O fiksnim točkama osnovnih hiperbolnih funkcija

NIKOLINA ZATEZALO[1], MIRELA KATIĆ ŽLEPALO[2] I BOJAN KOVAČIĆ[3]

Sažetak

U ovom članku razmatramo fiksne točke četiriju osnovnih hiperbolnih funkcija: sinus hiperbolni, kosinus hiperbolni, tangens hiperbolni i kotangens hiperbolni. Za svaku pojedinu funkciju određujemo ukupan broj fiksnih točaka, te navodimo njihove točne vrijednosti (ako postoje), odnosno njihove približne vrijednosti izračunane metodom raspolavljanja.

1. Uvod

U ovom ćemo članku razmatrati egzistenciju i jedinstvenost fiksnih točaka osnovnih hiperbolnih funkcija: sh x, ch x, th x i cth x. Prvo se podsjetimo na definiciju fiksne točke realne funkcije jedne realne varijable.

Definicija 1. Neka su $X \subseteq \mathbb{R}$ i $f : X \to \mathbb{R}$. *Fiksna točka* funkcije f svaki je $x \in X$ za koji vrijedi jednakost $f(x) = x$.

Napomena 1. Ponekad se pogrešno previđa zahtjev da fiksna točka nužno mora pripadati prirodnom području definicije (domeni) funkcije f. Skup svih fiksnih točaka funkcije f je podskup skupa svih realnih rješenja jednadžbe $f(x) = x$. O domeni funkcije f ovisi je li riječ o pravom podskupu ili su ta dva skupa jednaka.

Napomena 2. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ bijekcija. Tada je skup fiksnih točaka funkcije f jednak skupu fiksnih točaka njezina inverza f^{-1}. Dokaz vidjeti npr. u [1].

[1]Nikolina Zatezalo, studentica stručnoga studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu
[2]Mirela Katić Žlepalo, GraditeljskI odjel Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu
[3]Bojan Kovačić, stručni studij elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu

2. Pregled osnovnih svojstava osnovnih hiperbolnih funkcija

Radi jednostavnosti i preglednosti, u sljedećoj tablici navodimo osnovna svojstva svake od četiriju osnovnih hiperbolnih funkcija koja ćemo koristiti u kasnijem izlaganju.

Funkcija	*Domena D(f)*	*Slika Im(f)*	*(Ne)parnost i monotonost*	*Derivacija*
$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	neparna, strogo rastuća	$\operatorname{ch} x$
ch x $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$[1, +\infty\rangle$	parna	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$	$\mathbb{R}$	$\langle -1, 1\rangle$	neparna, strogo rastuća	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	neparna, strogo padajuća	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Tablica 1. Osnovna svojstva četiriju osnovnih hiperbolnih funkcija

3. Pregled korištenih poučaka

Radi preglednosti, u ovoj točki navodimo pregled poučaka korištenih u daljnjem izlaganju. Svi oni odnose se na realne funkcije jedne realne varijable. Čitatelje zainteresirane za dokaze Poučaka 1. – 3. upućujemo na literaturu [1], [2] i [3].

Poučak 1. Svaka strogo monotona[4] realna funkcija je injekcija.

Poučak 2. Neka je f realna funkcija definirana i derivabilna na otvorenom intervalu $I = \langle a, b\rangle$.

a) Ako za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $f'(x) < 0$, onda je f strogo padajuća na I.

b) Ako za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $f'(x) > 0$, onda je f strogo rastuća na I.

Poučak 3. Neka su $f : X \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in X$. Definirajmo funkciju $g : X \to \mathbb{R}$ pravilom $g(x) = f(x) - x$. Tada je x_0 fiksna točka funkcije f ako i samo ako je x_0 nultočka funkcije g.

[4]tj. strogo rastuća ili strogo padajuća

Poučak 4. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ injekcija. Ako f ima nultočku, onda je ta nultočka jedinstvena.

Dokaz: Neka su x_0 i x_1 dvije nultočke funkcije f. Iz definicije injektivnosti funkcije slijedi $\left(0 = f(x_0) = f(x_1)\right) \Rightarrow x_0 = x_1$, što se i tvrdilo. ■

4. O fiksnim točkama funkcije sh

U ovoj točki dokazujemo sljedeći poučak.

Poučak 5. Funkcija $f(x) = \operatorname{sh} x$ ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = 0$.

