O jednom zadatku
s državne mature

Bojan Kovačić, Zagreb

Na ispitu državne mature iz matematike održanom 24. 08. 2011. kao jedan od zadataka na višoj (A) razini postavljen je i sljedeći zadatak:

Zadatak 1. Halleyev komet giba se oko Sunca po eliptičnoj putanji kojoj je numerički ekscentricitet $\varepsilon = 0.967$. Sunce se nalazi u žarištu (fokusu) te elipse. Najmanja udaljenost kometa od Sunca je $8.75 \cdot 10^{10} m$. Koliko iznosi najveća udaljenost Halleyeva kometa od Sunca?

Napomena. Numerički ekscentricitet ε računa se prema formuli $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$.

Ovaj zadatak moguće je riješiti tako da se intuitivno zaključi da je Halleyev komet najbliže Suncu u krajnjoj točki velike osi elipse koja se nalazi na istoj strani (u odnosu na ishodište zamišljenoga pravokutnoga koordinatnoga sustava u kojemu promatramo elipsu iz zadatka) kao i žarište u kojemu se nalazi Sunce, odnosno da je Halleyev komet najudaljeniji od Sunca u trenutku kad prolazi drugom krajnjom točkom velike osi elipse. Pokažimo analitički da su ove tvrdnje doista istinite. U tu svrhu dokazat ćemo sljedeći poučak:

Poučak 1. Neka je O ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Neka je E središnja elipsa[1] takva da su točke A i B krajnje točke njezine velike osi, a točke C i D krajnje točke njezine male osi. Neka je F žarište elipse koje pripada dužini $\overline{OB}$. Tada je točka B točka na elipsi najbliža žarištu F, a točka A točka na elipsi najudaljenija od žarišta F.

Dokaz. Neka su $a = |\overline{OB}|$ duljina velike poluosi elipse, $b = |\overline{OC}|$ duljina male poluosi elipse i $e = |\overline{OF}|$ linearni ekscentricitet elipse. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, b)$ i $D(0, b)$. Primijetimo da, prema definiciji elipse, vrijede sljedeće jednakosti:

$$a > b > 0 \tag{1}$$

$$a > e > 0 \tag{2}$$

Iako duljina velike poluosi teoretski nije manja od duljine male poluosi, u slučaju $a = b$ elipsa prelazi u središnju kružnicu polumjera a. Tada se žarište elipse podudara sa središtem kružnice, tj. s ishodištem O, a svaka točka kružnice je, prema definiciji kružnice, jednako udaljena od njezina središta, pa nema smisla govoriti o žarištu najbližoj, odnosno od žarišta najudaljenijoj točki. Nejednakost $a > e$ slijedi npr. iz činjenice da točke O, C i F tvore pravokutan trokut (s pravim kutom u vrhu O) čije duljine

[1] Elipsa sa središtem u točki O takva da su koordinatne osi njezine osi simetrije.

kateta su $|OC| = b$ i $|OF = e$, a duljina hipotenuze $|CF| = a$.[2]

Iz pretpostavke da je E središnja elipsa slijedi da njezinu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Neka je $T(x_T, y_T)$ proizvoljna točka elipse. Primijetimo da za vrijednosti x_T i y_T nužno vrijede nejednakosti:

$$-a \leq x_T \leq a, \tag{4}$$
$$-b \leq y_T \leq b. \tag{5}$$

Točka F, tj. žarište elipse koje pripada dužini $\overline{OB}$, ima koordinate $F(e, 0)$. Prema formuli za udaljenost dviju točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, udaljenost točke T od žarišta F jednaka je:

$$d = \sqrt{(x_T - e)^2 + y_T^2}. \tag{6}$$

Točka T pripada elipsi E, pa njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu (3). To znači da vrijedi jednakost:

$$\frac{x_T^2}{a^2} + \frac{y_T^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Izrazimo li iz jednakosti (7) veličinu y_T^2, dobit ćemo:

$$y_T^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x_T^2}{a^2}\right). \tag{8}$$

Uvrstimo li jednakost (8) u jednakost (6), dobit ćemo:

$$d = \sqrt{(x_T - e)^2 + b^2 \cdot \left(1 - \frac{x_T^2}{a^2}\right)}. \tag{9}$$

Primjenom jednakosti

$$a^2 = b^2 + e^2 \tag{10}$$

koja slijedi izravnom primjenom Pitagorina poučka na ranije uočeni pravokutan trokut OCF, odnosno toj jednakosti ekvivalentne jednakosti

$$b^2 = a^2 - e^2, \tag{11}$$

izraz (9) tranformiramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x_T^2 - 2 \cdot x_T \cdot e + e^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x_T^2} \\ &= \sqrt{x_T^2 - 2 \cdot x_T \cdot e + e^2 + (a^2 - e^2) - \frac{a^2 - e^2}{a^2} \cdot x_T^2} \\ &= \sqrt{x_T^2 - 2 \cdot x_T \cdot e + e^2 + a^2 - e^2 - \left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right) \cdot x_T^2} \\ &= \sqrt{x_T^2 - 2 \cdot x_T \cdot e + a^2 - x_T^2 + \frac{e^2}{a^2} \cdot x_T^2} \\ &= \sqrt{\frac{e^2}{a^2} \cdot x_T^2 - 2 \cdot x_T \cdot e + a^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{e}{a} \cdot x_T - a\right)^2} \\ &= \left|\frac{e}{a} \cdot x_T - a\right|. \end{aligned} \tag{12}$$

Iz nejednakosti (2) slijedi

$$0 < \frac{e}{a} < 1, \tag{13}$$

pa množenjem nejednakosti (4) sa (strogo pozitivnim) brojem $\frac{e}{a}$ dobivamo:

$$-a \cdot \frac{e}{a} \leq \frac{e}{a} \cdot x_T \leq a \cdot \frac{e}{a}, \tag{14}$$

odnosno

$$-e \leq \frac{e}{a} \cdot x_T \leq e. \tag{15}$$

Zbog nejednakosti $a > e$, iz (15) slijedi

$$\frac{e}{a} \cdot x_T < a. \tag{16}$$

Stoga je

$$\left|\frac{e}{a} \cdot x_T - a\right| = a - \frac{e}{a} \cdot x_T \tag{17}$$

jer je izraz pod apsolutnom vrijednošću strogo negativan. Prema tome, jednakost (12) prelazi u

$$d = a - \frac{e}{a} \cdot x_T. \tag{18}$$

Budući da iz (13) slijedi

$$-\frac{e}{a} < 0, \tag{19}$$

[2] Tvrdnja $|CF| = a$ lagano se dokazuje koristeći definiciju elipse. Naime, ako je $F_1 \in \overline{OA}$ drugo žarište elipse, onda su trokutovi $\triangle OFC$ i $\triangle OF_1C$ sukladni prema poučku $S - K - S$ (oba trokuta su pravokutna i imaju sukladne katete). Stoga vrijedi jednakost $|CF| = |CF_1|$. Budući da je C točka elipse, prema definiciji elipse, zbroj udaljenosti te točke od obaju žarišta elipse mora biti jednak duljini velike osi, tj. $2 \cdot a$. Tako iz $|CF| = |CF_1|$ i $|CF| + |CF_1| = 2 \cdot a$ odmah slijedi $|CF| = a$.

realna funkcija f jedne realne varijable definirana propisom

$$f(x_T) = -\frac{e}{a} \cdot x_T + a \quad (20)$$

je strogo padajuća linearna funkcija. Prema (4), ta je funkcija definirana na segmentu $[-a, a]$. Poznato je da svaka strogo padajuća funkcija definirana na segmentu postiže najveću vrijednost u početnoj točki segmenta, a najmanju vrijednost u krajnjoj točki segmenta. To znači da funkcija f postiže najveću vrijednost $f_{\max}$ za $x_T = -a$ i ta je vrijednost jednaka

$$f_{\max} = f(-a) = -\frac{e}{a} \cdot (-a) + a = a + e, \quad (21)$$

te da ista funkcija postiže najmanju vrijednost $f_{\min}$ za $x_T = a$ i ta je vrijednost jednaka

$$f_{\min} = f(a) = -\frac{e}{a} \cdot a + a = a - e. \quad (22)$$

No, jedina točka elipse čija je prva koordinata jednaka $-a$ je upravo točka A, a jedina točka elipse čija je prva koordinata jednaka a je upravo točka B. Stoga je odabranom žarištu F najbliža točka elipse upravo točka B (i udaljenost tih dviju točaka je $a - e$), a od toga žarišta najudaljenija točka elipse upravo točka A (i udaljenost tih dviju točaka jednaka je $a + e$). Time je poučak dokazan.

Na potpuno analogan način dokazali bismo Poučak 1. u slučaju da promatrano žarište elipse pripada dužini $\overline{OA}$. Tada bi točka A bila točka elipse najbliža promatranom žarištu, a točka B točka elipse najudaljenija od promatranoga žarišta.

Radi potpunosti, navedimo ukratko i rješenje postavljenoga zadatka. Neka su d i D redom najmanja, odnosno najveća udaljenost Halleyeva kometa od Sunca. Prema Poučku 1. vrijede jednakosti:

$$a - e = d, \quad (23)$$
$$a + e = D. \quad (24)$$

Iz formule $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ slijedi

$$e = \varepsilon \cdot a, \quad (25)$$

pa uvrštavanjem te jednakosti u jednakost (23) dobijemo:

$$\begin{aligned} a - \varepsilon \cdot a &= d, \\ a \cdot (1 - \varepsilon) &= d, \end{aligned}$$

i odatle

$$a = \frac{d}{1 - \varepsilon}. \quad (26)$$

Uvrštavanjem ove jednakosti u jednakost (24) dobivamo:

$$e = \varepsilon \cdot a = \frac{\varepsilon \cdot d}{1 - \varepsilon}. \quad (27)$$

Preostaje jednakosti (26) i (27) uvrstiti u jednakost (24):

$$\begin{aligned} D &= a + e, \\ D &= \frac{d}{1 - \varepsilon} + \frac{d \cdot \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \\ D &= \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot d. \quad (27) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem zadanih numeričkih podataka $\varepsilon = 0.967$ i $d = 8.75 \cdot 10^{10}$ slijedi:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1 + 0.967}{1 - 0.967} \cdot 8.75 \cdot 10^{10}, \\ D &= \frac{1.967}{0.033} \cdot 8.75 \cdot 10^{10}, \\ D &\approx 521.5530303 \cdot 10^{10}, \\ D &\approx 5.21553 \cdot 10^{2} \cdot 10^{10}, \\ D &\approx 5.21553 \cdot 10^{12}\ \text{m}. \end{aligned}$$

LITERATURA

1/ Ispitni zadaci iz matematike s državne mature održane u kolovozu 2011. (izvor zadataka: `www.ncvvo.hr`)

2/ B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3, 2. dio*, udžbenik za 3. razred gimnazije, Element, Zagreb, 2009.

3/ B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, 2. dio*, udžbenik za 4. razred gimnazije, Element, Zagreb, 2009.

4/ S. Kurepa, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.