O strukturnoj promjeni

osnovne veličine u postotnom računu od sto

Bojan Kovačić, Zagreb

Prigodom obrade gradiva koje se odnosi na postotni račun u srednjim školama, ali i visokim školama i veleučilištima "tradicionalno" se rješava zadatak sljedećega tipa:

Zadatak 1. Cijena nekoga proizvoda najprije je povećana/smanjena za $p_1\%$, a potom povećana/smanjena za $p_2\%$. Za koliko je ukupno postotaka promijenjena početna cijena toga proizvoda?

Taj se zadatak obično rješava tako da se *bez smanjenja općenitosti* pretpostavi da je početna cijena proizvoda 100 novčanih jedinica, pa se primjenom postotnoga računa od sto izračunavaju iznosi povećanja, odnosno smanjenja. Pritom se obično ne objašnjava zbog čega se (ispravno) može pretpostaviti da je početna cijena proizvoda 100 novčanih jedinica, pa bolji učenici ili studenti nerijetko postavljaju pitanje: "Vrijedi li naš račun i ako uzmemo neku drugu početnu cijenu?" Odgovor je potvrdan jer ukupna relativna promjena početne cijene *ne ovisi* o iznosu početne cijene (odnosno, općenito o početnoj vrijednosti osnovne veličine), nego isključivo o vrijednostima pojedinih relativnih promjena. Stoga ćemo u ovom članku izvesti formulu koja opisuje zavisnost ukupne relativne promjene osnovne veličine o vrijednostima pojedinih relativnih promjena *bez uvođenja početne vrijednosti* osnovne veličine. Potom ćemo na nekoliko primjera ukazati korisnost navedene formule u rješavanju zadataka poput gornjega.

Prije negoli izvedemo navedenu formulu, navest ćemo nekoliko pretpostavki koje ćemo "prešutno" primjenjivati u samom izvodu. Ponajprije radi ekonomskih i tehničkih primjena, pretpostavljamo da je početna vrijednost osnovne veličine (označimo je s C_0) strogo pozitivan realan broj. Za $C_0 = 0$ besmisleno je govoriti o relativnoj promjeni osnovne veličine, dok se za $C_0 < 0$ javlja pomalo apsurdan slučaj da povećavanjem vrijednosti osnovne veličine dobijemo još manju vrijednost te veličine, odnosno da smanjenjem vrijednosti osnovne veličine dobijemo još veću vrijednost te veličine. Npr. povećamo li vrijednost $C_0 = -100$ za 50% te vrijednosti, tj. za $\frac{50}{100} \cdot (-100) = -50$, dobit ćemo vrijednost $C_1 = -100 + (-50) = -150$, pa je očito $C_1 < C_0$. Analogan račun vrijedi i za smanjenje za 50%, pri čemu se dobije nejednakost $C_1 > C_0$. Zbog toga prirodno pretpostavljamo $C_0 > 0$.

Nadalje, poznato je da izraz $p\%$ zapravo predstavlja alternativni zapis racionalnoga broja $\frac{p}{100}$. Prema definiciji skupa racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$, brojnik razlomka $\frac{p}{100}$ je cijeli broj, tj. vrijedi $p \in \mathbf{Z}$. U ovom ćemo radu pretpostavljati da u zapisu $p\%$ vrijednost p može biti bilo koji *racionalan* broj strogo veći od -100, tj. da je $p \in \mathbf{Q} \cup [-100, +\infty\rangle$. Ova pretpostavka je vrlo korisna jer obuhvaća praktično česte slučajeve u kojima je relativna promjena neke veličine npr. 0.5%. Dodatni uvjet $p \geq -100$ posljedica je prirodnoga uvjeta da vrijednost niti jedne ekonomske ili tehničke veličine ne možemo smanjiti za više od 100%.

Napokon, predznak izraza $p\%$ interpretirat ćemo kao relativno povećanje, odnosno smanjenje (sniženje) odgovarajuće vrijednosti i obrnuto: relativno povećanje zapisat ćemo kao postotak s pozitivnim predznakom, a relativno smanjenje (sniženje) kao postotak s negativnim predznakom. Tako će npr. $+5\%$ označavati povećanje vrijednosti za 5% njezina iznosa, a -10% smanjenje neke vrijednosti za 10% njezina iznosa.

Istaknimo još i sljedeće: umjesto matematički potpuno korektne sintagme "promjena za $p\%$ svoje vrijednosti", rabit ćemo uobičajeniju (ali matematički nepreciznu i netočniju!) kraću sintagmu "promjena za $p\%$". Dakle, nećemo pisati npr. "cijena se promijenila za $p\%$ svoje vrijednosti", nego "cijena se promijenila za $p\%$", ali ćemo pritom uvijek imati na umu da se postotni udio odnosi na vrijednost dotične cijene.

Sada možemo postaviti osnovni problem:

Problem. Neka su $C_0 > 0$, $n \in \mathbf{N}$ i $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{Q}$. Vrijednost C_0 promijeni se za $p_1\%$. Potom se novodobivena vrijednost promijeni za $p_2\%$, pa se novodobivena vrijednost promijeni za $p_3\%, \ldots$, pa se novodobivena vrijednost promijeni za $p_n\%$. Odredite konačnu relativnu promjenu vrijednosti C_0.

Uočimo odmah da u navedenom problemu govorimo o *promjenama* u općem smislu ne precizirajući je li riječ o povećanju ili smanjenju. To možemo učiniti zbog pretpostavke da se predznak svake od vrijednosti $p_1, \ldots, p_n$ interpretira kao povećanje ili smanjenje.

Podsjetimo se osnovne formule postotnoga računa od sto:

$$P = \frac{p}{100} \cdot S,$$

gdje su:
P – postotni iznos;
p – vrijednost relativne promjene;
S – osnovni (temeljni) iznos.

Promijenimo li vrijednost C_0 za $p_1\%$, dobit ćemo vrijednost:

$$C_1 = C_0 + \frac{p_1}{100} \cdot C_0,$$
$$C_1 = \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot C_0.$$

Promijenimo li vrijednost C_1 za $p_2\%$, dobit ćemo vrijednost:

$$C_2 = \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot C_1.$$

Nastavljajući taj postupak dobivamo konačan niz $(C_k)_{k\in\mathbf{N}}$ definiran s

$$C_k = \left(1 + \frac{p_k}{100}\right) \cdot C_{k-1} \quad \text{za } k = 1, 2, \ldots, n.$$

"Teleskopiranjem"[1] se lagano dobiva

$$C_n = \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{p_i}{100}\right) \cdot C_0 \quad \text{za } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Stoga je iznos ukupne promjene početne vrijednosti C_0 jednak

$$P = C_n - C_0 = \left[\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{p_i}{100}\right) - 1\right] \cdot C_0,$$

pa je tražena ukupna relativna promjena R jednaka

$$R = \frac{100 \cdot P}{C_0},$$
$$R = 100 \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{p_i}{100}\right) - 100,$$

ili ekvivalentno,

$$R = 100 \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 + p_i\%) - 100.$$

Dakle, vrijednost C_0 promijenila se za ukupno $R\%$.

Uočimo: Ako je $R > 0$, dobit ćemo povećanje osnovne vrijednosti za $R\%$. Ako je $R = 0$, krajnja vrijednost jednaka je početnoj. Ako je $R < 0$, dobit ćemo smanjenje osnovne vrijednosti za $|R|\%$. Također, vrijednost R očito *ne ovisi* o vrijednosti C_0, nego isključivo o vrijednostima pojedinih relativnih promjena $p_1, \ldots, p_n$, a to smo i željeli dobiti.

Primjenu netom izvedenoga izraza pokazat ćemo na nekoliko zadataka.

Zadatak 2. Cijena osvježavajućega napitka *Cockta-Cola* najprije se povećala za 20% pa se potom nova cijena smanjila za 15%. Usporedite krajnju

[1] O metodi "teleskopiranja" za rješavanje rekurzija vidjeti npr. u [3].

cijenu toga napitka s početnom i iskažite relativni odnos tih cijena u postocima.

Rješenje. U ovome je slučaju $n = 2$ (imamo ukupno dvije promjene: jedno povećanje i jedno smanjenje), $p_1 = +20$ (jer je prva promjena povećanje za 20%) i $p_2 = -15$ (jer je druga promjena smanjenje za 15%). Stoga je

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100$$
$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right) - 100$$
$$R = 2.$$

Dakle, krajnja cijena napitka je za 2% veća od njegove početne cijene (odnosno, ekvivalentno, početna cijena proizvoda je za $\frac{100}{51}\%$ manja od početne, što ćemo izvesti u zadatku 4.).

Zadatak 3. Cijena čokolade *Fantazija* povećana je za 10%. Za koliko postotaka treba sniziti novu cijenu da se dobije početna?

Rješenje. U ovome je slučaju $n = 2$ (imamo ukupno dvije promjene: jedno povećanje i jedno sniženje), $p_1 = +10$ (jer je prva promjena povećanje od 10%) i $R = 0$ (jer je krajnja cijena — nakon izvršenih obiju promjena — jednaka početnoj). Uvrštavanjem tih vrijednosti u izraz

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100,$$

dobivamo linearnu jednadžbu

$$0 = 100 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100,$$

čije je rješenje $p_2 = -\frac{100}{11}$. Dakle, novu cijenu treba sniziti za $\frac{100}{11}\%$.

Zadatak 4. Cijena nekoga proizvoda promijenjena je za $p\%$. Za koliko postotaka treba promijeniti novu cijenu da se dobije početna? (Ili ekvivalentno: ako je krajnja cijena nekoga proizvoda za $p\%$ veća/manja od početne, za koliko je postotaka početna cijena toga proizvoda manja/veća od njegove krajnje cijene?)

Taj zadatak rješava se analogno kao i zadatak 3. U izraz

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100$$

uvrstimo $R = 0$ i $p_1 = p$, pa dobijemo:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) = 1.$$

Ovu jednadžbu riješimo po nepoznanici p_2, pa dobijemo:

$$p_2 = -\frac{100 \cdot p}{100 + p}.$$

Uočimo da, zbog ranije pretpostavke $p \geq -100$, negativan predznak desne strane posljednje jednakosti znači da će predznak veličine p_2 biti suprotan predznaku veličine p, kako i očekujemo sukladno prirodi razmatranoga problema. Također, primijetimo da za $p = -100$ zadatak nema rješenja jer *promjena cijene za* -100% znači pojeftinjenje za 100%, čime proizvod postaje besplatan, tj. nova cijena proizvoda je 0 novčanih jedinica, pa bilo kakvo daljnje relativno povećavanje ili smanjivanje te cijene nema nikakva učinka.

Time smo ujedno i opravdali drugi dio zaključka iz rješenja zadatka 2.: ako je krajnja cijena za 2% veća od početne, onda je početna cijena za $\left|-\frac{100 \cdot 2}{100 + 2}\right| = \frac{100}{51}\%$ manja od krajnje.

Na kraju istaknimo da se barem jedan zadatak vezan uz postotni račun od sto u pravilu pojavljuje na bilo kojoj razini ispita iz matematike na državnoj maturi, pa se nadamo da će ovo razmatranje biti korisno i maturantima i njihovim nastavnicima prigodom rješavanja malo težih zadataka iz postotnoga računa.

LITERATURA

1/ B. Relić, *Gospodarska matematika*, (2. izdanje), Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb, 2002.

2/ B. Kovačić, B. Radišić, *Gospodarska matematika* (zbirka zadataka s CD-om), Školska knjiga, Zagreb, 2011.

3/ D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

4/ V. Erceg, *Metode gospodarskog računa*, (vježbenica), Element, Zagreb, 2004.