Dokaz: Budući da vrijedi jednakost sh(0) = 0, iz Definicije 1. odmah slijedi da je $x_0 = 0$ fiksna točka funkcije f. Stoga treba dokazati jedino jedinstvenost. ■

Definirajmo funkciju $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pravilom $f_1(x) = \operatorname{sh} x - x$. Primjenom Poučka 3. zaključujemo da je $x_0 = 0$ nultočka funkcije f_1. Poučak 5. bit će dokazan dokažemo li da je ta nultočka jedinstvena. Koristeći diferencijalni račun, dobivamo:

$$f_1^{'}(x) = \operatorname{ch} x - 1,$$
$$f_1^{''}(x) = \operatorname{sh} x.$$

Prema Tablici 1., za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $\operatorname{ch} x \geq 1$, odnosno nejednakost $\operatorname{ch} x - 1 \geq 0$. Odatle zaključujemo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $f_1^{'}(x) \geq 0$.

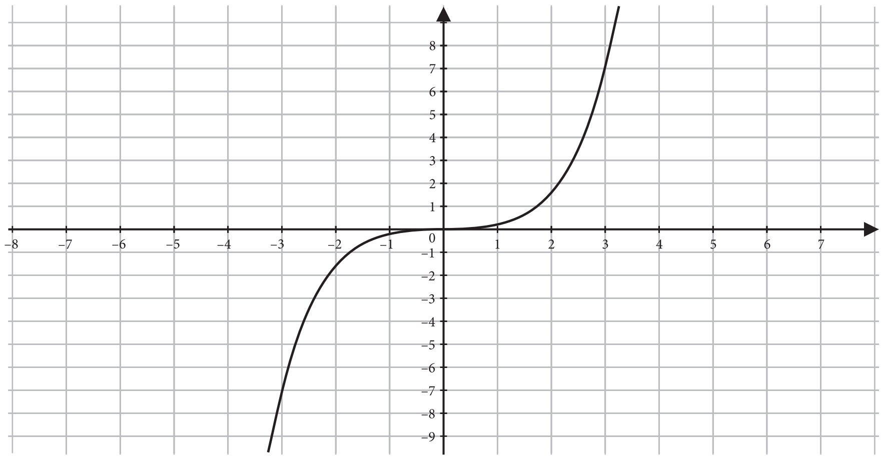
Odredimo sve stacionarne točke funkcije f_1, tj. sve realne nultočke funkcije $f_1^{'}$. Imamo redom:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 = 0, \; / \cdot 2 \cdot e^x$$
$$(e^x)^2 - 2 \cdot e^x + 1 = 0,$$
$$\left(e^x - 1\right)^2 = 0,$$
$$e^x = 1.$$

Odatle je $x = 0$. Dakle, f_1 ima jedinstvenu stacionarnu točku $x_0 = 0$.

Tako smo pokazali da za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi nejednakost $f_1^{'}(x) > 0$. Primjenom Poučka 2. zaključujemo da je f_1 strogo rastuća na skupu $\mathbb{R}$, pa iz Poučka 1. slijedi da je f_1 injekcija. Napokon, iz Poučka 4. zaključujemo da f_1 ima jedinstvenu nultočku, što smo i željeli pokazati. ■

Graf funkcije f_1 prikazan je na Slici 1.



Slika 1. Graf funkcije $f_1(x) = \text{sh}\, x - x$

Napomena 3. Funkcija *f* je bijekcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$[5]. Njezin inverz je funkcija $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom $f_2(x) = \text{Arsh}\, x$[6]. Primjenom Napomene 2. zaključujemo da f_2 ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = 0$.

Napomena 4. Dokaz analogan dokazu Poučka 5. nerijetko se pokušava „pojednostavniti" ovako:

„Funkcija *f* je bijekcija. Identiteta $i(x) = x$ je bijekcija. Razlika dviju bijekcija je opet bijekcija, pa je funkcija f_1 bijekcija. Njezina nultočka je $x_0 = 0$, pa tvrdnja slijedi iz Poučka 3."

Pogreška u ovom „dokazu" je tvrdnja da razlika dviju bijekcija mora biti bijekcija. Npr. funkcije $f_3, f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane pravilima $f_3(x) = 2 \cdot (x+1)$, $f_4(x) = 2 \cdot x + 1$ su bijekcije sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$, ali njihova razlika $f_5(x) = 1$ očito nije bijekcija. Lako se vidi da analogna tvrdnja vrijedi i za zbroj, umnožak i količnik dviju bijekcija. Stoga prigodom obrade ovih pojmova u nastavnoj praksi treba naglašavati da (jedino) *kompozicija* dviju bijekcija mora biti bijekcija.

5. O fiksnim točkama funkcije ch

U ovoj točki dokazujemo sljedeći poučak.

Poučak 6. Funkcija $g(x) = \text{ch}\, x$ nema nijednu fiksnu točku.

[5] Ta tvrdnja lagano slijedi „kombinacijom" svojstva strogoga rasta funkcije *f*, svojstva $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ i Poučka 1.
[6] Oznaku Arch treba čitati: area sinus hiperbolni.

Dokaz: Definirajmo funkciju $g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pravilom $g_1(x)=\operatorname{ch}x-x$. Poučak 6. bit će dokazan dokažemo li da g_1 nema nijednu realnu nultočku. Odredimo intervale monotonosti funkcije g_1. Koristit ćemo $f''-$test[7]. Odredimo prve dvije derivacije funkcije g_1:

$$g_1'(x)=\operatorname{sh}x-1,$$
$$g_1''(x)=\operatorname{ch}x.$$

Odredimo stacionarne točke funkcije g_1. Riješimo jednadžbu $g_1'(x)=0$. Imamo:

$$\operatorname{sh}x-1=0,$$
$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}-1=0,\quad /\cdot 2\cdot e^x$$
$$(e^x)^2-2\cdot e^x-1=0.$$

Zamjenom $t=e^x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2-2\cdot t-1=0$$

Njezina rješenja su $t_1=1+\sqrt{2}$ i $t_2=1-\sqrt{2}$. Rješenje t_2 odbacujemo zbog nejednakosti $t=e^x>0$ (koja vrijedi za svaki $x\in\mathbb{R}$) i nejednakosti $t_2<0$. Slijedi:

$$e^x=1+\sqrt{2},$$
$$x=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Zbog toga je $x_1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\approx 0.88137$ jedina stacionarna točka funkcije g.

Vidjeli smo da je slika funkcije ch x interval $[1,+\infty\rangle$. Stoga posebno vrijedi i nejednakost $g_1''(x_1)\geq 1>0$. Primjenom $f''-$testa slijedi da g_1 u točki x_1 ima strogi lokalni minimum. Pokažimo da je taj lokalni minimum ujedno i globalni minimum funkcije g_1.

Promotrimo funkciju g_1 na intervalima $\left\langle-\infty,x_1\right\rangle$ i $\left\langle x_1,+\infty\right\rangle$. Odaberemo $x_2=0\in\left\langle-\infty,x_1\right\rangle$ i $x_3=1\in\left\langle x_1,+\infty\right\rangle$. Izračunamo:

$$g_1'(x_2)=-1<0,$$
$$g_1'(x_3)=\frac{e+e^{-1}}{2}-1=\frac{e^2-2\cdot e+1}{2\cdot e}=\frac{(e-1)^2}{2\cdot e}>0.$$

Primjenom Poučka 2. zaključujemo da g_1 strogo pada na intervalu $\left\langle-\infty,x_1\right\rangle$, a strogo raste na intervalu $\left\langle x_1,+\infty\right\rangle$. To znači da g_1 ima strogi globalni minimum u točki x_1.

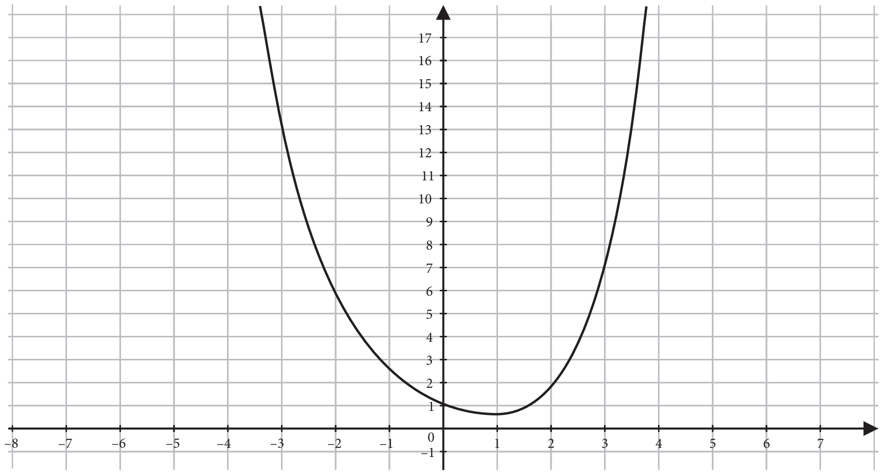
[7]Detaljnije o f'' – testu vidjeti npr. u [2].

Iz definicije strogoga globalnoga minimuma slijedi da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost

$$g_1(x) \geq g_1(x_1) = \text{ch}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 0.53284,$$

Odatle slijedi $g_1(x) > 0,$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, g_1 je strogo pozitivna na cijelom svom području definicije, pa ta funkcija nema realnih nultočaka, što smo i željeli dokazati. ■

Graf funkcije g_1 prikazan je na Slici 2.



Slika 2. Graf funkcije $g_1(x) = \text{ch}\, x - x$

Napomena 5. Funkcija *g* je parna, pa nije bijekcija. Međutim, njezina restrikcija na interval $[0\ +\infty\rangle$ je bijekcija, pa ima inverz. Taj inverz je funkcija $g_2 : [1, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ definirana pravilom $g_2(x) = \text{Arch}\, x$ [8]. Primjenom Napomene 2. zaključujemo da f_2 nema nijednu fiksnu točku.

6. O fiksnim točkama funkcije th

U ovoj točki dokazujemo sljedeći poučak.

Poučak 7. Funkcija $h(x) = \text{th}\, x$ ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = 0$.

Dokaz: Budući da vrijedi jednakost th(0) = 0, iz Definicije 1. odmah slijedi da je $x_0 = 0$ fiksna točka funkcije *f*. Stoga treba dokazati jedino jedinstvenost fiksne točke.

Postupimo analogno kao u dokazu Poučka 5. Definirajmo funkciju $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pravilom $h_1(x) = \text{th}\, x - x$. Pokažimo da h_1 ima jedinstvenu nultočku, čime će tvrdnja

[8]Oznaku Arsh treba čitati: area kosinus hiperbolni.

Poučka 7. biti dokazana. Odredimo prve dvije derivacije te funkcije, pri čemu koristimo osnovni hiperbolni identitet $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$:

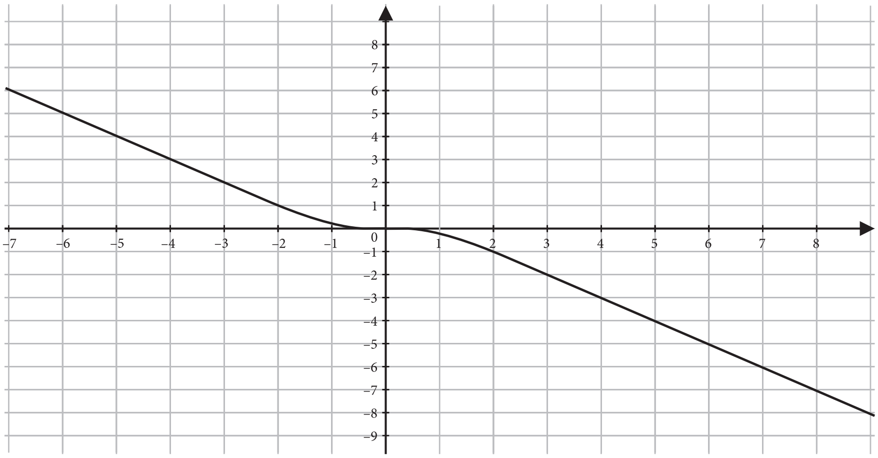
$$h_1'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} - 1 = \frac{1 - \mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{-\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = -\mathrm{th}^2 x,$$

$$h_1''(x) = -2 \cdot \mathrm{th}\, x \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = -2 \cdot \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = -\frac{2 \cdot \mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}^3 x}.$$

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\mathrm{th}^2 x \geq 0$, pa odatle slijedi da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $h_1'(x) \leq 0$. Stacionarne točke funkcije h_1 su sva realna rješenja jednadžbe th $x = 0$, odnosno jednadžbe $\frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = 0$. Ta jednadžba je ekvivalentna jednadžbi sh $x = 0$. U točki 4. pokazali smo da ta jednadžba ima jedinstveno rješenje $x_0 = 0$. Stoga funkcija h_0 ima jedinstvenu stacionarnu točku $x_0 = 0$.

