O jednom zadatku iz geometrijske vjerojatnosti

Zadatak s vjerojatnošću susreta dviju osoba i neka njegova poopćenja

Bojan Kovačić i Petra Čargonja, Zagreb

U članku se analizira jedan od standardnih zadataka iz geometrijske vjerojatnosti koji se rješava u okviru nastave iz predmeta *Vjerojatnost i statistika* na stručnom studiju elektrotehnike Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu. Navode se i komentiraju najčešće pogreške koje studenti čine rješavajući taj zadatak. Potom se navode neka moguća poopćenja toga zadatka.

1. Uvod

U okviru nastave vjerojatnosti i statistike iz istoimena predmeta na stručnom studiju elektrotehnike Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu dva nastavna sata predviđena su za obradu nastavne cjeline *Geometrijska vjerojatnost*. U toj se nastavnoj cjelini na određen način povezuju vjerojatnost, matematička analiza (primjena integralnoga računa na izračunavanje površine ravninskih likova) i geometrija (računanje obujmova kugle, tetraedra itd.). Radi potpunosti podsjetimo na osnovne pojmove kojima ćemo se koristiti u tekstu.

1.1. Pregled potrebnih pojmova

Definicija 1. Promatramo slučajan pokus u kojem prostor elementarnih događaja $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ima strogo pozitivnu površinu. Neka je $A \subseteq \Omega$. Označimo sa $P(X)$ površinu skupa X. Vjerojatnost p_A da slučajno odabrana točka skupa Ω pripada skupu A računamo prema formuli:

$$p_A = \frac{P(A)}{P(\Omega)}.$$

Ovako definiranu vjerojatnost nazivamo *geometrijska vjerojatnost*.

Napomena 1. Opća definicija geometrijske vjerojatnosti zahtijeva uvođenje pojma mjere, odnosno izmjerivoga skupa. Ti pojmovi se ne obrađuju u nastavi matematičkih predmeta na veleučilištima i samostalnim visokim školama, pa je gornja definicija zato “prilagođena” predznanju studenata na ovim visokoobrazovnim ustanovama.

Definicija 2. Kažemo da je događaj A *siguran* ako je njegova vjerojatnost jednaka 1. Ako je vjerojatnost događaja A jednaka nuli, kažemo da je događaj A *nemoguć*.

Definicija 3. Kažemo da je događaj A *statistički zanemariv* ako njegova vjerojatnost nije veća od 0.05, odnosno 5 %. Ekvivalentno, događaj A smatramo *statistički sigurnim* događajem ako njegova vjerojatnost nije manja od 0.95, odnosno 95 %.

Napomena 2. Ponekad se za granicu statističke zanemarivosti uzima 0.01, odnosno 1 %. Kažemo da je granica od 5 % *blaži kriterij*, a granica od 1 % *stroži kriterij*. Ti kriteriji najčešće se primjenjuju u statističkim testovima.

mr. sc. Bojan Kovačić, Tehničko veleučilište u Zagrebu, `bojan.kovacic@tvz.hr`
Petra Čargonja, studentica 3. godine preddiplomskoga stručnoga studija elektrotehnike, Tehničko veleučilište u Zagrebu

Iskažimo još i dvije tvrdnje kojima ćemo se koristiti u tekstu.

Tvrdnja 1. Za sve $x, y \in$ i svaki $a \geq 0$ vrijedi ekvivalencija: $(|x-y| \leq a) \iff (-a \leq x-y \leq a)$.

Dokaz. Vidjeti npr. [3]. ■

Tvrdnja 2. Površina bilo koje ravninske krivulje (pravac, kružnica, parabola itd.) jednaka je nuli.

Dokaz. Vidjeti npr. [5]. ■

2. Osnovni zadatak

U ovoj točki navodimo jedan od standardnih zadataka iz geometrijske vjerojatnosti i njegovo rješenje. Zasebno komentiramo najčešće pogreške koje studenti čine rješavajući ovaj zadatak.

2.1. Formulacija Zadatka 1.

Zadatak 1. Lidija i Bruno planiraju sastanak na gradskom trgu prije odlaska na kazališnu predstavu. Oboje putuju javnim gradskim prijevozom, pa je vrijeme dolaska na trg svakoga od njih slučajan trenutak između 18:00 i 19:00 sati. Osoba koja dođe prva čeka točno 20 minuta, a potom odlazi. Izračunajte vjerojatnost sastanka Lidije i Brune.

2.2. Rješenje Zadatka 1.

Vremenu dolaska svake osobe bijektivno pridružimo neki realan broj iz segmenta $[0, 60]$. Naime, prema podatcima iz zadatka, vrijeme dolaska svake osobe je oblika: 18 sati x minuta, pri čemu je $x \in [0, 60]$. Time smo dozvolili mogućnost da broj minuta nije cijeli broj, a ujedno smo izbjegli i problem izražavanja vremena u nekoj drugoj vremenskoj jedinici manjoj od jedne minute.

Neka su l i b redom vrijeme Lidijina, odnosno Brunina dolaska na trg. Zaključili smo: $l, b \in [0, 60]$, pa bez smanjenja općenitosti za skup elementarnih događaja možemo uzeti:

$$\Omega = \{(l, b) : l, b \in [0, 60]\}.$$

Drugim riječima, vrijeme Lidijina dolaska bilježimo na os apscisa i tu os označavamo kao os l. Vrijeme Brunina dolaska bilježimo na os ordinata i tu os označavamo kao os b.

Pokažimo najprije da je događaj $B_1 = \{$Bruno i Lidija su istovremeno stigli na trg$\}$ nemoguć. U tu svrhu uočimo da vrijedi jednakost $B_1 = \{(l, b) \in \Omega : \ b = l\}$ (u smislu jednakosti skupova). Krivulja $K \ldots \ b = l$ je pravac (simetrala I. i III. kvadranta). Iz Tvrdnje 2. slijedi da je površina toga pravca jednaka nuli. Skup B_1 je dio krivulje K unutar skupa Ω, pa je i njegova površina jednaka nuli. Prema Definiciji 1. slijedi $p_{B_1} = 0$. Prema Definiciji 2. to znači da je događaj B_1 nemoguć, što smo i željeli pokazati.

Budući da je događaj istovremenoga dolaska obiju osoba nemoguć, zaključujemo da točno jedna osoba mora prva doći na trg. Pretpostavimo najprije da će prva doći Lidija. To znači da vrijedi nejednakost $b > l$. Prema podatcima iz zadatka, u ovom će se slučaju Lidija i Bruno sastati ako vrijedi nejednakost $b \leq l + 20$.

Pretpostavimo sada da će prvi doći Bruno. To znači da vrijedi nejednakost $l > b$. U ovom će se slučaju Lidija i Bruno sastati ako vrijedi nejednakost $l \leq b + 20$, odnosno (ekvivalentna) nejednakost $b \geq l - 20$.

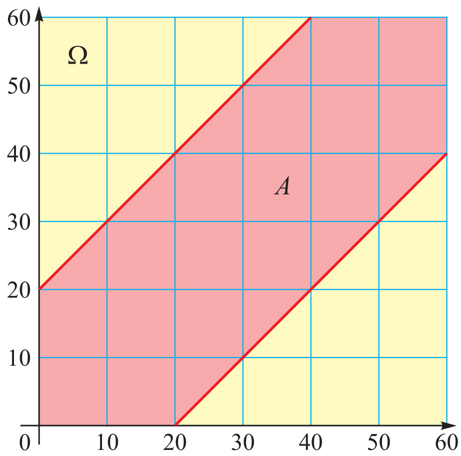
Dakle, Lidija i Bruno će se sastati ako i samo ako vrijedi ili nejednakost $b \leq l + 20$ ili nejednakost $b \geq l - 20$. Te dvije nejednakosti možemo objediniti u nejednakost $l - 20 \leq b \leq l + 20$.

Označimo skup svih povoljnih događaja sa A, pa je:

$$A = \{(l, b) \in \Omega : \ l - 20 \leq b \leq l + 20\}.$$

Skicirajmo skupove Ω i A u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Najprije skiciramo skup Ω. Dobivamo kvadrat čija je stranica duga 60 (jed. duljine).

Potom skiciramo skup A. Taj skup je (pravi) podskup skupa Ω omeđen pravcima $b = l - 20$ i $b = l + 20$ (Slika 1.)



Slika 1. Prikaz skupova A i Ω iz Zadatka 1.

Izračunajmo površine skiciranih skupova. Površina skupa Ω jednaka je:

$$P(\Omega) = 60^2 = 3600 \text{ kv. jed.}$$

Površinu skupa A najlakše je izračunati tako da od površine skupa Ω oduzmemo površine dvaju sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta kojima duljina jedne katete iznosi $a = 60 - 20 = 40$ jed. duljine. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} P(A) &= 60^2 - 2 \cdot \frac{40 \cdot 40}{2} = 60^2 - 40^2 \\ &= 3600 - 1600 = 2000 \text{ kv. jed.} \end{aligned}$$

Prema Definiciji 1., tražena vjerojatnost je jednaka:

$$p_A = \frac{P(A)}{P(\Omega)} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}.$$

Primijetimo da je $p > \frac{1}{2}$, što znači da je vjerojatnost sastanka veća od vjerojatnosti da se Lidija i Bruno neće sastati.

Napomena 3. Koristeći se Tvrdnjom 1. izraz koji zadaje skup (događaj) A možemo transformirati ovako:

$$\begin{aligned} A &= \{(l,b) \in \Omega : \ l - 20 \leq b \leq l + 20\} \\ &= \{(l,b) \in \Omega : \ -20 \leq b - l \leq 20\} \\ &= \{(l,b) \in \Omega : \ |b - l| \leq 20\}. \end{aligned}$$

Naše iskustvo je pokazalo da je studentima lakše i jednostavnije skicirati skup A zadan kao u rješenju Zadatka 1., pa smo se u rješenju zadatka koristili "razvijenijim" oblikom nejednakosti $|b - l| \leq 20$.

Napomena 4. Vrijeme dolaska svake osobe sugestivno je označeno prvim slovom njezina imena, a ne uobičajeno sa x, y itd. Zbog različitosti oznaka kojima će se studenti koristiti u svojoj praksi, smatramo primjerenim i potrebnim koristiti se različitim (nestandardnim) oznakama i u matematičkom modeliranju zadataka kako bi se studenti što više naviknuli na razumijevanje opisane *veze* među varijablama (nezavisno o uvedenim oznakama).

2.3. Najčešće pogreške u rješavanju Zadatka 1.

1. U matematički model Zadatka 1. studenti najčešće pokušavaju uvrstiti brojeve 18 i 19, čime se vrlo značajno i nepotrebno komplicira definiranje skupa elementarnih događaja Ω. Zbog toga je potrebno posebno istaknuti da definiranje skupa Ω zapravo zavisi jedino o *vremenskom razmaku* između početnoga i krajnjega mogućega vremena sastanka. Ekvivalentno, izloženo rješenje zadatka je jednako i u slučaju da je vrijeme dolaska slučajan trenutak između t i $t+1$ sati, bez obzira na vrijednost broja t.
2. Dio studenata pokušava modelirati zadatak pretpostavljajući da su obje varijable l i b cjelobrojne (i nenegativne). Zbog toga je potrebno podsjetiti studente da vrijeme pripada u kontinuirane statističke varijable (varijable čija vrijednost može biti bilo koji realan broj iz nekoga intervala) i da zato vrijednosti varijabli l i b mogu biti bilo koji realni brojevi iz segmenta $[0,\ 60]$.
3. Prilikom modeliranja problema većina studenata pogrešno navodi uvjet kojim je zadan skup A. Ti studenti navode ili uvjet $b \leq l + 20$ ili uvjet $l \leq b + 20$, tj. prešutno pretpostavljaju da je događaj A jednak događaju $C_1 = \{\text{Lidija je prva stigla na trg}\}$ (ili događaju $C_2 = \{\text{Bruno je prvi stigao na trg}\}$). Zbog toga je potrebno dodatno istaknuti da u zadatku nije navedeno koja osoba prva dolazi na trg (stoga treba razlikovati dva slučaja, kao što je to učinjeno u rješenju Zadatka 1.)

3. Poopćenja osnovnoga zadatka

Na temelju vlastita nastavna iskustva tvrdimo da zadatci s tzv. "općim brojevima" (preciznije, realnim parametrima) većini studenata stvaraju ozbiljne poteškoće. No, to ni u kojem slučaju ne znači da takve zadatke treba rješavati "ako je baš nužno" ili, još gore, da ih treba u potpunosti izbjegavati. Najvažniji dio rješenja takvih zadataka je analitički način rješavanja i zaključivanja, što zasigurno pripada u praktično poželjnu i potrebnu vještinu na svim stručnim studijima.

S ciljem davanja doprinosa razvijanju spomenutih "analitičkih vještina", u ovoj točki navodimo dva (svojevrsna) poopćenja Zadatka 1. i njihova relativno detaljna rješenja. Smatramo da su oba zadatka potpuno primjerena boljim studentima stručnih studija, a posebno boljim studentima svih tehničkih stručnih studija.

3.1. Formulacija Zadatka 2.

Zadatak 2. Lidija i Bruno planiraju sastanak na glavnom gradskom trgu prije odlaska na kazališnu predstavu. Oboje putuju javnim gradskim prijevozom, pa je vrijeme dolaska svakoga od njih slučajan trenutak između 18:00 i 19:00 sati. Osoba koja prva dođe čeka točno m minuta, a potom odlazi. Odredite najmanju vrijednost m tako da planirani sastanak bude statistički siguran događaj. (Zaokružite dobiveni rezultat na jednu decimalu.)

3.2. Rješenje Zadatka 2.

Dokažimo najprije sljedeću pomoćnu tvrdnju.

Tvrdnja 3. Za sve $l, b \in [0, 60]$ vrijedi nejednakost $|b - l| \leq 60$.

Dokaz. Najmanja vrijednost razlike $b - l$ postiže se za najmanju vrijednost umanjenika b i najveću vrijednost umanjitelja l. Najmanja vrijednost umanjenika b jednaka je nuli, a najveća vrijednost umanjitelja l jednaka je 60. Dakle, najmanja vrijednost razlike $b - l$ iznosi $0 - 60 = -60$.

Najveća vrijednost razlike $b - l$ postiže se za najveću vrijednost umanjenika b i najmanju vrijednost umanjitelja l. Najveća vrijednost umanjenika b jednaka je 60, a najmanja vrijednost umanjitelja l jednaka je nuli. Dakle, najveća vrijednost razlike $b - l$ iznosi $60 - 0 = 60$.

Iz navedenih zaključaka slijedi da za sve $l, b \in [0, 60]$ vrijedi nejednakost $-60 \leq b - l \leq 60$. Iz Tvrdnje 1. izravno slijedi $|b - l| \leq 60$ što smo i tvrdili. ■

Koristimo se oznakama iz podtočke 2.2. Postupkom opisanim u toj podtočki dobivamo:

$$\Omega = \{(l, b) : l, b \in [0, 60]\},$$
$$A = \{(l, b) \in \Omega : \; l - m \leq b \leq l + m\}.$$

Promotrimo (trivijalne) slučajeve u kojima je A nemoguć, odnosno siguran događaj. Formulirajmo te slučajeve u obliku sljedeće tvrdnje.

Tvrdnja 4. Za $m = 0$ događaj A je nemoguć, dok je za $m \geq 60$ događaj A siguran događaj.

Dokaz. Ako je $m = 0$, onda je:

$$\begin{aligned} A &= \{(l, b) \in \Omega : \; l \leq b \leq l\} \\ &= \{(l, b) \in \Omega : \; b = l\}. \end{aligned}$$

U točki 2.2. pokazali smo da je $P(A) = 0$, odnosno da je događaj A nemoguć događaj.

Ako je $m \geq 60$, onda postupkom iz Napomene 3. dobivamo:

$$A = \{(l, b) \in \Omega : \; |b - l| \leq m\}.$$

Tvrdimo da je u ovom slučaju $A = \Omega$. Prema Tvrdnji 3., za svaku točku $(l, b) \in \Omega$ vrijedi nejednakost $|b - l| \leq 60$. Zbog pretpostavke $m \geq 60$, zaključujemo da vrijedi i nejednakost $|b - l| \leq m$. Odatle slijedi da je $\Omega \subseteq A$. Prema pretpostavci iz Definicije 1. vrijedi $A \subseteq \Omega$, pa iz te dvije relacije slijedi $A = \Omega$.

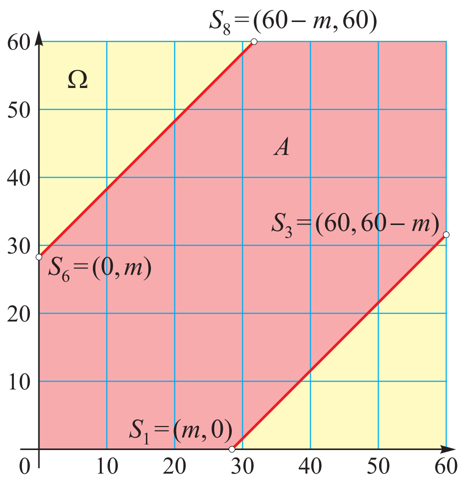
Sada iz Definicije 1. slijedi $p_A = p_\Omega = \dfrac{P(\Omega)}{P(\Omega)} = 1$.
Prema Definiciji 2., to znači da je događaj A siguran događaj. ■

Zbog rezultata Tvrdnje 4., u nastavku rješenja pretpostavljamo da je $m \in \langle 0, \; 60 \rangle$.

Grafički prikaz skupa A je dio skupa Ω omeđen pravcima $p_1 \ldots b = l - m$ i $p_2 \ldots b = l + m$. Segmentni oblik jednadžbe pravca p_1 je $\frac{l}{m} + \frac{b}{-m} = 1$. Odatle slijedi da p_1 siječe os apscisa (tj. os l) u točki $S_1 = (m,\ 0)$, a os ordinata (tj. os b) u točki $S_2 = (0, -m)$. Lako se vidi da p_1 siječe pravac $l = 60$ u točki $S_3 = (60,\ 60 - m)$, a pravac $b = 60$ u točki $S_4 = (60 + m,\ 60)$. Zbog pretpostavke $m \in \langle 0,\ 60\rangle$ i svojstva kojim je zadan skup Ω, zaključujemo da se unutar skupa Ω nalazi dio pravca p_1 omeđen točkama S_1 i S_3, odnosno dužina $\overline{S_1S_3}$.

Analogno, segmentni oblik jednadžbe pravca p_2 je $\frac{l}{-m} + \frac{b}{m} = 1$. Odatle slijedi da p_2 siječe os apscisa u točki $S_5 = (-m,\ 0)$, a os ordinata u točki $S_6 = (0,\ m)$. Lako se vidi da p_2 siječe pravac $l = 60$ u točki $S_7 = (60,\ 60 + m)$, a pravac $b = 60$ u točki $S_8 = (60 - m,\ 60)$. Zbog pretpostavke $m \in \langle 0,\ 60\rangle$ i svojstva kojim je zadan skup Ω, unutar skupa Ω nalazi se dio pravca omeđen točkama S_6 i S_8, odnosno dužina $\overline{S_6S_8}$.

Dakle, skup A je dio skupa Ω omeđen dužinama $\overline{S_2S_3}$, $\overline{S_6S_8}$, koordinatnim osima, te pravcima $l = 60$ i $b = 60$ (Slika 2.). Analogno kao u rješenju Zadatka 1., taj skup je konveksan šesterokut. Njegova površina može se izračunati tako da se šesterokut trima dijagonalama podijeli na četiri trokuta, izračuna površina svakoga trokuta (npr. primjenom formule za površinu trokuta s pomoću koordinata



Slika 2. Skica skupova A i Ω iz Zadatka 2.

svih njegovih vrhova) i naposljetku zbroje dobivene četiri površine.

No, analogno kao u rješenju Zadatka 1., možemo postupiti brže i jednostavnije. Izračunat ćemo površinu skupa $A^C = \Omega \backslash A$. Uočimo da taj skup tvore dva disjunktna pravokutna trokuta. Vrhovi prvoga od njih su $T_1 = (0,\ 60)$, S_6 i S_8, a vrhovi drugoga od njih $T_2 = (60,\ 0)$, S_1 i S_3. Primijetimo da vrijede jednakosti:

$$\left|\overline{T_1S_8}\right| = \left|\overline{T_1S_6}\right| = \left|\overline{T_2S_1}\right| = \left|\overline{T_2S_3}\right| = 60 - m,$$

pa su uočeni pravokutni trokuti sukladni (npr. prema poučku S-S-S: oba trokuta imaju jednake katete, pa, zbog Pitagorina poučka, moraju imati i jednake hipotenuze). Površina svakoga od njih je $P_\Delta = \frac{(60-m)^2}{2}$, pa zaključujemo da je:

$$P(A^C) = 2 \cdot P_\Delta = (60 - m)^2.$$

Sastanak će biti statistički siguran događaj ako i samo ako vjerojatnost događaja A^C bude statistički zanemariva. Prema Definiciji 3., ta vjerojatnost mora biti jednaka ili manja od 0.05. Koristeći se Definicijom 1. dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{P(A^C)}{P(\Omega)} &\leq 0.05 \\
\frac{(60-m)^2}{60^2} &\leq 0.05 = \frac{5}{100} \quad \Big/ \sqrt{\ } \\
\frac{60-m}{60} &\leq \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \Big/ \cdot 60 \\
60 - m &\leq 6 \cdot \sqrt{5} \\
m &\geq 60 - 6 \cdot \sqrt{5} \approx 46.583592135.
\end{aligned}$$

Dakle, tražena najmanja vrijednost (zaokružena na jednu decimalu) je $m = 46.6$. Ekvivalentno, sastanak će biti statistički siguran ako vrijeme čekanja bude barem 46 minuta i 36 sekundi.

Napomena 5. Analogno se pokazuje da prema strožem kriteriju (1 %), traženo vrijeme iznosi 54 minute.

3.3. Komentar uz Zadatak 2.

U odnosu na Zadatak 1., Zadatak 2. je nešto teži jer zahtijeva detaljniju analizu. Jedan od značajnijih problema u njegovu rješavanju je i realan parametar m zbog čega je nemoguće precizno crtanje skupova Ω i A. Međutim, u drugim predmetima, a i u budućoj poslovnoj praksi studenata, pojavljuje se potreba skiciranja grafova funkcija u svrhu modeliranja određenih procesa. Zbog toga ovaj zadatak smatramo korisnim i za stjecanje takvih iskustava.

Studente je potrebno posebno upozoriti na korištenu implikaciju

$$\left(\frac{(60-m)^2}{60^2} \leq 0.05\right) \implies \left(\frac{60-m}{60} \leq \frac{\sqrt{5}}{10}\right).$$

Ta implikacija nije istinita *za bilo koji* $m \in \mathbf{R}$. Međutim, u analizi problema utvrdili smo da je $m \in \langle 0,\ 60\rangle$, pa tada vrijedi nejednakost $60-m > 0$. Dakle, na lijevoj strani prve nejednakosti nalazi se kvadrat strogo pozitivnoga racionalnoga broja $\dfrac{60-m}{60}$. Funkcija drugoga korijena je strogo rastuća bijekcija sa skupa $[0,\ +\infty\rangle$ na samoga sebe, pa "čuva nejednakost" među strogo pozitivnim realnim brojevima. Zbog toga smo smjeli primijeniti navedenu implikaciju. Ovdje se ujedno ponavljaju pojmovi strogo rastuće funkcije i bijekcije ranije naučeni kao dio gradiva Matematika 1 na 1. godini stručnoga studija elektrotehnike.

3.4. Formulacija zadatka 3.

Zadatak 3. Lidija i Bruno planiraju sastanak na glavnom gradskom trgu prije odlaska na kazališnu predstavu. Oboje putuju javnim gradskim prijevozom, pa je vrijeme dolaska svakoga od njih slučajan trenutak između 18:00 i 19:00 sati. Ako Lidija stigne prva, čeka točno l minuta, a potom odlazi. Ako Bruno stigne prvi, čeka točno b minuta i potom odlazi. Odredite vrijednosti brojeva b i l tako da sastanak bude statistički siguran i da vrijeme Brunina čekanja bude što je moguće kraće. (Zaokružite dobivene rezultate na najbliže prirodne brojeve.)

3.5. Rješenje zadatka 3.

Neka su x i y redom vrijeme Lidijina, odnosno Brunina dolaska na trg. Pripadni vjerojatnosni prostor je:

$$\Omega = \{(x,y):\ x,y \in [0,60]\}.$$

Skup svih povoljnih događaja u ovom slučaju je:

$$A = \{(x,y) \in \Omega:\ x-b \leq y \leq x+l\}.$$

Primijetimo da nužno mora vrijediti $b,l \leq 60$, odnosno, zbog prirode problema, $b,l \in [0,60]$. Naime, "najgori" mogući slučaj je da jedna osoba stigne na trg točno u 18:00 sati, a druga točno u 19:00 sati. U tom slučaju vrijeme čekanja iznosi točno 60 minuta. Dakle, nijedno vrijeme čekanja ne može biti strogo veće od 60 minuta.

Analogno kao u rješenju Zadatka 2. pokazuje se da je A šesterokut s vrhovima $(0,0)$, $(b,0)$, $(60,60-b)$, $(60,60)$, $(60-l,60)$ i $(0,l)$. Ponovno je bitno jednostavnije i brže izračunati površinu skupa $A^C = \Omega \backslash A$, pa ćemo to i učiniti. Ta je površina jednaka zbroju površina dvaju jednakokračnih pravokutnih trokuta. Duljine kateta prvoga trokuta jednake su $60-b$, dok su duljine kateta drugoga trokuta $60-l$. Zbog toga je površina skupa A^C jednaka:

$$\begin{aligned} P(A^C) &= \frac{(60-b)^2}{2} + \frac{(60-l)^2}{2} \\ &= \frac{(60-b)^2+(60-l)^2}{2}. \end{aligned}$$

Vjerojatnost ovoga događaja mora biti jednaka ili manja od $1-0.95 = 0.05$, pa analogno kao u rješenju Zadatka 2. dobivamo nejednadžbu:

$$\frac{\frac{(60-b)^2+(60-l)^2}{2}}{60^2} \leq 0.05.$$

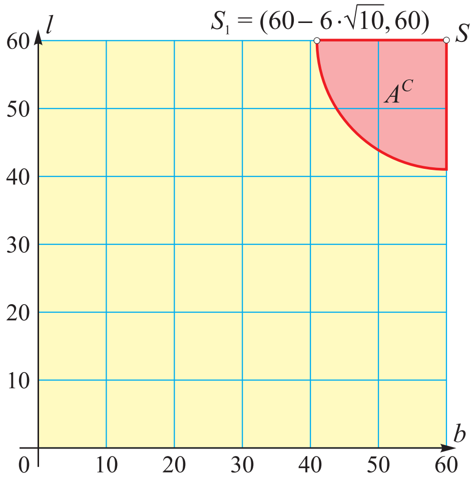
Množenjem ove jednadžbe sa 7200 dobiva se ekvivalentna nejednadžba:

$$(b-60)^2 + (l-60)^2 \leq 360.$$

Zbog pretpostavke $b,l \leq 60$, skup A^C je četvrtina (zatvorenoga) kruga sa središtem u točki $S = (60,60)$ i polumjerom $r = \sqrt{360} = \sqrt{36 \cdot 10} = 6 \cdot \sqrt{10}$ (Slika 3.).

U zadatku se traži da vrijeme Brunina čekanja bude što kraće. To znači da vrijednost varijable b mora biti što je moguće manja, ali da pritom točka (b,l) pripada skupu A^C. Lako vidimo da je vrijednost varijable b jednaka

$$b = 60 - 6 \cdot \sqrt{10} \approx 41.026334.$$



Slika 3. Skup A^C

(Riječ je o prvoj koordinati točke $S_1 = (60 - 6 \cdot \sqrt{10}, 60)$.) Vrijednost varijable b nije cjelobrojna, pa je trebamo zaokružiti na najbliži prirodan broj tako da dobivena točka i nadalje pripada skupu A^C. Zbog toga zaokružujemo dobivenu vrijednost na prvi veći prirodan broj, pa dobivamo $b = 42$.

Odredimo pripadne vrijednosti varijable l. Uvrštavanjem $b = 42$ u nejednadžbu $(b-60)^2 + (l-60)^2 \le 360$ dobivamo redom:

$$\begin{aligned} (42-60)^2 + (l-60)^2 &\le 360 \\ (-18)^2 + (l-60)^2 &\le 360 \\ 324 + (l-60)^2 &\le 360 \\ (l-60)^2 &\le 36 \\ -6 \le l - 60 &\le 6 \\ -6+60 \le l &\le 6+60 \\ 54 \le l &\le 66. \end{aligned}$$

Međutim, prema pretpostavci zadatka je $l \le 60$, pa konačno dobivamo $l \in [54, 60]$. Dakle, zadatak ima ukupno 7 različitih (cjelobrojnih) rješenja, i to su redom: $(42, 54)$, $(42, 55)$, $(42, 56)$, $(42, 57)$, $(42, 58)$, $(42, 59)$ i $(42, 60)$.

3.6. Komentar uz Zadatak 3.

Pri rješavanju zadatka treba pripaziti da se iz nejednakosti $(b-60)^2 + (l-60)^2 \le 360$ ne zaključi da je skup A^C zatvoreni krug sa središtem u točki S i polumjerom $r = 6 \cdot \sqrt{10}$ jer taj skup nije podskup skupa Ω. U rješavanju ovakvih tipova zadataka iz vjerojatnosti studenti nerijetko previde skupovnu inkluziju A, $A^C \subseteq \Omega$, pa time dobiju i pogrešno rješenje zadatka.

Zaključno napomenimo i sljedeće. Ako bi vremena dolaska bila u segmentu $[t_1, t_2]$, onda bi skup Ω bio segment $[0, t_2 - t_1]$. No, time se način rješavanja Zadatka 3. ne bi promijenio jer bi i u tom slučaju skup Ω bio kvadrat, skup A šesterokut, a skup A^C unija dvaju jednakokračnih pravokutnih trokuta. Detalje prepuštamo čitatelju.

4. Zaključak

Uvjereni smo da vjerojatnost i statistika pripadaju među ona područja matematike koja čak i nematematičari smatraju “praktično primjenjivima”. Upravo zbog te “praktične primjenjivosti”, smatramo da, osim standardnih zadataka koji obuhvaćaju slučajne pokuse s novčićem, kartama, gađanjem mete itd., u nastavu predmeta *Vjerojatnost i statistika* na stručnim studijima treba uvrštavati što više “praktičnih” problemskih zadataka. Pritom je poželjno da se u rješenju takvih zadataka što više “sintetiziraju” znanja iz drugih matematičkih područja (analiza, geometrija itd.), ali i nekih nematematičkih područja (npr. programiranje). Time se može ukazati na primjenjivost tih područja u praksi, ali i na određen način potaknuti studente na učenje s razumijevanjem i povezivanjem naučenoga gradiva s gradivima drugih predmeta. Smatramo da samo takav način učenja može kvalitetno doprinijeti postizanju cilja “primijeniti matematička znanja u inženjerskoj praksi” koji se često navodi kao cilj tehničkih stručnih studija.

LITERATURA

1/ S. Suljagić (2003.): *Vjerojatnost i statistika*, interna skripta, Tehničko veleučilište, Zagreb.

2/ N. Elezović (2007.): *Diskretna vjerojatnost*, Element, Zagreb.

3/ S. Kurepa (1997.): *Matematička analiza 1, Diferenciranje i integriranje*, Tehnička knjiga, Zagreb.

4/ M. Benšić, N. Šuvak (2014.): *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek.

5/ Š. Ungar (2005.): *Matematička analiza u* $\mathbf{R}^n$, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb.