O VEZI LUCASOVIH BROJEVA I PASCALOVA TROKUTA

mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb
e-adresa: bojan.kovacic@tvz.hr

Jedan od najpoznatijih nizova u elementarnoj teoriji brojeva je niz Fibonaccijevih[1] brojeva ili, kraće, Fibonaccijev niz $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Taj je niz definiran rekurzivno s:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ za svaki } n \in \mathbf{N}, \qquad F_0 = F_1 = 1. \tag{1}$$

O Fibonaccijevim brojevima čitatelj može saznati više u knjižici [1]. Usko vezani uz Fibonaccijeve brojeve su *Lucasovi*[2] *brojevi*, odnosno niz Lucasovih brojeva $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (kraće: Lucasov niz). Taj je niz definiran rekurzivno s:

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \text{ za svaki } n \in \mathbf{N}, \qquad L_0 = 2,\ L_1 = 1. \tag{2}$$

Koristeći relaciju (2) ispišimo prvih deset Lucasovih brojeva:

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, …

Fibonaccijev i Lucasov niz očito imaju istu definicijsku rekurzivnu relaciju, ali se razlikuju u početnim uvjetima. Zbog toga je zatvorena formula za računanje n–toga člana Lucasova niza malo drugačija nego poznata Binetova[3] formula kojom se računa n–ti član Fibonaccijeva niza (izvod te formule može se naći npr. u [1]). Točnije, za svaki prirodan broj $n \in \mathbf{N}$ vrijedi jednakost:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{3}$$

Dokaz navedene jednakosti najjednostavnije se provodi matematičkom indukcijom i prepuštamo ga čitatelju. Čitatelji upoznati s osnovama rješavanja homogenih linearnih rekurzija s konstatnim koeficijentima lako mogu izvesti jednakost (3) rješavajući rekurziju (2) uz zadane početne uvjete.

Radi potpunosti izlaganja, podsjetimo da je *osnovni Pascalov*[4] *trokut* „struktura“ definirana s:

1	1		
1	2	1	
1	3	3	1

[1] Leonardo Pisano Bigollo (1170. – 1250.), poznatiji kao Leonardo Fibonacci, talijanski matematičar, zaslužan za širenje indo-arapskoga zapisa brojeva u Europi
[2] François Édouard Anatole Lucas (1842. – 1891.), francuski matematičar, poznat po izučavanju Fibonaccijevih brojeva.
[3] Jacques Philippe Marie Binet (1786. – 1856.), francuski matematičar, fizičar i astronom, značajan po svojim radovima iz teorije brojeva i algebre matrica.
[4] Blaise Pascal (1623. – 1662.), francuski matematičar, fizičar, filozof, pisac i izumitelj, jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena.

1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
.	.	.	.	.	.	.

Članovi i–toga retka osnovnoga Pascalova trokuta su binomni koeficijenti u binomnomu razvoju $(x + y)^i$, i to poredani uzlazno prema potencijama člana y. Za svaki $k \in \mathbf{N}$ osnovna svojstva članova k – toga retka Pascalova trokuta su:

(S1) Prvi i posljednji član retka jednaki su 1.
(S2) i – ti član retka jednak je zbroju i – toga člana $(k - 1)$–voga retka i $(i - 1)$–voga člana $(k - 1)$–voga retka, za svaki $k \geq 2$ i za svaki $i = 2, 3, \ldots, k$.

Svojstvo (S2) posljedica je jedne od osnovnih jednakosti binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \text{ za sve } n, k \in \mathbf{N} \text{ takve da je } n \geq k + 1. \tag{4}$$

Detaljnije o Pascalovu trokutu i svojstvima binomnih koeficijenata može se naći npr. u [2].

Pokažimo najprije kako se koeficijenti u Pascalovu trokutu pojavljuju u jednakostima koje se odnose na Lucasove brojeve. Zapišimo relaciju (2) u obliku:

$$L_{n+1} = 1 \cdot L_n + 1 \cdot L_{n-1}, \tag{5}$$

pa vidimo da su koeficijenti uz brojeve L_n i L_{n-1} upravo koeficijenti napisani u prvomu retku Pascalova trokuta. Nadalje, zbrajanjem relacije

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \text{ za svaki } n \in \mathbf{N}, n \geq 2, \tag{6}$$

i relacije (2) dobijemo:

$$L_{n+1} + L_n = L_n + 2 \cdot L_{n-1} + L_{n-2}. \tag{7}$$

Opet prema relaciji (2) vrijedi:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \tag{8}$$

pa relaciju (7) možemo zapisati u obliku:

$$L_{n+2} = 1 \cdot L_n + 2 \cdot L_{n-1} + 1 \cdot L_{n-2}. \tag{9}$$

Vidimo da su koeficijenti uz brojeve L_n, L_{n-1} i L_{n-2} upravo koeficijenti napisani u drugomu retku Pascalova trokuta. Da ovakva veza nije slučajna, uvjerit će nas sljedeći

***Poučak* 1.** Za svaki prirodan broj $k \in \mathbf{N}$ i za sve prirodne brojeve $n \in \mathbf{N}$ takve da je $n \geq k$ vrijedi:

$$L_{n+k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot L_{n-i}\,. \tag{10}$$

Dokaz: Koristit ćemo jednakosti:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \tag{11}$$

i

$$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{1 \pm \sqrt{5}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \tag{12}$$

(Jednakost (11) se dobije uvrštavanjem $y = 1$ u binomni poučak.) Prema jednakosti (3) vrijedi:

$$L_{n-i} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i}. \tag{13}$$

Stoga imamo redom:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot L_{n-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i} \right] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-i} =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-i} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-i} \overset{\text{prema (11)}}{=}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)^{k} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)^{k} =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{k} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)^{k} \overset{\text{prema (12)}}{=}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+k} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+k} \overset{\text{prema (3)}}{=} L_{n+k},$$

što je i trebalo dokazati. ■

Grubo (i neprecizno) možemo reći da konačna „linearna kombinacija“ uzastopnih Lucasovih brojeva (s koeficijentima iz *istoga* retka Pascalova trokuta!) daje ponovno Lucasov broj.

Pokažimo sada svojevrsni obrat, tj. kako Lucasove brojeve možemo dobiti iz elemenata Pascalova trokuta. Na temelju Pascalova trokuta formiramo beskonačnu realnu matricu $A =$ $= [a_{ij}]$ čiji su elementi definirani propisom:

$$a_{ij} = \binom{i}{j-i}, \text{ za svaki } (i, j) \in \mathbf{N}^2. \tag{14}$$

Pritom dogovorno pretpostavljamo da vrijedi jednakost:

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ za } n < k \text{ ili za } k < 0. \tag{15}$$

Tako dobivamo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 15 & 20 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 21 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Očito, nenulelementi i–toga retka (u danom poretku) su upravo binomni koeficijenti u binomnom razvoju $(x + y)^i$ poredani kao u Pascalovu trokutu. Za svaki element a_{ij} matrice A definiramo *nenegativne cijele brojeve* b_{ij} s:

$$b_{ij} = \frac{j}{i} \cdot a_{ij} = \frac{j}{i} \cdot \binom{i}{j-i}, \text{ za svaki } (i, j) \in \mathbf{N}^2. \tag{17}$$

Dobivene vrijednosti „složimo“ u novu beskonačnu realnu matricu B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 9 & 7 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 14 & 16 & 9 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 20 & 30 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 27 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{18}$$

Pomoću elemenata matrice B mogu se dobiti gotovo svi Lucasovi brojevi. Točnije, vrijedi:

Poučak 2. $\sum_{i=1}^{j} b_{ij} = L_j$. (19)

Napomena: Zbog jednakosti

$$b_{ij} = 0, \text{ za sve } i, j \in \mathbf{N} \text{ takve da je } i > j, \tag{20}$$

koja izravno slijedi iz jednakosti (15) i (17), Poučak 2. zapravo tvrdi da je zbroj svih elemenata u j – tom stupcu matrice B jednak j – tom članu Lucasova niza. Podsjetimo da Lucasov niz počinje članom $L_0 = 2$, pa taj (i samo taj!) član nije moguće dobiti kao zbroj svih elemenata u nekom stupcu matrice B.

Provjerimo tvrdnju Poučka 2. npr. za $j = 6$. Dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{6} b_{i6} = b_{16} + b_{26} + b_{36} + b_{46} + b_{56} + b_{66} = 0 + 0 + 2 + 9 + 6 + 1 = 18 = L_6. \tag{21}$$

Dokaz Poučka 2: Za svaki $j \in \mathbf{N}$ neka je

$$c_j = \sum_{i=1}^{j} b_{ij} \; . \tag{22}$$

Niz $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$ tvore zbrojevi prvih j elemenata u j–tom stupcu matrice B. Želimo pokazati da taj niz zadovoljava jednakosti:

$$\begin{gathered} c_{j+2} = c_{j+1} + c_j, \text{ za svaki } j \in \mathbf{N}, \\ c_1 = 1, \; c_2 = 3. \end{gathered} \tag{23}$$

Iz (3) i (23) tada će izravno slijediti $c_j = L_j$, za svaki $j \in \mathbf{N}$, čime će poučak biti dokazan.

Lako se provjeri da vrijede jednakosti $c_1 = 1$ i $c_2 = 3$, pa su početni uvjeti zadovoljeni. Pokažimo sada da za svaki $(i, j) \in \mathbf{N}^2$ vrijedi jednakost:

$$b_{i+1,j+2} = b_{ij} + b_{i,j+1} \; . \tag{24}$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned} b_{ij} + b_{i,j+1} &= \frac{j}{i} \cdot \binom{i}{j-i} + \frac{j+1}{i} \cdot \binom{i}{j-i+1} = \frac{j}{i} \cdot \frac{i!}{(j-i)! \cdot (2 \cdot i - j)!} + \frac{j+1}{i} \cdot \frac{i!}{(j-i+1)! \cdot (2 \cdot i - j - 1)!} = \\ &= \frac{j \cdot (i-1)!}{(j-i)! \cdot (2 \cdot i - j)!} + \frac{(j+1) \cdot (i-1)!}{(j-i+1)! \cdot (2 \cdot i - j - 1)!} = \frac{j \cdot (j-i+1) \cdot (i-1)! + (j+1) \cdot (2 \cdot i - j) \cdot (i-1)!}{(j-i+1)! \cdot (2 \cdot i - j)!} = \\ &= \frac{(j+2) \cdot i \cdot (i-1)!}{(j-i+1)! \cdot (2 \cdot i - j)!} = \frac{(j+2) \cdot i!}{(j-i+1)! \cdot (2 \cdot i - j)!} = \frac{j+2}{i+1} \cdot \frac{(i+1)!}{(j-i+1)! \cdot (2 \cdot i - j)!} = \frac{j+2}{i+1} \cdot \binom{i+1}{j-i+1} = b_{i+1,j+2}. \end{aligned}$$

Nije teško vidjeti da se iz jednakosti (24) formalnim zbrajanjem po varijabli i dobije:

$$c_{j+2} = c_j + c_{j+1}, \tag{25}$$

što smo i željeli pokazati. ■

Zaključno spomenimo da se Lucasovi brojevi pojavljuju u razmatranju tzv. *Pascalovih trokuta druge vrste*. Pascalov trokut druge vrste je sljedeća trokutasta shema:

2									
1	2								
1	3	2							
1	4	5	2						
1	5	9	7	2					
1	6	14	16	9	2				
1	7	20	30	25	11	2			
1	8	27	50	55	36	13	2		
1	9	35	77	105	91	49	15	2	
1	10	44	112	182	196	140	64	17	2

Svi elementi smješteni na „hipotenuzi“ jednaki su 2, dok su svi elementi (osim prvoga) smješteni na vertikalnu „katetu“ jednaki 1. Zanimljiviji su elementi smješteni na prve tri „usporednice“ s „hipotenuzom“. Na prvoj su „usporednici“ smješteni svi neparni brojevi, na drugoj svi potpuni kvadrati prirodnih brojeva, a na trećoj tzv. *kvadratični piramidalni brojevi*.[5] Svaki od ostalih brojeva dobiven je uobičajeno, tj. svaki broj y dobiven je kao zbroj broja x smještenoga neposredno iznad y i broja z smještenoga neposredno lijevo od broja x.

U ovome se slučaju svi Lucasovi brojevi dobiju kao zbrojevi elemenata smještenima na „pravcima“ „usporednima“ s „visinom“ povučenom na „hipotenuzu“. Na prvom takvom „pravcu“ nalazi se samo broj 2, na drugom broj 1, na trećem brojevi 2 i 1, na četvrtom brojevi 3 i 1, na petom brojevi 2, 4, i 1 itd. Računanjem navedenih zbrojeva dobije se niz 2, 1, 3, 4, 7, …, tj. niz Lucasovih brojeva. Dokaz ove tvrdnje nije elementaran, pa ga ovdje izostavljamo.

LITERATURA:

1. A. Dujella: *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, 2000.
2. D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.
3. M. Milanović: *Lucas Numbers and Pascal Triangle*, javno dostupno na: http://milan.milanovic.org/math/english/fibo/fibo3.html (01.08.2012.)
4. R. Knott: *Lucas Numbers*, javno dostupno na http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/lucasNbs.html#pascal (01.08.2012.)
5. A. T. Benjamin: *The Lucas Triangle Recounted*, javno dostupno na: http://www.math.hmc.edu/~benjamin/papers/LucasTriangle.pdf (01.08.2012.)

[5] Naziv se odnosi na ukupan broj međusobno jednakih sfera koje je moguće složiti tako da oblikuju pravilnu uspravnu četverostranu piramidu, ali primjenjuje se i na ukupan broj različitih kvadrata sadržanih u kvadratnoj $n \times n$ mreži.