Tako zaključujemo da za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi nejednakost $h_1'(x) < 0$. Primjenom Poučka 2. slijedi da je h_1 strogo padajuća na skupu $\mathbb{R}$. Analogno kao u dokazu Poučka 5. zaključujemo da je h_1 injekcija i da je njezina nultočka jedinstvena, a to je i trebalo dokazati. ■

Graf funkcije h_1 prikazan je na Slici 3.



Slika 3. Graf funkcije $h_1(x)$ = th $x - x$

Napomena 6. Funkcija h je bijekcija s $\mathbb{R}$ u $\langle -1,1 \rangle$. Njezin inverz je funkcija $f_2 : \langle -1,1 \rangle \to \mathbb{R}$ definirana pravilom $h_2(x) = \mathrm{Arth}\, x$[9]. Primjenom Napomene 2. zaključujemo da h_2 ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = 0$.

[9]Oznaku Arth treba čitati: area tangens hiperbolni.

7. O fiksnim točkama funkcije cth

U ovoj ćemo točki pokazati da funkcija $p(x) = \operatorname{cth} x$ ima točno dvije fiksne točke. Potom ćemo približno izračunati svaku od njih koristeći metodu raspolavljanja.

Poučak 8. Funkcija $p(x) = \operatorname{cth} x$ ima točno dvije fiksne točke.

Dokaz: Postupimo analogno kao u dokazu Poučaka 5. – 7. Definirajmo funkciju $p_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ pravilom $p_1(x) = \operatorname{cth} x - x$. Odredimo prve dvije derivacije funkcije p_1, pri čemu koristimo osnovni hiperbolni identitet $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$:

$$p_1'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - 1 = -\frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth}^2 x,$$

$$p_1''(x) = -2 \cdot \operatorname{cth} x \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \right) = 2 \cdot \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 2 \cdot \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^3 x}.$$

Uočimo da za svaki $x \neq 0$ vrijedi nejednakost $p_1'(x) < 0$. Primjenom Poučka 2. zaključujemo da je p_1 strogo padajuća na intervalima $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle 0, +\infty \rangle$. Nadalje, primijetimo da vrijede nejednakosti:

$$\lim_{x \to 0-} p_1(x) = \lim_{x \to 0-} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - x \right) = (\text{zbog } e^x < e^{-x}, \text{ za svaki } x < 0) = -\infty,$$

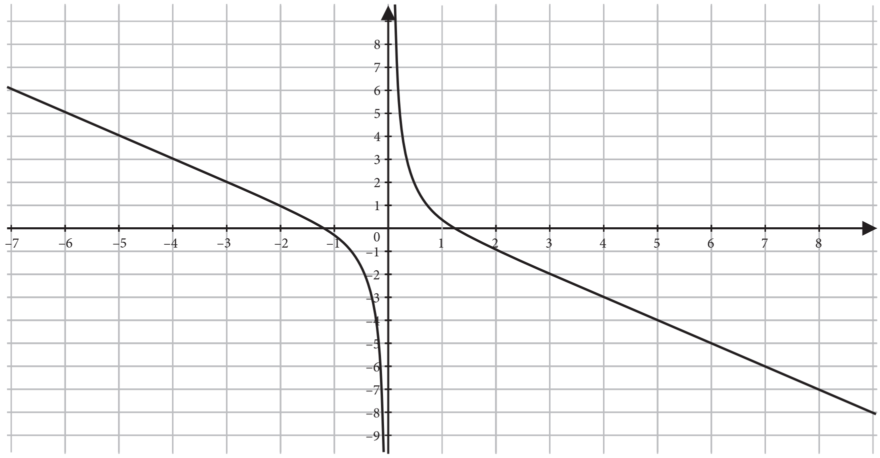
$$\lim_{x \to 0+} p_1(x) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - x \right) = (\text{zbog } e^x > e^{-x}, \text{ za svaki } x > 0) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} p_1(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{(e^x)^2 + 1}{(e^x)^2 - 1} - x \right] = (\text{zbog } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} p_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1 + (e^x)^{-2}}{1 - (e^x)^{-2}} - x \right] = (\text{zbog } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0) = -\infty.$$

Iz prve i treće od tih jednakosti, te dokazanoga svojstva strogoga pada funkcije p_1 zaključujemo da p_1 ima točno jednu nultočku u intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$. Analogno, iz druge i četvrte jednakosti i svojstva strogoga pada funkcije p_1 zaključujemo da p_1 ima točno jednu nultočku u intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. Sada tvrdnja Poučka 8. slijedi izravnom primjenom Poučka 3. ■

Graf funkcije p_1 prikazan je na Slici 4.



Slika 4. Graf funkcije $p_1(x) = \operatorname{cth} x - x$

Iz gornje slike vidimo da fiksne točke iz Poučka 8. pripadaju segmentima [–2, –1] i [1, 2]. Preciznije, postoji jedinstveni $x_1 \in [1, 2]$ takav da su x_1 i $-x_1$ nultočke funkcije p_1.[10] Stoga ćemo metodom raspolavljanja izračunati vrijednost x_1 s točnošću od 10^{-3}. Najveći potreban broj iteracija je najmanje prirodno rješenje nejednadžbe

$$n \geq \frac{\log(2-1) - \log(10^{-3})}{\log 2} - 1 = \frac{3}{\log 2} - 1 \approx 8.97,$$

tj. $n = 9$. Dobiva se sljedeća tablica:

Iteracija	*a*	*b*	*x*	$p_1(x)$
0	1	2	1.5	–0.395208607
1	1	1.5	1.25	–0.07114902
2	1	1.25	1.125	0.110634101
3	1.125	1.25	1.1875	0.017606891
4	1.1875	1.25	1.21875	–0.027259713
5	1.1875	1.21875	1.203125	–0.004953862
6	1.1875	1.203125	1.1953125	0.006293961
7	1.1953125	1.203125	1.19921875	0.000661999

Zaključujemo: $x_1 \approx 1.199$, pa su fiksne točke funkcije p $x_1 \approx 1.199$ i $x_2 = -x_1 \approx -1.199$.

[10]Vrijedi sljedeća tvrdnja: Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neparna funkcija. Tada je x_0 nultočka funkcije f ako i samo ako je $-x_0$ nultočka te funkcije. Za dokaz vidjeti [1].

Napomena 6. Funkcija p je bijekcija sa $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ u $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$. Njezin inverz je funkcija $p_2 : \mathbb{R}\setminus[-1,1] \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ definirana pravilom $p_2(x) = \text{Arcth } x$ [11]. Primjenom Napomene 2. zaključujemo da p_2 ima točno dvije fiksne točke:

$$x_1 \approx 1.199 \text{ i } x_2 = -x_1 \approx -1.199.$$

8. Zaključak

U nastavi matematičkih predmeta na tehničkim stručnim studijima uobičajeno se obrađuju osnovne hiperbolne funkcije. Njihovi inverzi u pravilu se spominju samo „informativno", odnosno bez detaljnijega izučavanja. Zbog toga studenti stručnih studija hiperbolnu trigonometriju uglavnom „doživljavaju" kao primjenu eksponencijalne funkcije koju uče u srednjoj školi, a ne kao zasebnu granu matematike. U tom se kontekstu i rješavanje jednadžbi u kojima se pojavljuju hiperbolne funkcije najvećim dijelom svodi na rješavanje eksponencijalnih jednadžbi. Iako je takav pristup možda teorijski i stručno neopravdan, naša metodička iskustva pokazuju da studenti bitno više razumiju relacije među hiperbolnim funkcijama ako se te funkcije zapisuju u eksponencijalnom, odnosno logaritamskom „obliku" (preciznije, ako se npr. umjesto s ch x efektivno radi s izrazom $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ itd.). Slijedeći vlastita iskustva, analogan pristup primijenili smo i u ovom članku. Ipak, nadamo se da će u dogledno vrijeme na nastavi matematičkih predmeta na tehničkim stručnim studijima, a ponajprije na stručnim studijima graditeljstva i elektrotehnike, biti stvoreni potrebni preduvjeti (ponajprije, povećanje propisane ukupne satnice matematičkih predmeta) za kvalitetniju obradu osnovnih načela hiperbolne trgionometrije, kao i njezine povezanosti s numeričkom matematikom u kontekstu približnoga rješavanja nealgebarskih jednadžbi.

Literatura

1. M. Jelčić, K. Ivankić, M. Katić Žlepalo, B. Kovačić: *O fiksnim točkama osnovnih trigonometrijskih funkcija*, Poučak br. 64, Zagreb, 2016.
2. S. Kurepa: *Matematička analiza* 1 – *Diferenciranje i integriranje*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
3. S. Kurepa: *Matematička analiza* 2 – *Funkcije jedne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
4. V. Hari: *Numerička analiza – osnovni udžbenik*, skripta, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2004.
5. R. Scitovski: *Numerička matematika*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2004.

[11] Oznaku Arcth x treba čitati: area kotangens hiperbolni.