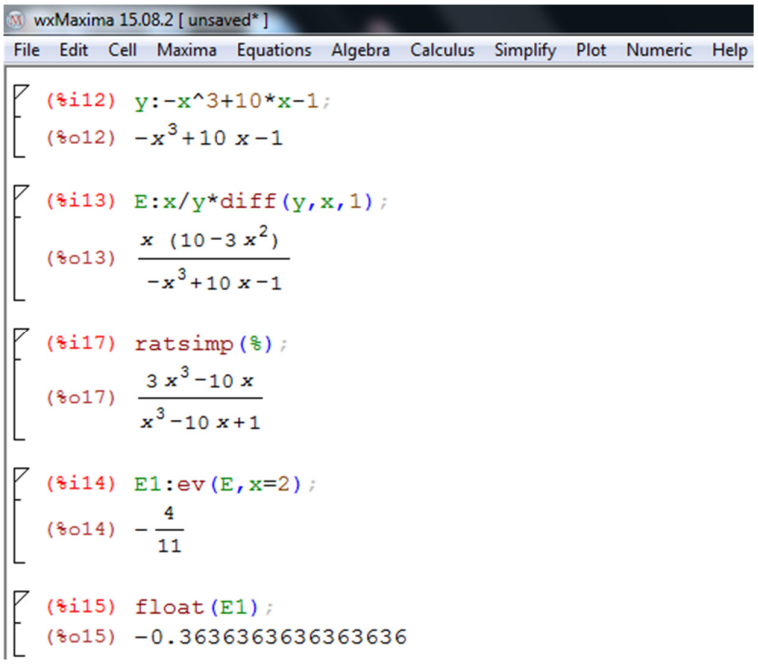
U trećem retku se primijeni funkcija `ratsimp` koja omogućava pojednostavljivanje pravila funkcije *E*.

U četvrtom retku se izračunava traženi koeficijent elastičnosti uvrštavajući $x = 2$ upravilo funkcije *E*. Dobiveni koeficijent je označen s $E1$. Treba napomenuti da u programu *Maxima* nije moguće zapisivati oznake s indeksima (npr. E_1, E_2 i sl.), pa će oznake s indeksima korištene u analitičkom rješenju zamijenjene analognim oznakama bez indeksa (umjesto E_1 pisat će se $E1$ i sl.).

U petom retku se primijeni funkcija `float` koja zapisuje simboličke brojeve u decimalnom obliku. Tako se dobije decimalan zapis koeficijenta $E1$.

Nakon izvršavanja svih pet redaka dobiva se Slika 11.

Slika 11. Rješenje Primjera 2. pomoću programa *Maxima*



Izvor: autor

4.3. Primjer 3.

(Prilagođeno prema Perkov, J. (2004.)) Zadana je funkcija potražnje

$$q = q(p) = 600 - p^2,$$

pri čemu su p cijena, a q količina robe.

a) Odrediti područje varijabiliteta funkcije q.

b) Izračunati koeficijent elastičnosti funkcije q na razini cijene p = 10. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

c) Izračunati vrijednost p za koju je funkcija q jedinično elastična. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

d) Izračunati vrijednost p za koju je funkcija q savršeno elastična. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

e) Izračunati vrijednost p za koju je funkcija q savršeno neelastična. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

f) Odrediti područje elastičnosti funkcije q. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

g) Odrediti područje neelastičnosti funkcije q. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

***Analitičko rješenje*:**

a) Cijena i količina istodobno moraju biti nenegativni realni brojevi. Iz sustava nejednadžbi

$$\begin{cases} p \geq 0, \\ 600 - p^2 \geq 0 \end{cases}$$

dobije se:

$$\begin{cases} p \geq 0, \\ -10 \cdot \sqrt{6} \leq p \leq 10 \cdot \sqrt{6}. \end{cases}$$

Zaključuje se da je traženo područje varijabiliteta funkcije q segment $\left[0,\ 10 \cdot \sqrt{6}\right] \approx [0,\ 24.5]$.

b) Postupa se analogno kao u 2. a) zadatku. Slijedi:

$$E_{q,p} = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{600 - p^2} \cdot (600 - p^2)' = \frac{p}{600 - p^2} \cdot (-2 \cdot p) = \frac{-2 \cdot p^2}{600 - p^2},$$

$$(E_{q,p})_{p=10} = \frac{-2 \cdot 10^2}{600 - 10^2} = \frac{-2 \cdot 100}{600 - 100} = \frac{-200}{500} = -\frac{2}{5} = -0.4.$$

Zaključuje se da povećanje vrijednosti cijene p na razini $p = 10$ za 1% uzrokuje smanjenje količine q za 0.4%.

c) Traži se vrijednost p za koju je $\left|E_{q,p}\right| = 1$. Rješava se jednadžba:

$$\left|\frac{-2 \cdot p^2}{600 - p^2}\right| = 1.$$

Za $p \in \left[0,\ 10 \cdot \sqrt{6}\right)$ vrijede nejednakosti $p^2 > 0$ i $600 - p^2 > 0$. Zbog toga je izraz pod apsolutnom vrijednosti strogo negativan, pa vrijedi:

$$\left|E_{q,p}\right| = \left|\frac{-2 \cdot p^2}{600 - p^2}\right| = \frac{2 \cdot p^2}{600 - p^2}.$$

Tako se dobije:

$$\left|E_{q,p}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot p^2}{600 - p^2} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot p^2 = 600 - p^2 \Leftrightarrow 3 \cdot p^2 = 600 \Leftrightarrow p^2 = 200.$$

U segmentu $\left[0,\ 10\cdot\sqrt{6}\right]$ ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $p=10\cdot\sqrt{2}\approx 14.16.$

Zaključuje se da povećanje cijene na razini $p=10\cdot\sqrt{2}\approx 14.16$ za 1% uzrokuje povećanje količine q za 1%.

d) Traži se vrijednost p za koju vrijedi $\left|E_{q,p}\right|=+\infty$. Budući da je izraz za $\left|E_{q,p}\right|$ racionalna funkcija varijable p, tražena vrijednost dobit će se tako da se nazivnik te funkcije izjednači s nulom:

$$\begin{aligned}
&600-p^2=0,\\
&-p^2=-600\,/\cdot(-1)\\
&p^2=600.
\end{aligned}$$

U segmentu $\left[0,\ 10\cdot\sqrt{6}\right]$ ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $p=10\cdot\sqrt{6}\approx 24.5.$

Zaključuje se da na razini $p=10\cdot\sqrt{6}\approx 24.5$ male promjene cijene p uzrokuju iznimno jaku (beskonačnu) promjenu količine q.

e) Traži se vrijednost p za koju vrijedi $\left|E_{q,p}\right|=0$. Budući da je izraz za $\left|E_{q,p}\right|$ racionalna funkcija varijable p, tražena vrijednost dobiva se tako da se brojnik te funkcije izjednači s nulom:

$$\begin{aligned}
&2\cdot p^2=0,\\
&p^2=0,\\
&p=0.
\end{aligned}$$

Zaključuje se da na razini $p=0$ potražnja nimalo ne reagira na promjene cijena. Primjećuje se da je u donjoj granici područja varijabiliteta funkcija savršeno neelastična, dok je u gornjoj granici područja varijabiliteta funkcija savršeno elastična.

f) Područje elastičnosti dobije se kao skup svih rješenja nejednadžbe $\left|E_{q,p}\right|>1$ koja se nalaze u intervalu $\left[0,\ 10\cdot\sqrt{6}\right]$. Slijedi redom:

$$\frac{2\cdot p^2}{600-p^2}>1 \quad /\cdot(600-p^2)$$
$$2\cdot p^2>600-p^2,$$
$$3\cdot p^2>600,$$
$$p^2>200.$$

Odavde slijedi $p\in\left\langle -\infty,-10\cdot\sqrt{2}\right\rangle\cup\left\langle 10\cdot\sqrt{2},+\infty\right\rangle$. Budući da mora biti $p\in\left[0,\ 10\cdot\sqrt{6}\right]$, zaključuje se da je traženo područje elastičnosti interval $\left(10\cdot\sqrt{2},10\cdot\sqrt{6}\right]$. To znači da na razini cijena između (približno) 14.16 i 24.5 povećanje cijene za 1% uzrokuje povećanje količine za više od 1%.

g) Područje neelastičnosti dobije se kao skup svih rješenja nejednadžbe $\left|E_{q,p}\right|<1$ koja se nalaze u intervalu $\left[0,\ 10\cdot\sqrt{6}\right]$. Slijedi redom:

$$\frac{2\cdot p^2}{600-p^2}<1 \quad /\cdot(600-p^2)$$
$$2\cdot p^2<600-p^2,$$
$$3\cdot p^2<600,$$
$$p^2<200.$$

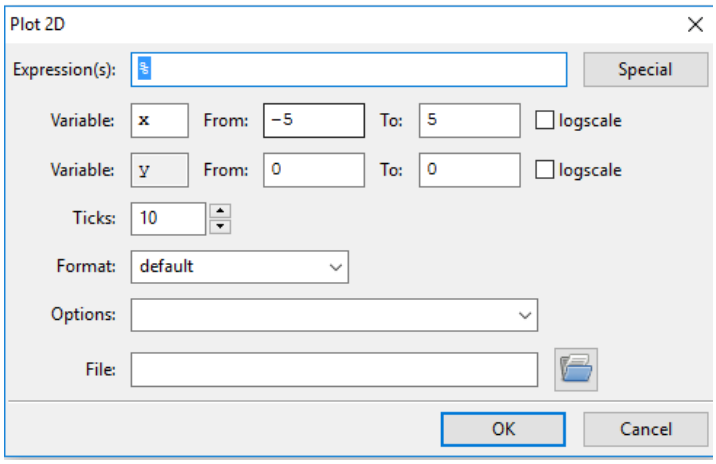
Odavde slijedi $p\in\left\langle -10\cdot\sqrt{2},\ 10\cdot\sqrt{2}\right\rangle$. Budući da mora biti $p\in\left[0,\ 10\cdot\sqrt{6}\right]$, zaključuje se da je traženo područje elastičnosti interval $\left\langle 0,\ 10\cdot\sqrt{2}\right\rangle$. To znači da na razini cijena između 0 i 14.16 povećanje cijene za 1% uzrokuje povećanje količine za manje od 1%.

***Rješenje pomoću programa Maxima*:**

a) Sustave algebarskih nejednadžbi nije moguće riješiti koristeći program *Maxima*. Zbog toga će ovaj podzadatak biti riješen grafički.

Prikazuje se graf funkcije potražnje *q* na segmentu [0, 30]. Odabere se izbornik *Plot* i opcija *Plot2D*. Dobije se dijaloški okvir prikazan na Slici 12.

Slika 12. Dijaloški okvir unutar opcije *Plot2D*.



izvor: autor

U pravokutnik pored natpisa *Expression*(*s*) upiše se: `600-p^2`.

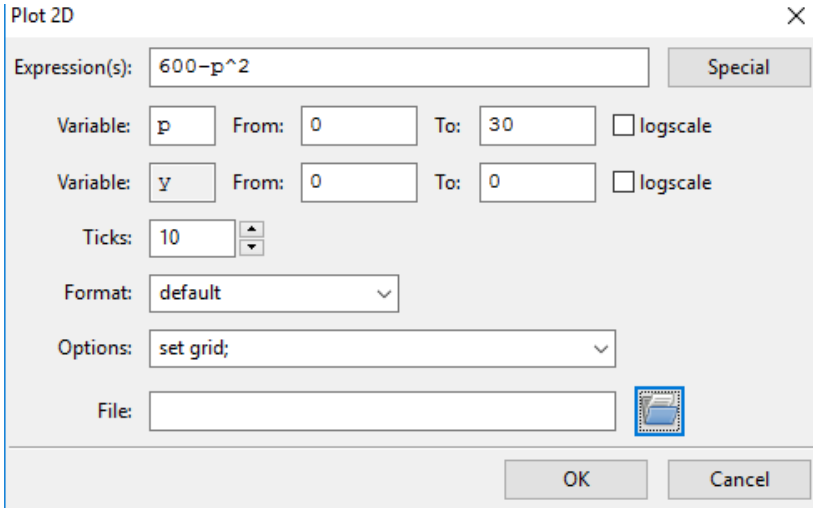
U pravokutnik pored prvoga od dvaju natpisa *Variable* upiše se: `p`.

U istom retku u pravokutnik pored natpisa *From*: upiše se 0, a u pravokutnik pored natpisa *To*: upiše se 30.

Klikne se na strelicu na kraju pravokutnika pored napisa *Options*. Odabere se opcija *set grid*. Time se omogućava prikaz koordinatne mreže na grafu.

Nakon ovih unosa dobiva se Slika 13.

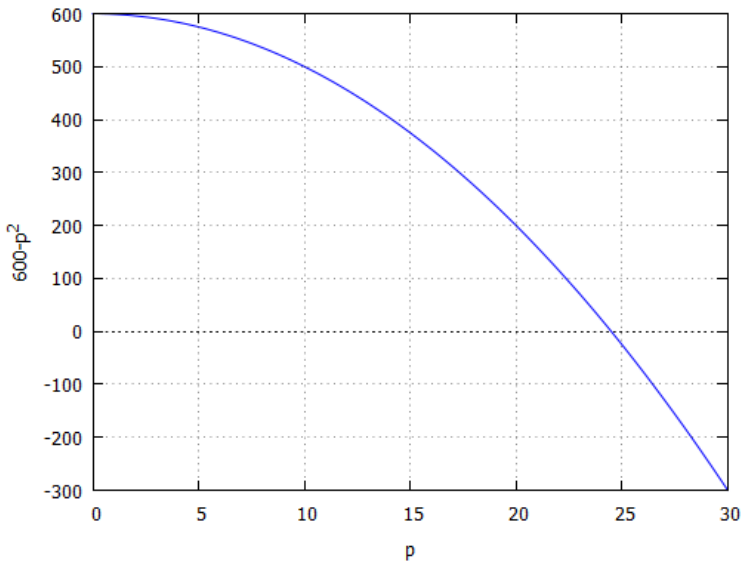
Slika 13. Popunjen dijaloški okvir u rješenju Primjera 3.a)



Izvor: autor

Potom se klikne na *OK*. Dobiva se Slika 14.

Slika 14. Graf funkcije potražnje q na segmentu [0, 30].



Izvor: autor

Iz slike se vidi da funkcija q poprima nenegativne vrijednosti na segmentu [0, 25], pri čemu se gornja granica segmenta može samo grubo procijeniti.

b) U radni prozor se utipkava redom:

```
q(p):=600-p^2;
E:p/q(p)*diff(q(p),p);
E1:ev(E,p=10);
E2:float(E1);
```

Pritom se nakon završetka unosa svakoga pojedinoga retka istodobno pritisnu tipke *Shift* i *Enter*.

Slijedi pojašnjenje svakog pojedinog retka.

U prvom retku je definirana funkcija potražnje q.

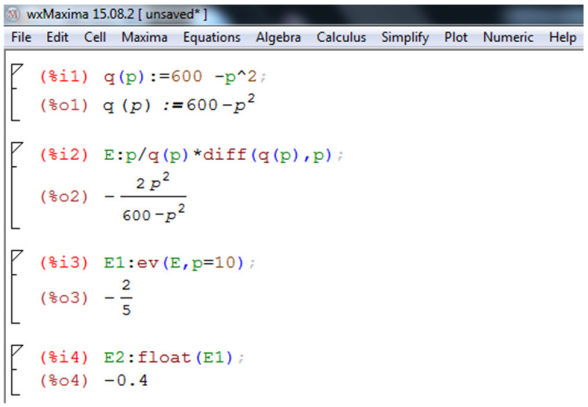
U drugom retku je zadan izraz za izračun koeficijenta elastičnosti E na bilo kojoj razini.

U trećem retku se izračunava traženi koeficijent elastičnosti uvrštavajući $p = 10$ u izraz za E. Dobiveni koeficijent je označen s $E1$.

U četvrtom retku se primijeni funkcija `float` radi dobivanja decimalnoga zapisa koeficijenta $E1$. Dobiveni decimalni broj je označen s $E2$.

Nakon izvršavanja svih četiriju redaka dobiva se Slika 15.

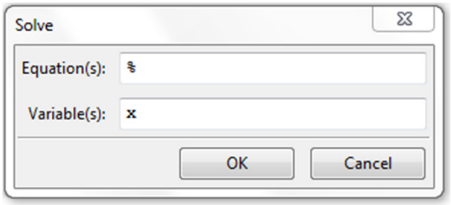
Slika 15. Rješenje Primjera 3.b) pomoću programa *Maxima*



Izvor: autor

c) i **d)** podzadaci rješavaju se pomoću opcije *Solve*. Pokretanjem opcije *Solve* otvara se prozor prikazan na Slici 16.

Slika 16. Prikaz dijaloškoga okvira opcije *Solve*



Izvor: autor

U pravokutnik pored natpisa *Equation*(*s*) utipka se: `p^2=200`.

U pravokutnik pored natpisa *Variable*(*s*) utipka se: `p`.

Potom se klikne na *OK*. *Maxima* će ispisati:

$$[p=-5\,2^{3/2},p=5\,2^{3/2}]$$

Prvo rješenje jednadžbe je strogo negativan realan broj. To rješenje se zanemaruje zbog uvjeta $p>0$. Stoga je jedino rješenje $p=5\cdot 2^{\frac{3}{2}}$.Treba primijetiti da vrijedi jednakost $5\cdot 2^{\frac{3}{2}}=10\cdot\sqrt{2}$. Naime, $5\cdot 2^{\frac{3}{2}}=5\cdot 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}=10\cdot 2^{\frac{1}{2}}=10\cdot\sqrt{2}$.

Da se dobije decimalan zapis dobivenoga rješenja, primijeni se funkcija `float`. U sljedeći redak radnoga prozora utipka se:

```
float (5*2^(3/2));
```

Nakon završetka unosa ovoga retka istodobno se pritisnu tipke *Shift* i *Enter*.

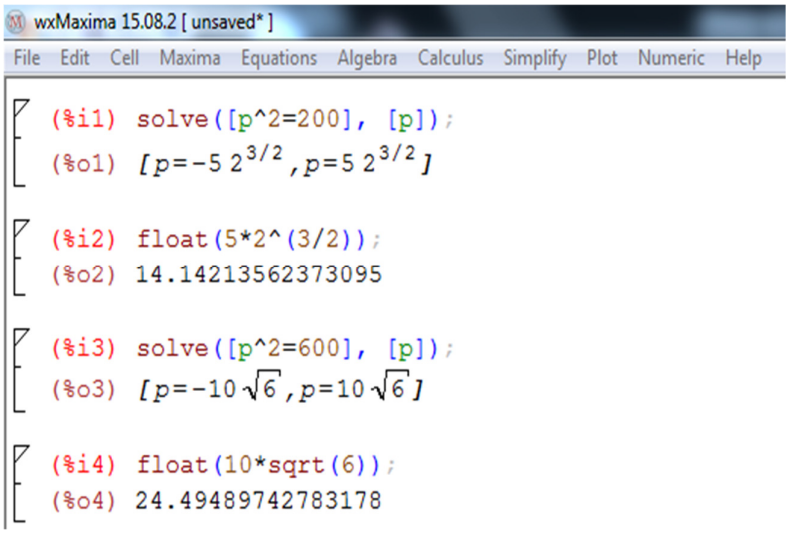
Analogan postupak provede se i za podzadatak **d)**. Tada se dobije $p = 10 \cdot \sqrt{6}$. Ova se vrijednost pretvara u decimalan zapis tako da se u sljedećem retku radnoga prozora utipka:

```
float (10*sqrt(6));
```

Potom se istodobno pritisnu tipke *Shift* i *Enter*.

Opisani postupci i svi dobiveni rezultati prikazani su na Slici 17.

Slika 17. Rješenje Primjera 3. c) i d) pomoću programa *Maxima*



Izvor: autor

4.4. Primjer 4.

(Prilagođeno prema Neralić, L. , Šego, B. (2014.)) Zadana je funkcija potražnje (q) neke robe u zavisnosti o cijeni (p) te robe:

$$q = \sqrt{\frac{36 - p^2}{120}}\,.$$

Izračunati koeficijent elastičnosti potražnje prema promjeni cijene na razini p = 2 i objasniti značenje dobivenoga rezultata.

Analitičko rješenje:

Odredi se izraz za koeficijent elastičnosti na bilo kojoj razini:

$$E_{q,p} = \frac{p}{q}\cdot q' = \frac{p}{\sqrt{\frac{36-p^2}{120}}}\cdot\left(\sqrt{\frac{36-p^2}{120}}\right)' = \frac{p}{\left(\frac{36-p^2}{120}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left[\left(\frac{36-p^2}{120}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= p\cdot\left(\frac{36-p^2}{120}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{36-p^2}{120}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(\frac{36-p^2}{120}\right)' = p\cdot\left(\frac{36-p^2}{120}\right)^{-1}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-2\cdot p}{120}\right) =$$

$$= -\frac{p^2}{120}\cdot\left(\frac{36-p^2}{120}\right)^{-1} = -\frac{\frac{p^2}{120}}{\frac{36-p^2}{120}} = -\frac{p^2}{36-p^2}.$$

U ovaj izraz uvrsti se $p = 2$, pa se dobije:

$$(E_{q,p})_{p=2} = -\frac{2^2}{36-2^2} = -\frac{4}{36-4} = -\frac{4}{32} = -\frac{1}{8} = -0.125.$$

Zaključuje se da ako se cijena na razini $p = 2$ poveća za 1%, tj. ako se cijena poveća s 2 novčane jedinice na 2.02 novčane jedinice, količina potražnje će se približno smanjiti za 0.125 %. Na zadanoj razini cijene potražnja je neelastična.

***Rješenje pomoću programa Maxima*:**

U radni prozor se utipkava redom:

```
q(p):=sqrt((36-p^2)/120);
E:p/q(p)*diff(q(p),p);
```

```
E1:ev(E,p=2);
E2:float(E1);
```

Pritom se nakon završetka unosa svakoga pojedinoga retka istodobno pritisnu tipke *Shift* i *Enter*.

Slijedi pojašnjenje svakog pojedinog retka.

U prvom retku je definirana funkcija potražnje q.

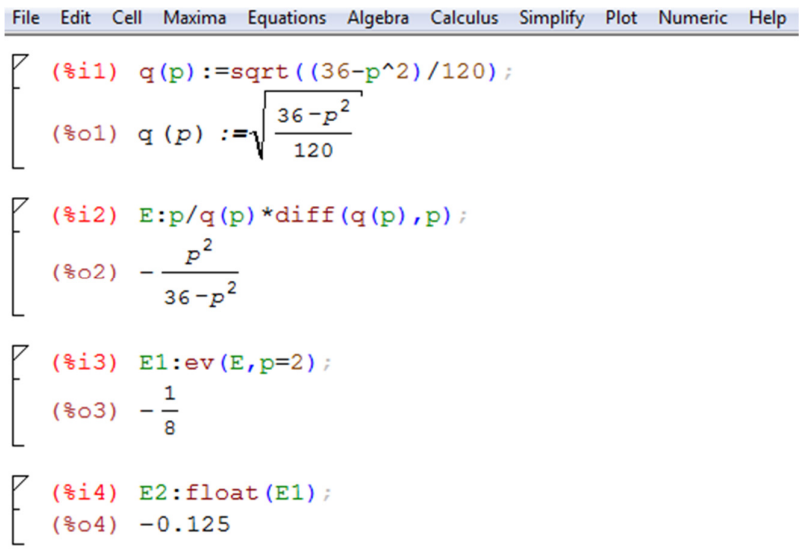
U drugom retku je zadan izraz za izračun koeficijenta elastičnosti E na bilo kojoj razini.

U trećem retku se izračunava traženi koeficijent elastičnosti uvrštavajući $p = 2$ u izraz za E dobiven u prethodnom retku. Dobiveni koeficijent je označen s $E1$.

Da se dobije decimalni zapis izračunanoga koeficijenta elastičnosti, u četvrtom retku se primijeni funkcija `float`. Dobiveni decimalni broj je označen s $E2$.

Nakon izvršavanja svih četiriju redaka dobiva se Slika 18.

Slika 18. Rješenje Primjera 4. pomoću programa *Maxima*



Izvor: autor

4.5. Primjer 5.

(Prilagođeno prema Perkov, J. (2004)) Zadana je funkcija

$$p = p(q) = \frac{1-6\cdot q}{30\cdot q} \ ,$$

pri čemu su p cijena, a q količina neke robe:

a) Izračunati koeficijent elastičnosti cijene u odnosu na promjenu potražnje na razini q = 1. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

b) Izračunati koeficijent elastičnosti potražnje u odnosu na promjenu cijene na razini p = 4. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

***Analitičko rješenje*:**

a) Najprije se odredi izraz za koeficijent elastičnosti cijene u odnosu na promjenu potražnje na bilo kojoj razini:

$$E_{p,q} = \frac{q}{p}\cdot p' = \frac{q}{\frac{1-6\cdot q}{30\cdot q}}\cdot\left(\frac{1-6\cdot q}{30\cdot q}\right)' = \frac{30\cdot q^2}{1-6\cdot q}\cdot\frac{(1-6\cdot q)'\cdot 30\cdot q-(1-6\cdot q)\cdot(30\cdot q)'}{(30\cdot q)^2} =$$

$$= \frac{30\cdot q^2}{1-6\cdot q}\cdot\frac{-6\cdot 30\cdot q-(1-6\cdot q)\cdot 30}{(30\cdot q)^2} = \frac{30\cdot q^2}{1-6\cdot q}\cdot\frac{-180\cdot q-30+180\cdot q}{(30\cdot q)^2} =$$

$$= \frac{30\cdot q^2}{1-6\cdot q}\cdot\frac{-30}{30^2\cdot q^2} = \frac{-1}{1-6\cdot q} = \frac{1}{6\cdot q-1}.$$

U ovaj izraz uvrsti se $q=1$, pa se dobije:

$$(E_{p,q})_{q=1} = \frac{1}{6\cdot 1-1} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Zaključuje se da ako se vrijednost potražnje na razini $q=1$ poveća za 1%, onda će se cijena povećati za 0.2%. Dakle, na zadanoj razini potražnje cijena je neelastična.

b) Iz izraza $p = p(q) = \frac{1-6\cdot q}{30\cdot q}$ izrazi se q kao funkcija varijable p. Slijedi redom:

$$p=\frac{1-6\cdot q}{30\cdot q} \quad /\cdot 30\cdot q$$
$$30\cdot p\cdot q=1-6\cdot q,$$
$$30\cdot p\cdot q+6\cdot q=1,$$
$$q\cdot(30\cdot p+6)=1 \quad /:(30\cdot p+6)$$
$$q=\frac{1}{30\cdot p+6}$$

Odredi se koeficijent elastičnosti varijable q u odnosu na varijablu p na bilo kojoj razini:

$$E_{q,p}=\frac{p}{q}\cdot q'=\frac{p}{\frac{1}{30\cdot p+6}}\cdot\left(\frac{1}{30\cdot p+6}\right)'=p\cdot(30\cdot p+6)\cdot\frac{(1)'\cdot(30\cdot p+6)-1\cdot(30\cdot p+6)'}{(30\cdot p+6)^2}=$$
$$=p\cdot\frac{0\cdot(30\cdot p+6)-1\cdot 30}{30\cdot p+6}=\frac{-30\cdot p}{30\cdot p+6}=\frac{-30\cdot p}{6\cdot(5\cdot p+1)}=\frac{-5\cdot p}{5\cdot p+1}.$$

U ovaj izraz uvrsti se $p=4$, pa se dobije:

$$(E_{q,p})_{p=4}=\frac{-5\cdot 4}{5\cdot 4+1}=-\frac{20}{21}\approx -0.95.$$

Zaključuje se da ako se cijena poveća za 1% na razini $p=4$, onda se potražnja smanji za približno 0.95%.

Rješenje pomoću programa Maxima:

U prozor se utipkava redom:

```
p(q):=(1-6*q)/30*q);
E:q/p(q)*diff(p(q),p);
E1:ev(E,q=1);
E2:float(E1);
q(p):=1/(30*p+6);
E:p/q(p)*diff(q(p),p);
E1:ev(E=4);
E2:float(E1);
```

Pritom se nakon završetka unosa svakoga pojedinoga retka istodobno pritisnu tipke *Shift* i *Enter*.

Slijedi pojašnjenje svakog pojedinog retka.

U prvom retku je definirana funkcija *p*.

U drugom retku je zadan izraz za izračun koeficijenta elastičnosti funkcije *p* na bilo kojoj razini.

U trećem retku se izračunava traženi koeficijent elastičnosti uvrštavajući $q = 1$ u izraz za *E* dobiven u prethodnom retku. Dobiveni koeficijent je označen s E_1.

Da se dobije decimalan zapis koeficijenta elastičnosti na razini *q* = 1, u četvrtom retku se primijeni funkcija `float`. Dobiveni decimalni broj je označen s E_2.

U petom retku je definirana funkcija *q*. Ona zapravo predstavlja inverz funkcije *p* s obzirom na operaciju kompozicije funkcija. U programu *Maxima* ne postoji funkcija ili opcija koja omogućuje izravno određivanje inverza funkcije.

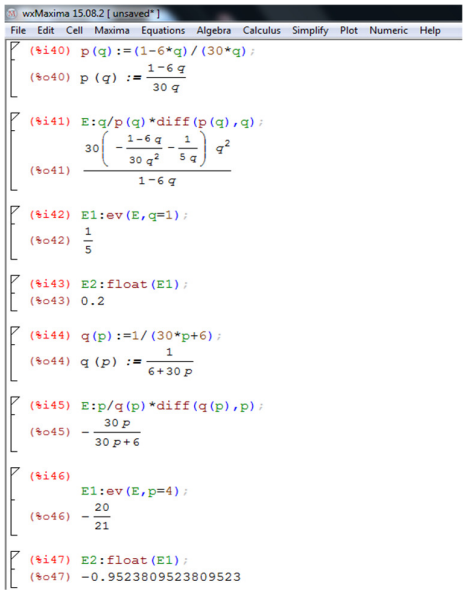
U šestom retku je zadan izraz za izračun koeficijenta elastičnosti funkcije *q* na bilo kojoj razini.

U sedmom retku se izračunava traženi koeficijent elastičnosti uvrštavajući $p = 4$ u izraz dobiven u prethodnom retku. Dobiveni koeficijent je označen s E_1.

Da se dobije decimalan zapis koeficijenta elastičnosti na razini *p* = 4, u osmom retku se primjeni funkcija `float`. Dobiveni decimalni broj je označen s E_2.

Nakon izvršavanja svih osam redaka dobiva se Slika 19.

Slika 19. Rješenje Primjera 5. pomoću programa *Maxima*



Izvor: autor

4.6. Primjer 6.

(Prilagođeno prema Neralić, L., Šego B. (2014.)) Zadana je funkcija potražnje za puretinom (q) u zavisnosti o cijeni puretine (p_p), cijeni teletine (p_t) i iznosa dohotka (d):

$$q = 3000 + 6 \cdot p_p - 6 \cdot p_t + 0.05 \cdot d \,.$$

Izračunati koeficijente križne i dohodovne elastičnosti na razini $p_p = 30$, $p_t = 80$ i $d = 6000$. Objasniti značenje dobivenih rezultata.

Analitičko rješenje:

Budući da potražnja za puretinom zavisi o cijeni teletine, dobije se točno jedan križni koeficijent elastičnosti. Izračunava se:

$$E_{q,p_p} = \frac{p_p}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial p_p} = \frac{p_p}{3000 + 6 \cdot p_p - 6 \cdot p_t + 0.05 \cdot d} \cdot 6$$

$$(E_{q,p_p})_{(p_t=80,\, p_p=30,\, d=6000)} = \frac{30}{3000 + 6 \cdot 30 - 6 \cdot 80 + 0.05 \cdot 6000} \cdot 6 =$$

$$= \frac{30}{3000 + 180 - 180 + 300} \cdot 6 = \frac{30}{3300} \cdot 6 = 0.06$$

Zaključuje se da ako se cijena teletine na razini $p_p = 30$, $p_t = 80$ i $d = 6000$ poveća za 1%, a cijena puretine i iznos dohotka ostanu nepromijenjeni, onda će se potražnja za puretinom povećati za približno 0.06 %. Koeficijent križne elastičnosti je strogo pozitivan, pa zaključujemo da su teletina i puretina supstituti.

Preostaje izračunati koeficijent dohodovne elastičnosti:

$$E_{q,d} = \frac{d}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial d} = \frac{d}{3000 + 6 \cdot p - 6 \cdot p_t + 0.05 \cdot d} \cdot 0.05 =$$

$$= \frac{6000}{3000 + 6 \cdot 30 - 6 \cdot 80 + 0.05 \cdot 6000} \cdot 0.05 = \frac{6000}{3300} \cdot 0.05 = 0.1.$$

Zaključuje se da ako iznos dohotka na razini $p_p = 30$, $p_t = 80$ i $d = 6000$ poveća za 1%, a cijena puretine i cijena teletine ostanu nepromijenjene, onda će se potražnja za puretinom povećati za približno 0.1 %. Iz dobivenoga rezultata slijedi da je potražnja neelastična u odnosu na promjenu dohotka.

Rješenje pomoću programa Maxima:

U radni prozor se utipkava redom:

```
q:3000+6*pp-6*pt+0.05*d;
E1:pp/q*diff(q,pp,1);
E2:ev(E1,pp=30,pt=80,d=6000);
E3:d/q*diff(q,d,1);
E4:ev(E3,pp=30,pt=80,d=6000);
```

Pritom se nakon završetka unosa svakoga pojedinoga retka istodobno pritisnu tipke *Shift* i *Enter*.

Slijedi pojašnjenje svakog pojedinog retka.

U prvom retku je definirana funkcija q.

U drugom retku zadan je izraz za izračun koeficijenta križne elastičnosti potražnje u odnosu na cijenu puretine na bilo kojoj razini cijene puretine. Taj koeficijent je označen s $E1$.

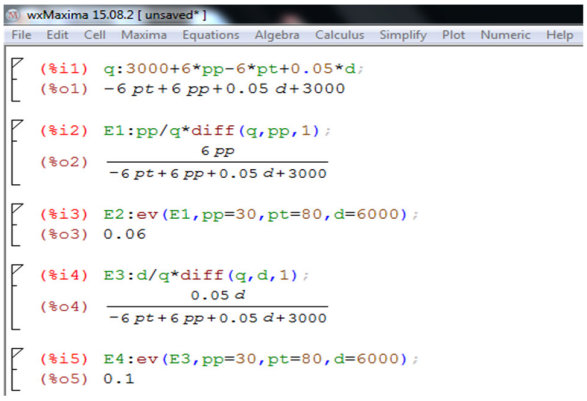
U trećem retku se izračunava koeficijent križne elastičnosti uvrštavajući vrijednosti $pp = 30,\ pt = 80,\ d = 6000$ u izraz za $E1$. Dobiveni koeficijent označen je s $E2$.

U četvrtom retku zadan je izraz za izračun dohodovnog koeficijenta elastičnosti na bilo kojoj razini dohotka. Taj je koeficijent označen s $E3$.

U petom retku se izračunava koeficijent dohodovne elastičnosti uvrštavajući izraze $pp = 30,\ pt = 80,\ d = 6000$ u izraz za $E3$.Dobiveni koeficijent označen je s $E4$.

Nakon izvršavanja svih pet redaka dobiva se Slika 20.

Slika 20. Rješenje Primjera 6. pomoću programa *Maxima*



Izvor: autor

Za rješavanje Primjera 7. i 8. bit će potrebna sljedeća tvrdnja.

<u>Tvrdnja 2.</u> Neka je $f(x,y) = x^A \cdot y^B$, pri čemu su $A, B \in \mathbb{R}$ konstante. Tada vrijede jednakosti:

$$E_{f,x} = A,$$
$$E_{f,y} = B.$$

Dokaz: Poznato je da je derivacija funkcije $f(x) = x^C$, pri čemu je $C \in \mathbb{R}$ konstanta, jednaka $f'(x) = C \cdot x^{C-1}$. (Za dokaz i osnovna pravila deriviranja realna funkcije jedne realne varijable vidjeti npr. Neralić, L., Šego, B. (2014.)). Pravilo funkcije *f* derivira se po varijabli *x* tako da se varijabla *y* smatra konstantom, a faktor koji sadrži varijablu *y* prepiše. Analogno, izraz za *f* derivira se po varijabli *y* tako da se varijabla *x* smatra konstantom, a faktor koji sadrži varijablu *x* prepiše. Slijedi redom:

$$E_{f,x} = \frac{x}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^A \cdot y^B} \cdot A \cdot x^{A-1} \cdot y^B = \frac{x^{1+(A-1)} \cdot y^B}{x^A \cdot y^B} \cdot A = \frac{x^A \cdot y^B}{x^A \cdot y^B} \cdot A = A,$$
$$E_{f,y} = \frac{y}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^A \cdot y^B} \cdot x^A \cdot B \cdot y^{B-1} = \frac{x^A \cdot y^{1+(B-1)}}{x^A \cdot y^B} \cdot B = \frac{x^A \cdot y^B}{x^A \cdot y^B} \cdot B = B,$$

što je i trebalo pokazati. ■

4.7. Primjer 7.

(Prilagođeno prema Neralić, L., Šego B. (2014.)) Funkcija potražnje kruha zadana je pravilom

$$q = p_K^{1.2} \cdot p_B^{-0.75},$$

gdje su p_K i p_B redom cijene kruha i brašna.

a) Odrediti koeficijent elastičnosti E_{q,p_K} na bilo kojoj razini cijene kruha i objasniti njegovo značenje.

b) Odrediti koeficijent elastičnosti E_{q,p_B} na bilo kojoj razini cijene brašna i objasniti njegovo značenje.

c) Kako će se promijeniti potražnja za kruhom ako se cijena brašna poveća za 10%?

d) Jesu li kruh i brašno komplementi ili supstituti? Objasniti svoj odgovor.

Analitičko rješenje:

a) <u>1. *rješenje*</u>: Traženi koeficijent računa se prema formuli

$$E_{q,p_K} = \frac{p_K}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial p_K}.$$

Slijedi:

$$E_{q,p_K} = \frac{p_K}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial p_K} = \frac{p_k}{p_K^{1.2} \cdot p_B^{-0.75}} \cdot 1.2 \cdot p_K^{1.2-1} \cdot p_B^{-0.75} = \frac{p_K^{1+(1.2-1)} \cdot p_B^{-0.75}}{p_K^{1.2} - p_B^{-0.75}} \cdot 1.2 =$$
$$= \frac{p_K^{1.2} \cdot p_B^{-0.75}}{p_K^{1.2} \cdot p_B^{-0.75}} \cdot 1.2 = 1.2.$$

<u>2. *rješenje*</u>: Primjenom Tvrdnje 2. zaključuje se da je traženi koeficijent jednak eksponentu uz potenciju p_K. Taj koeficijent je jednak 1.2.

Zaključuje se da ako se cijena kruha na bilo kojoj razini poveća za 1%, a cijena brašna ostane nepromijenjena, potražnja za kruhom će se povećati za 1.2%.

b) <u>1. *rješenje*</u>: Traženi koeficijent računa se prema formuli:

$$E_{q,p_B} = \frac{p_B}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial p_B}.$$

Slijedi:

$$E_{q,p_B} = \frac{p_B}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial p_B} = \frac{p_B}{p_K^{1.2} - p_B^{-0.75}} \cdot p_K^{1.2} \cdot (-0.75) \cdot p_B^{-0.75-1} = \frac{p_K^{1.2} \cdot p_B^{1+(-0.75-1)}}{p_K^{1.2} - p_B^{-0.75}} \cdot (-0.75) =$$
$$= \frac{p_K^{1.2} \cdot p_B^{-0.75}}{p_K^{1.2} \cdot p_B^{-0.75}} \cdot (-0.75) = -0.75.$$

<u>2. *rješenje*</u>: Primjenom Tvrdnje 2. zaključuje se da je traženi koeficijent jednak eksponentu uz potenciju p_B. Taj eksponent je jednak –0.75.

Zaključuje se da ako se cijena brašna na bilo kojoj razini poveća za 1%, a cijena kruha ostane nepromijenjena, potražnja za kruhom će se smanjiti za 0.75%.

c) Iz rješenja **b)** podzadatka zaključuje se da ako se cijena brašna na bilo kojoj razini poveća za 10%, onda će se potražnja za kruhom smanjiti za $0.75 \cdot 10 = 7.5\%$.

d) Budući da je $E_{q,p_B} = -0.75 < 0$, zaključuje se da su kruh i brašno komplementi jer povećanje cijene brašna snižava potražnju za kruhom.

Rješenje pomoću programa Maxima:

U radni prozor se utipkava redom:

```
q(pK,pB):=pK^1.2*pB^(-0.75);
E1:pK/q(pK,pB)* diff(q(pK,pB),pK);
E2:pB/q(pK,pB)*diff(q(pK,pB),pB);
promjena:E2*10;
```

Pritom se nakon završetka unosa svakoga pojedinoga retka istodobno pritisnu tipke *Shift* i *Enter*.

Slijedi pojašnjenje svakog pojedinog retka.

U prvom retku je definirana funkcija potražnje kruha q.

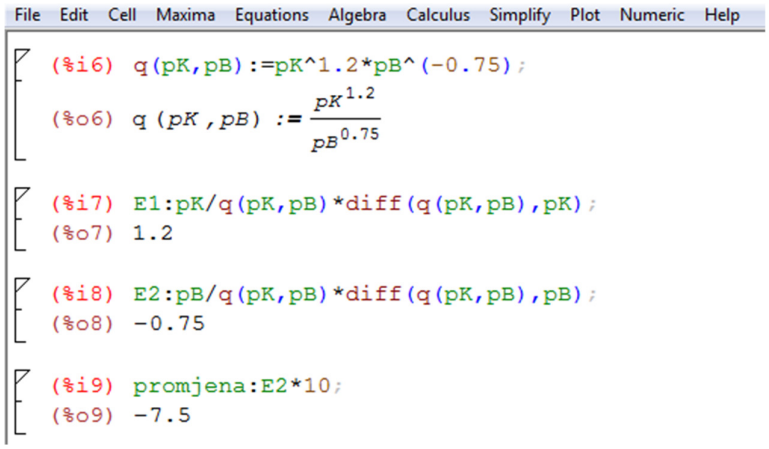
U drugom retku je zadan izraz za izračun koeficijenta elastičnosti E_{q,p_K} na bilo kojoj razini cijene kruha. Dobiveni koeficijent je označen s $E1$.

U trećem retku je zadan izraz za izračun koeficijenta elastičnosti E_{q,p_B} na bilo kojoj razini cijene brašna. Dobiveni koeficijent je označen s $E2$.

U četvrtom retku se računa relativna promjena (iskazana u postotcima) cijene kruha ako se cijena brašna poveća za 10%. Dobivena vrijednost označena je s `promjena`.

Nakon izvršavanja svih četiriju redaka dobiva se Slika 21.

Slika 21. Rješenje Primjera 7. pomoću programa *Maxima*



Izvor: autor

4.8. Primjer 8.

(Prilagođeno prema Neralić, L. , Šego B. (2014.)) Funkcija potražnje kave zadana je pravilom

$$q = p_K^{-0.9} \cdot p_C^{0.6},$$

gdje su p_K i p_C redom cijene kave i kakaa.

a) Odrediti koeficijent elastičnosti E_{q,p_K} na bilo kojoj razini cijene kave i objasniti njegovo značenje.

b) Odrediti koeficijent elastičnosti E_{q,p_C} na bilo kojoj razini cijene kakaa i objasniti njegovo značenje.

c) Kako će se promijeniti potražnja za kavom ako se cijena kakaa smanji za 10 %?

d) Jesu li kava i kakao komplementi ili supstituti? Objasniti svoj odgovor.

Analitičko rješenje:

a) 1. *rješenje*: Traženi koeficijent računa se prema formuli:

$$E_{q,p_K} = \frac{p_K}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial p_K}.$$

Dobiva se:

$$E_{q,p_K} = \frac{p_K}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial p_K} = \frac{p_K}{p_K^{-0.9} \cdot p_C^{0.6}} \cdot (-0.9) \cdot p_K^{(-0.9-1)} \cdot p_C^{0.6} = \frac{p_K^{1+(-0.9-1)} \cdot p_C^{0.6}}{p_K^{-0.9} \cdot p_C^{0.6}} \cdot (-0.9) =$$
$$= \frac{pK^{-0.9} \cdot p_C^{0.6}}{p_K^{-0.9} \cdot p_C^{0.6}} \cdot (-0.9) = -0.9.$$

<u>2. *rješenje*</u>: Primjenom Tvrdnje 2. slijedi da je traženi koeficijent jednak eksponentu uz potenciju p_K. Taj eksponent je jednak –0.9.

Zaključuje se da ako se cijena kave poveća za 1%, a cijena kakaa ostane nepromijenjena, potražnja za kavom će se smanjiti za 0.9%.

b) <u>1. *rješenje*</u>: Traženi koeficijent računa se prema formuli:

$$E_{q,p_C} = \frac{p_C}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial p_C}.$$

Dobije se:

$$E_{q,p_C} = \frac{p_C}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial p_C} = \frac{p_C}{p_K^{-0.9} \cdot p_C^{0.6}} \cdot p_K^{-0.9} \cdot 0.6 \cdot p_C^{0.6-1} = \frac{p_K^{-0.9} \cdot p_C^{1+(0.6-1)}}{p_K^{-0.9} \cdot p_C^{0.6}} \cdot 0.6 =$$
$$= \frac{p_K^{-0.9} \cdot p_C^{0.6}}{p_K^{-0.9} \cdot p_C^{0.6}} \cdot 0.6 = 0.6.$$

<u>2. *rješenje*</u>: Primjenom Tvrdnje 2. slijedi da je traženi koeficijent jednak eksponentu uz potenciju p_C. Taj eksponent je jednak 0.6.

Zaključuje se da ako se cijena kakaa poveća za 1%, a cijena kave ostane nepromijenjena, potražnja za kavom će se povećati za 0.6%.

c) Iz rješenja **b)** podzadatka slijedi da ako se cijena kakaa smanji za 10%, a cijena kave ostane nepromijenjena, potražnja za kavom će se smanjiti za $10 \cdot 0.6 = 6\%$.

d) Budući da je $E_{q,p_C} = 0.6 > 0$, zaključuje se da su kava i kakao supstituti, tj. da smanjenje cijene kakaa snižava potražnju za kavom.

Rješenje pomoću programa Maxima:

U radni prozor se utipkava redom:

```
q(pK,pC):=pK^(-0.9)*pC^0.6;
E1:pK/q(pK,pC)*diff(q(pK,pC),pK);
E2:pC/q(pK,pC)*diff(q(pK,pC),pC);
promjena:E2*(-10);
```

Pritom se nakon završetka unosa svakoga pojedinoga retka istodobno pritisnu tipke *Shift* i *Enter*.

Slijedi pojašnjenje svakog pojedinog retka.

U prvom retku je definirana funkciju potražnje za kavom q.

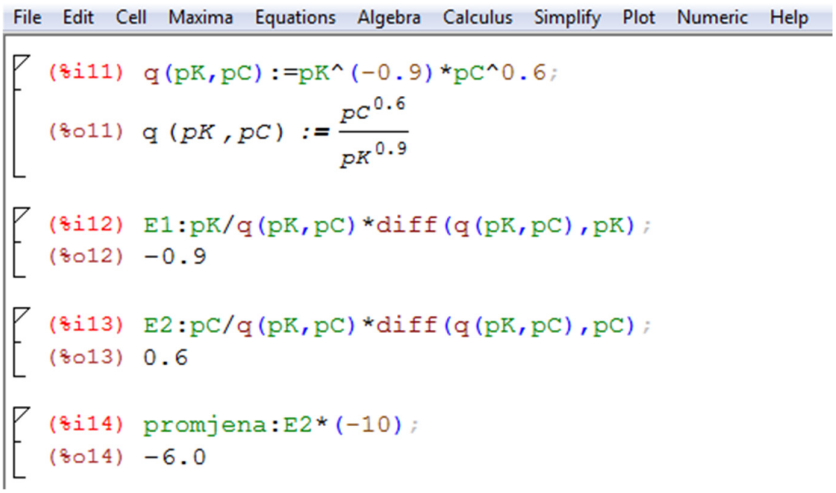
U drugom retku je zadan izraz za izračun koeficijenta elastičnosti E_{q,p_K} za bilo koju razinu cijene kave. Dobiveni koeficijent označen je s $E1$.

U trećem retku je zadan izraz za izračun koeficijenta elastičnosti E_{q,p_C} za bilo koju razinu cijene kakaa. Dobiveni koeficijent označen je s $E2$.

U četvrtom retku računa se potražnja za kavom ako se cijena kakaa smanji za 10 %. Tražena vrijednost označena je s `promjena`.

Nakon izvršavanja svih četiriju redaka dobiva se Slika 22.

Slika 22. Rješenje Primjera 8. pomoću programa *Maxima*



Izvor: autor

4.9. Primjer 9.

(Prilagođeno prema Neralić, L., Šego B. (2014.)) Zadana je funkcija potražnje za proizvodom *A* u zavisnosti o cijenama proizvoda *A* i *B*:

$$q_A = q_A(p_A, p_B) = 50 \cdot p_A^x \cdot (p_A + p_B)^2.$$

Izračunati vrijednost *x* tako da zbroj koeficijenata parcijalne i križne elastičnosti bude jednak 3.

1. *rješenje*:

Najprije se odrede koeficijenti parcijalne, odnosno križne elastičnosti na bilo kojoj razini.

Koeficijent parcijalne elastičnosti potražnje na bilo kojoj razini cijene proizvoda *A* jednak je:

$$E_{q_A,p_A} = \frac{p_A}{q_A} \cdot \frac{\partial q_A}{\partial p_A} = \frac{p_A}{50 \cdot p_A{}^x \cdot (p_A + p_B)^2} \cdot \left\{50 \cdot \left[x \cdot p_A{}^{x-1} \cdot (p_A + p_B)^2 + p_A{}^x \cdot 2 \cdot (p_A + p_B) \cdot 1\right]\right\} =$$

$$= \frac{p_A}{50 \cdot p_A{}^x \cdot (p_A + p_B)^2} \cdot 50 \cdot p_A{}^{x-1} \cdot (p_A + p_B) \cdot \left[x \cdot (p_A + p_B) + p_A \cdot 2\right] = \frac{x \cdot (p_A + p_B) + 2 \cdot p_A}{p_A + p_B}.$$

Budući da potražnja za proizvodom *A* zavisi o cijeni proizvoda *B*, postoji točno jedan koeficijent križne elastičnosti. Dobiva se:

$$E_{q_A,p_B} = \frac{p_B}{p_A} \cdot \frac{\partial p_A}{\partial p_B} = \frac{p_B}{50 \cdot p_A{}^x \cdot (p_A + p_B)^2} \cdot 50 \cdot p_A{}^x \cdot 2 \cdot (p_A + p_B) \cdot 1 = \frac{2 \cdot p_B}{p_A + p_B}.$$

Zbroj tih koeficijenata je jednak:

$$E_{q_A,p_A} + E_{q_A,p_B} = \frac{x \cdot (p_A + p_B) + 2 \cdot p_A}{p_A + p_B} + \frac{2 \cdot p_B}{p_A + p_B} = \frac{x \cdot (p_A + p_B) + 2 \cdot p_A + 2 \cdot p_B}{p_A + p_B} =$$

$$= \frac{x \cdot (p_A + p_B) + 2 \cdot (p_A + p_B)}{p_A + p_B} = \frac{(p_A + p_B) \cdot (x + 2)}{p_A + p_B} = x + 2.$$

Vrijednost ovoga izraza treba biti jednaka 3, pa se dobije jednadžba

$$x + 2 = 3.$$

Odatle je $x = 1$.

2. *rješenje*:

Odredi se koeficijent homogenosti funkcije q_A :

$$
\begin{aligned}
&q_A(\alpha \cdot p_A, \alpha \cdot p_B) = 50 \cdot (\alpha \cdot p_A)^x \cdot (\alpha \cdot p_A + \alpha \cdot p_B)^2 = \\
&= 50 \cdot \alpha^x \cdot p_A{}^x \cdot \left[\alpha \cdot (p_A + p_B)\right]^2 = 50 \cdot \alpha^x \cdot p_A{}^x \cdot \alpha^2 \cdot (p_A + p_B)^2 = \\
&= \alpha^{x+2} \cdot \left[50 \cdot p_A{}^x \cdot (p_A + p_B)^2\right] = \alpha^{x+2} \cdot q_A(p_{A,} p_B)
\end{aligned}
$$

Odavde slijedi da je koeficijent homogenosti jednak $x+2$. Prema Tvrdnji 1., taj koeficijent je jednak zbroju koeficijenata parcijalne i križne elastičnosti. Tako se opet dobiva jednadžba $x+2=3$ i iz nje $x=1$.

4.10. Primjer 10.

(Prilagođeno prema Galetić, F. (2016.)) Zadane su cijene i tjedne potraživane količine pizza i špageta u pizzeriji *Mamma mia* iz Frkljevaca:

Dobro	*Količina*	*Jedinična cijena*
pizza	10000 komada	9 €
špageti	2 tone	6 €

Tablica 2. Podaci za Primjer 10.

Poznato je da je povećanje jedinične cijene pizze na 10 € uzrokovalo pad tjedne potražnje za pizzama na 8000 komada.

a) Izračunati koeficijent elastičnosti potražnje za pizzama na razini cijene od 9 €. Objasniti značenje dobivenoga rezultata.

b) Poznato je da je koeficijent elastičnosti potražnje za špagetima na razini cijene od 6 € jednak –1.5, a nova tjedna potražnja za špagetima 2.5 tona. Izračunati novu jediničnu cijenu špageta.

c) Jesu li pizza i špageti komplementi ili supstituti? Objasniti svoj odgovor.

Analitičko rješenje:

a) Traženi koeficijent elastičnosti računa se prema izrazu:

$$E_{Q,P} = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1},$$

gdje su P_1 početna jedinična cijena pizze, Q_1 početna tjedna potraživana količina pizze, P_2 jedinična cijena pizze nakon promjene (povećanja ili smanjenja) i Q_2 potraživana količina pizze nakon promjene jedinične cijene. U ovom slučaju su:

$$P_1 = 9,\ Q_1 = 10000,\ P_2 = 10,\ Q_2 = 8000,$$

pa je traženi koeficijent elastičnosti jednak:

$$E_{Q,P} = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} = \frac{9}{10000} \cdot \frac{8000 - 10000}{10 - 9} = -\frac{9}{5} = -1.8.$$

Zaključuje se da na razini cijene od 9 € povećanje cijene pizze za 1% uzrokuje smanjenje potražnje za pizzama za 1.8%.

b) Analogno kao u **a)** podzadatku, koeficijent elastičnosti potražnje za špagetima na razini cijene od 6 € računa se prema izrazu:

$$E_{Q,P} = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1},$$

gdje su P_1 početna jedinična cijena špageta, Q_1 početna tjedna potraživana količina špageta, P_2 jedinična cijena špageta nakon promjene (povećanja ili smanjenja) i Q_2 potraživana količina špageta nakon promjene jedinične cijene. U ovom slučaju su:

$$E_{Q,P} = -1.5,\ P_1 = 6,\ Q_1 = 2,\ Q_2 = 2.5,$$

pa se uvrštavanjem u izraz $E_{Q,P} = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1}$ dobiva jednadžba:

$$-1.5 = \frac{6}{2} \cdot \frac{2.5 - 2}{P_2 - 6}.$$

Ta jednadžba riješi se na uobičajen način:

$$
\begin{aligned}
&-1.5 = 3 \cdot \frac{0.5}{P_2 - 6}, \quad / : 3 \\
&-0.5 = \frac{0.5}{P_2 - 6}, \\
&-0.5 \cdot (P_2 - 6) = 0.5, \quad / : (-0.5) \\
&P_2 - 6 = -1, \\
&P_2 = -1 + 6 = 5.
\end{aligned}
$$

Zaključuje se da nova jedinična cijena špageta iznosi 5 €.

c) Treba izračunati pripadni koeficijent križne elastičnosti. On se računa prema formuli:

$$E = \frac{\dfrac{Q_2 - Q_1}{Q_1}}{\dfrac{P_2 - P_1}{P_1}},$$

pri čemu su $P_1 = 6, Q_1 = 10000,\ P_2 = 5,\ Q_2 = 8000.$ Uvrštavanjem u gornju formulu dobiva se:

$$E = \frac{\dfrac{8000 - 10000}{10000}}{\dfrac{5 - 6}{5}} = 1.$$

Budući da je $E > 0$, zaključuje se da su pizza i špageti supstituti.

Rješenje pomoću programa Maxima:

a) U radni prozor programa *Maxima* utipka se:

```
P1:9;
Q1:10000;
P2:10;
Q2:8000;
E:P1/Q1*(Q2-Q1)/(P2-P1);
E1:float(E);
```

Pritom se nakon završetka unosa svakoga pojedinoga retka istodobno pritisnu tipke *Shift* i *Enter*.

Slijedi pojašnjenje svakoga pojedinoga retka.

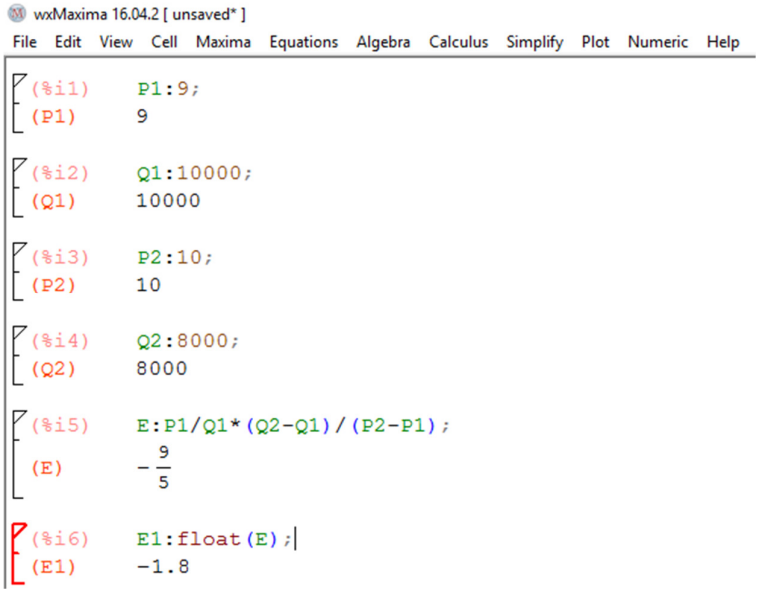
U prvim četirima recima zadane su vrijednosti varijabli P_1, Q_1, P_2 i Q_2.

U petom retku zadan je izraz za izračun traženoga koeficijenta elastičnosti potražnje. Taj je koeficijent označen s *E*.

U šestom retku se koeficijent *E* zapisuje u decimalnom obliku koristeći funkciju `float`.

Nakon izvršenja svih šest redaka dobiva se Slika 23.

Slika 23. Rješenje Primjera 10.a) pomoću programa *Maxima*



Izvor: autor

b) Analogno kao i u analitičkom rješenju dobiva se jednadžba

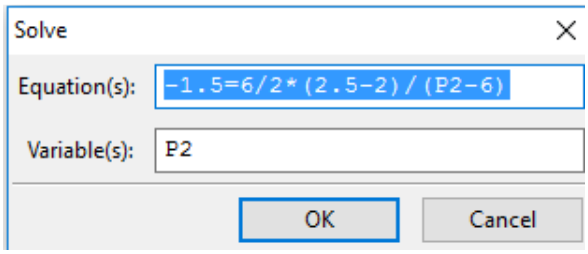
$$-1.5 = \frac{6}{2} \cdot \frac{2.5-2}{P_2-6}.$$

Ta jednadžba riješi se korištenjem opcije *Solve*. Klikne se na izbornik *Equations*, pa se odabere opcija *Solve*…. U dobivenom dijaloškom okviru upisuje se:

- u pravokutnik pored natpisa *Equation*(*s*): `-1.5=6/2*(2.5-2)/(P2-6)`
- u pravokutnik pored natpisa *Variable*(*s*): `P2`

(vidjeti Sliku 24.)

Slika 24. Unos jednadžbe i nepoznanice u dijaloški okvir opcije *Solve*



Izvor: autor

Potom se klikne na *OK*. *Maxima* će ispisati (vidjeti Sliku 25.):

Slika 25. Ispis rješenja Primjera 10.b)

```
(%i1)    solve([-1.5=6/2*(2.5-2)/(P2-6)], [P2]);
rat: replaced -1.5 by -3/2 = -1.5
 rat: replaced -1.5 by -3/2 = -1.5
 (%o1)    [P2=5]
```

Izvor: autor

Treba primijetiti da je pri rješavanju decimalan broj -1.5 zamijenjen razlomkom $-\frac{3}{2}$.

Rješenje podzadatka je $P_2 = 5$.

c) Ovaj podzadatak rješava se potpuno analogno **a)** podzadatku, pa se prepušta čitatelju.

5. ZAKLJUČAK

Ovaj rad objašnjava kako se računalni program *Maxima* može primijeniti pri rješavanju problema koji se odnose na elastičnost ponude i potražnje robe. Na pogodno odabranim primjerima izvršena je usporedba standardnoga analitičkoga načina rješavanja i rješavanja pomoću računalnoga programa *Maxima*.

Osnovne prednosti rješavanja pomoću računalnoga programa *Maxima* u ovakvim slučajevima su mogućnost deriviranja i izračunavanja derivacija u točki relativno složenih matematičkih funkcija. Prigodom određivanja vrijednosti varijabli u kojima je elastičnost jedinična ili savršeno neelastična moguće je relativno jednostavno i brzo riješiti pripadne algebarske i nealgebarske jednadžbe, i to s dovoljnom točnošću. Takve jednadžbe vrlo često nije moguće elementarno riješiti u okviru analitičkoga načina, a rješavanje metodama numeričke matematike može biti nešto sporije zbog većega broja iteracija potrebnih za postizanje dovoljne točnosti.

Osnovni nedostatak rješavanja pomoću računalnoga programa *Maxima* je nužnost upoznavanja s ne baš jednostavnom programskom sintaksom, što može otežati rad neiskusnim ili nedovoljno iskusnim korisnicima. Zbog toga je i u ovom radu bilo potrebno dati zaseban pregled korištenih funkcija, njihovih sintaksi i njihovoga značenja kako bi se lakše i jednostavnije mogli objasniti postupci rješavanja zadataka. Korisničko sučelje i sama struktura programa nisu dovoljno dobro prilagođeni prosječnim korisnicima, pa svi oni koji nemaju dovoljno iskustva u radu s ovakvim programima moraju najprije odvojiti određeno vrijeme kako bi savladali osnove rada s programom *Maxima*, a potom mogli uspješno rješavati problemske zadatke.

Sve navedeno ukazuje da nije nimalo jednostavno zadovoljiti zahtjeve za računalnim programima koji će istodobno biti dovoljno pristupačni svojim korisnicima i omogućavati rješavanje širokoga spektra različitih problema. Također, čak i bolji računalni programi imaju nedostatke (npr. nemogućnost rješavanja nejednadžbi i sustava nejednadžbi) koji se mogu otkloniti tek svojevrsnim kombiniranjem analitičkoga i računalnoga rješavanja problema. No, na temelju praktički svakodnevnoga razvoja suvremene informatičke tehnologije može se očekivati da će navedene težnje u dogledno vrijeme biti zadovoljene, a navedeni nedostatci dovoljno uspješno otklonjeni.

6. LITERATURA

Knjige:

1. Ferenčak, I., 2003., Počela ekonomije, II. izmijenjeno i dopunjeno izdanje, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, str. 106.-107.
2. Martić, Lj., 1992., Matematičke metode za ekonomske analize. I. svezak, 9. izdanje, Zagreb, Narodne novine
3. Neralić, L., Šego, B. 2014., Matematika, Zagreb, Element, str. 267.-270., 296.-289.
4. Perkov, J., 2004., Zbirka riješenih zadataka- odabrana poglavlja matematike, Šibenik, Veleučilište u Šibeniku

Internetski izvori:

5. URL: http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima.html
6. Urroz, Gilberto E., Introduction to *Maxima* (2008.) URL:http://www.neng.usu.edu/cee/faculty/gurro/Software_Calculators/Maxima_Docs/MyMaximaBook/MaximaBookChapter1.pdf
7. Galetić, F., *Elastičnost ponude i potražnje* (2016.) URL: http://web.efzg.hr/dok/EPO/fgaletic/materijali/ELASTI%C4%8CNOST%20PONUDE%20I%20POTRA%C5%BDNJE.ppt

7. POPIS SLIKA I TABLICA

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA