O nekim standardnim problemima u obradi postotnog računa

Milan Papić i Bojan Kovačić, Zagreb

Nastava gospodarske/poslovne matematike na ekonomskim stručnim studijima koji se izvode na našim veleučilištima i samostalnim visokim školama uobičajeno započinje obradom postotnoga računa (od sto, više sto i niže sto). Taj se račun potom primjenjuje pri modeliranju problema jednostavnoga, odnosno složenoga kamatnoga računa i njihovih primjena. U radu se izlažu i komentiraju najčešći problemi studenata pri modeliranju zadataka iz postotnoga računa koje su autori uočili na temelju svojega višegodišnjega nastavnoga iskustva.

Uvod

Nastava gospodarske/poslovne matematike na ekonomskim stručnim studijima koji se izvode na našim veleučilištima i samostalnim visokim školama uobičajeno započinje obradom postotnoga računa (od sto, više sto i niže sto). Taj se račun potom primjenjuje pri modeliranju problema jednostavnoga, odnosno složenoga kamatnoga računa i njihovih primjena.

Radi potpunosti izlaganja navodimo osnovne pojmove i relacije postotnoga računa od sto.

Definicija 1. Postotak je razlomak s nazivnikom 100. Broj $\frac{p}{100}$ uobičajeno zapisujemo kao $p\,\%$.

Definicija 2. Neka su $p, S \neq 0$. Broj

$$P = \frac{p}{100} \cdot S \tag{1}$$

nazivamo *postotni dio veličine* S. Broj S iz relacije (1) obično se naziva *osnovna (temeljna) veličina*.

mr. sc. Milan Papić, viši predavač, Libertas međunarodno sveučilište, Zagreb, mpapic@libertas.hr
mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač, Tehničko veleučilište u Zagrebu, bkovacic@tvz.hr
Članak je nastao na temelju izlaganja autora na kongresnoj stručnoj sekciji 9. kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske održanom u Zagrebu od 5. do 6. srpnja 2022.

Napomena 1. Iz definicije 2. vidljivo je da se postotni dio uvijek odnosi na neku veličinu. Međutim, u svakodnevnom životu se ovaj odnos u izjavama često izostavlja. Tako se npr. umjesto matematički preciznoga izraza "Cijena nekoga proizvoda povećana je za $10\,\%$ svoje vrijednosti." kraće i nepreciznije kaže "Cijena nekoga proizvoda je povećana za $10\,\%$." Ova formulacija uobičajeno se upotrebljava i u redovitoj nastavi gospodarske matematike. Ako je iz konteksta jasno na što se misli, ovu "skraćenu" (nepreciznu) formulaciju koristit ćemo i u ovom članku.

Iz navedenih je definicija vidljivo kako je matematički koncept postotnoga računa vrlo jednostavan. Unatoč tome, pri rješavanju zadataka iz ovoga gradiva većina studenata nastoji primijeniti "gotove" formule bez ikakva promišljanja o njihovu značenju. Štoviše, ako se primijene oznake različite od oznaka u definiciji 2. (što je npr. slučaj u relaciji

$$K = \frac{p}{100} \cdot G \tag{2}$$

kojom se određuje iznos kamata K na kraju jediničnoga (elementarnoga) razdoblja ukamaćivanja glavnice G uz dekurzivan obračun kamata), studenti često smatraju da relacije (1) i (2) nemaju nikakve veze, odnosno ne uočavaju da se u oba slučaja radi o – grubo rečeno – "istoj formuli s različitim oznakama".

Neke standardne probleme u obradi postotnoga računa s kojima smo se susreli u svojoj višegodišnjoj nastavnoj praksi na različitim veleučilištima i samostalnim visokim školama ilustrirat ćemo na nekoliko pogodno odabranih primjera. Radi potpunosti, uz svaki primjer dat ćemo ispravno rješenje te komentar najčešćih poteškoća s kojima se susreću studenti u njegovu rješavanju.

Primjer 1.

(Prema primjerima iz [1] i [2]) Cijena proizvoda nakon poskupljenja od $20\,\%$ iznosi 600 kn. Kolika je bila cijena proizvoda prije poskupljenja?

Rješenje:

Neka je C tražena cijena. Prema (1), iznos poskupljenja jednak je $\frac{20}{100} \cdot C$. Tako dobivamo jednadžbu

$$C + \frac{20}{100} \cdot C = 600. \tag{3}$$

Rješenje te jednadžbe je $C = 500$. Dakle, cijena proizvoda prije poskupljenja iznosi 500 kn.

Komentar:

Većina studenata ekonomskih studija (ali i završenih ekonomista) riješit će primjer 1. tako da od 600 kn oduzme $20\,\%$ toga iznosa dobivajući kao traženu cijenu

$$C = 600 - \frac{20}{100} \cdot 600 = 480$$

Na temelju vlastita nastavnoga iskustva tvrdimo da je navedeno pogrešno rješenje manjim dijelom posljedica ranije spomenute kraće i nepreciznije formulacije pojma postotnoga dijela. Naime, prva rečenica primjera 1. bi precizno trebala glasiti: "Cijena proizvoda nakon poskupljenja od $20\,\%$ ***svoje vrijednosti*** iznosi 600 kn." U nastavi gospodarske matematike višekratno naglašavamo da se u ovako formuliranim zadatcima uvijek misli na postotni dio polazne (osnovne) veličine. Ističemo i da, ako bi se mislilo na $20\,\%$ konačne (povećane) cijene, onda bi formulacija prve rečenice trebala glasiti: "Cijena proizvoda iznosi 600 kn i dobivena je povećanjem od $20\,\%$ svoje vrijednosti." Primjer takvoga zadatka navest ćemo malo kasnije (vidjeti primjer 2.).

Znatno veći problem je ispravno matematičko modeliranje problema, odnosno ispravno razumijevanje relacije (1). Rješavajući primjer 1. dio studenata će traženu cijenu označiti sa S samo zato jer je takva oznaka osnovne veličine uporabljena u definiciji 2. Time se u potpunosti zanemaruje značenje definicije 2., odnosno relacije (1), a zadatak se želi svesti na "šablonu": "prepoznaj što je zadano, uvrsti u odgovarajuću formulu i odredi ono što nedostaje". U literaturi (vidjeti [1], [2] i [3]) se nakon relacije (1) često navode i njoj ekvivalentne relacije

$$S = \frac{100 \cdot P}{p}$$
$$p = \frac{100 \cdot P}{S} \tag{4}$$

kojima je osnovni cilj omogućiti studentima izbjegavanje rješavanja linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, odnosno dati "gotove formule" za određivanje nepoznate veličine u slučajevima kad su zadane veličine P i p, odnosno P i S. Njima se nastoji olakšati rješavanje zadataka studentima koji imaju poteškoća sa svladavanjem matematičkoga gradiva (a neki čak i blagu do umjerenu "fobiju" od matematike općenito). No, s druge se strane time zapravo gubi smisleni kontekst postotnoga računa, a rješavanje zadataka predviđenih ishodima učenja predmeta svodi na prepoznavanje/"detektiranje" zadanih veličina i uvrštavanje u odgovarajuću formulu za izračun nepoznate veličine. Smatramo da se treba inzistirati na razumijevanju smislenoga konteksta postotnoga računa, a "fobiju" pojedinih studenata od matematičkih zadataka nastojati ukloniti davanjem većega broja detaljno riješenih zadataka za vježbu (i eventualnim dodatnim objašnjavanjem postupaka rješavanja tih zadataka na konzultacijama).

Primjer 2.

(Prema primjerima iz [1] i [2]) Cijena nekoga proizvoda poveća se za $25\,\%$. Za koliko postotaka treba sniziti novu cijenu da se dobije početna?

Rješenje:

Neka je C početna cijena. Prema (1), iznos poskupljenja jednak je $\frac{25}{100} \cdot C$, pa je nova cijena jednaka $C + \frac{25}{100} \cdot C = \frac{125}{100} \cdot C$. Da bi se dobila početna cijena, novu cijenu treba sniziti za

$$p_1 = \frac{100 \cdot \frac{25}{100} \cdot C}{\frac{125}{100} \cdot C} = \frac{20}{100} = 20\,\%.$$

Komentar:

Većina ljudi sklona je "brzopotezno" odgovoriti na postavljeno pitanje: "Za $25\,\%$." Razlog je potpuno analogan kao u primjeru 1.: nerazumijevanje "što je autor zadatka htio reći", odnosno neispravno matematičko modeliranje zadatka. U primjeru 1. povećanje je iskazano u postotcima u odnosu na početnu cijenu. Ovdje se traženi postotak računa u odnosu na povećanu cijenu, tj. za traženi je postotak povećana cijena jednaka osnovnoj veličini. Čim se dođe do toga zaključka, zaključuje se da traženi postotak nije jednak $25\,\%$ jer se $25\,\%$ računa u odnosu na polaznu, a ne povećanu cijenu. Budući da je povećana cijena strogo veća od polazne, vrlo je korisno (ispravno) procijeniti da će rješenje zadatka biti strogo manje od $25\,\%$. U nastavnoj praksi studentima vrlo često preporučujemo da – prije rješavanja zadatka – pokušaju koliko god je to moguće procijeniti vrijednost konačnoga rješenja.

Dio iskusnijih (i lukavijih) studenata zadatak će riješiti razmišljajući ovako:

"Pretpostavimo da je početna cijena 100 kn. Ona se poveća za $25\,\%$, odnosno za $\frac{25}{100} \cdot 100$ kn. Nova cijena iznosi $100 + 25 = 125$ kn. Da se dobije stara cijena, novu treba sniziti za 25 kn, odnosno za $\frac{25}{125} \cdot 100 = 20\,\%$.

Dobiveno konačno rješenje je očito ispravno. Međutim, odmah se nameće pitanje:

Hoćemo li dobiti isto rješenje ako za početnu cijenu uzmemo neki drugi iznos? Obrazložite svoj odgovor.

Gotovo će svi rješavači odgovoriti potvrdno, ali *neće znati* valjano obrazložiti svoj odgovor. Iz gore navedenoga rješenja primjera 2. očito je da traženi postotak ne ovisi o početnoj cijeni, ali iz netom navedenoga rješenja to nije očito. Pritom se pojavljuje i problem *razumijevanja relativne promjene* osnovne veličine u postotnom računu kao promjene *potpuno neovisne o vrijednosti* te veličine. Taj problem dolazi do izražaja i npr. u osnovama numeričke matematike pri određivanju apsolutne i relativne pogreške mjerenja neke veličine. U detalje ovdje nećemo ulaziti.

Napomenimo da se primjer 2. alternativno može riješiti i primjenom sljedeće tvrdnje (za dokaz vidjeti [4]):

Tvrdnja 1. Neka su $C_0 > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{Q}\setminus\{0\}$. Vrijednost C_0 promijeni se za $p_1\,\%$. Potom se dobivena vrijednost promijeni za $p_2\,\%$ pa se novodobivena vrijednost promijeni za $p_3\,\%, \ldots$ pa se novodobivena vrijednost promijeni za $p_n\,\%$. Ukupna promjena R (iskazana u $\%$) polazne vrijednosti C_0 dana je izrazom:

$$R = 100 \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + p_i\,\%) - 100 \qquad (5)$$

Pritom nejednakost $p_1 > 0$ interpretiramo kao povećanje za $p_1\,\%$, a nejednakost $p_1 < 0$ kao smanjenje za $|p_1|\,\%$.

U primjeru 2. su $R = 0$, $p_1 = 25$ pa iz jednadžbe

$$0 = 100 \cdot \left(1 + \frac{25}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100$$

slijedi $p_2 = -20$ s istim zaključkom.

Primjer 3.

(Zadatak preuzet iz [5].) Trgovac je 1. lipnja cijenu proizvoda od 300 kn snizio za $20\,\%$, a zatim je 1. srpnja snizio za još $30\,\%$. Za koliko je kuna taj proizvod jeftiniji u srpnju nego u lipnju?

Rješenje:

Cijena proizvoda nakon sniženja 1. lipnja iznosi $300 - \frac{20}{100} \cdot 300 = 240$ kn. Zbog toga je traženi iznos jednak $\frac{30}{100} \cdot 240 = 72$ kn.

Komentar:

Navedeni smo primjer izdvojili kao primjer nerazumijevanja značenja postotnoga iznosa. Prilikom rješavanja ovakvoga tipa zadataka većina studenata ispravno će izračunati cijenu proizvoda nakon prvoga (lipanjskoga) sniženja. No, oni će (nepotrebno) računati i cijenu nakon drugoga (srpanjskoga) sniženja, a traženi iznos naposljetku odrediti kao razliku

$$\left(300 - \frac{20}{100} \cdot 300\right) - \left(\left(300 - \frac{20}{100} \cdot 300\right) - \frac{30}{100}\left(300 - \frac{20}{100} \cdot 300\right)\right)$$

koja je očito jednaka $\frac{30}{100} \cdot \left(300 - \frac{20}{100} \cdot 300\right)$. Drugim riječima, ti studenti će postotni iznos odrediti kao razliku lipanjske i srpanjske cijene, a ne prirodnije i kraće pomoću relacije (1). Upravo u tome ogleda se spomenuto nerazumijevanje značenja postotnoga iznosa.

Napomenimo da će manji dio studenata pogrešno izračunati traženi iznos kao razliku polazne cijene (300 kn) i krajnje cijene proizvoda (168 kn). Na temelju povratnih informacija od samih studenata rješavača zaključujemo da je ta pogreška uglavnom posljedica brzopletosti, odnosno nedovoljno pažljivoga čitanja zadatka.

Primjer 4.

(Zadatak preuzet iz [6].) Pia je u veljači dobila triput veći iznos džeparca nego u siječnju, a istodobno za $50\,\%$ veći od iznosa džeparca kojega je dobila u ožujku. Kakav je iznos džeparca u ožujku u odnosu na iznos džeparca u siječnju?

Rješenje:

Neka je S iznos Pijina džeparca u siječnju. Tada je $3 \cdot S$ iznos njezina džeparca u veljači. Označimo li s O iznos džeparca u ožujku, onda vrijedi jednakost:

$$O + \frac{50}{100} \cdot O = 3 \cdot S$$

Iz ove jednakosti dobiva se $O = 2 \cdot S$. Dakle, iznos džeparca u ožujku dvaput je veći od iznosa džeparca u siječnju.

Komentar:

Navedeni smo primjer izdvojili kao primjer problema "što uzeti za osnovnu veličinu". Većina studenata odabrat će iznos džeparca u veljači kao

osnovnu veličinu te – analogno primjeru 2. – pretpostaviti da je taj iznos 300 kn ("jer mora biti djeljiv i sa 100 i s 3"). Potom će izračunati da Pijin džeparac u siječnju iznosi $\frac{300}{3} = 100$ kn. Iznos džeparca u ožujku odredit će koristeći se "gotovom" formulom

$$S = \frac{100 \cdot S^{>}}{100 + p} \tag{6}$$

koja se obično navodi u okviru nastavne cjeline *Postotni račun više sto*. U toj relaciji S i p imaju isto značenje kao u definiciji 2., dok $S^{>} := S + P$ označava iznos osnovne veličine uvećan za postotni iznos. U tu će relaciju studenti uvrstiti $S^{>} = 300$ i $p = 50$ pa izračunati da je iznos džeparca u ožujku 200 kn. Napokon, dijeleći iznos džeparca u ožujku (200 kn) s iznosom džeparca u siječnju (100 kn), zaključit će da je iznos džeparca u ožujku dvostruko veći od iznosa džeparca u siječnju.

Studenti će opisanim načinom očito dobiti ispravno konačno rješenje. Međutim, oni (ponovno!) *neće znati ispravno objasniti* vrijedi li njihov zaključak i ako je Pijin džeparac u veljači jednak nekom drugom novčanom iznosu. Također, neće znati ni objasniti *može li se za osnovnu veličinu uzeti i neki od ostalih dvaju iznosa džeparaca* (tj. iznos džeparca u siječnju, odnosno ožujku) te – ako može – kako ispravno riješiti zadatak u svakom od tih slučajeva. Naša iskustva pokazuju da na potonje pitanje većina studenata nesigurno odgovara "Valjda može.", ali ima značajnih poteškoća u ispravnom matematičkom modeliranju istoga zadatka na barem dva različita načina.

Napomenimo da će manji dio studenata (pogrešno) izračunati da Pijin džeparac u ožujku iznosi $100 - \frac{50}{100} \cdot 100 = 50$ kn i zaključiti da je Pijin džeparac za ožujak dvaput manji od njezina džeparca u siječnju. (Uzgred budi rečeno, originalni zadatak ubrajamo u zadatke višestrukoga izbora, pri čemu je jedan od ponuđenih odgovora upravo "2 puta manji".)

Da iznos džeparca u ožujku nužno *mora* biti *strogo veći* od iznosa džeparca u siječnju, može se zaključiti i tako što se *ista vrijednost* (iznos džeparca u veljači) dobiva na dva različita načina: povećanjem iznosa S za $200\,\%$ i iznosa O za $50\,\%$. Budući da iznos S treba povećati za veći postotak nego iznos O, slijedi da iznos O mora biti strogo veći od iznosa S. Dakle, i u ovom slučaju dobra procjena odnosa navedenih veličina može sugerirati pogrešku u zaključivanju/rješenju.

Zaključak

U radu smo nastojali pokazati kako se matematički vrlo jednostavan koncept postotnoga računa u nastavnoj praksi pokazuje kao studentima relativno zahtjevan za svladavanje i primjenu u poslovnoj praksi ponajprije zbog problema koje većina studenata ima pri modeliranju problemskih matematičkih zadataka. Većina studenata nastoji ih svesti na prepoznavanje/detektiranje zadanih veličina te uvrštavanje u odgovarajuću formulu za izračun nepoznate veličine. Pritom ne razmišljaju o značenju i kontekstu provedenoga postupka niti procjenjuju – u slučajevima u kojima je to moguće učiniti – vrijednosti rješenja zadatka. Smatramo da takvu praksu u nastavi gospodarske matematike na veleučilištima i samostalnim visokim školama treba u potpunosti izbjegavati, kao i da bitno više pažnje treba posvetiti razumijevanju značenja pojedinih relacija među (ekonomskim) veličinama. Samo takvo razumijevanje može osigurati kvalitetno postizanje propisanih ishoda učenja i ciljeva predmeta.

Ključne riječi: modeliranje, postotni račun, problemski zadatci.

LITERATURA

1/ M. Papić (2018): *Poslovna matematika uz primjenu MS Excela*, Likarija d.o.o., Tounj

2/ B. Kovačić, B. Radišić (2011): *Gospodarska matematika – zbirka zadataka s CD-om*, Školska knjiga, Zagreb

3/ B. Relić (2002): *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb

4/ B. Kovačić (2014.): O strukturnoj promjeni osnovne veličine u postotnom računu od 100, *Matematika i škola*, 61, str. 11.-13.

5/ `https://www.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2021/08/MATB21jesen1.zip`

6/ `https://www.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2021/09/MAT22OGL.zip`