Ispitni rok: 08.06.2011.

ZADATCI:

1. Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} x & \sqrt{x} & 0 \\ 1 & y & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$, gdje su $x, y \in \langle 0, +\infty\rangle$. Za koje vrijednosti x i y je matrica A regularna?

2. Gauss–Jordanovom metodom riješite sustav:

$$x + \frac{1}{2} \cdot y - \frac{1}{2} \cdot z = 0$$
$$y + 2 \cdot z = 4$$
$$-x + 2 \cdot y - z = -3$$

3. Zadana je funkcija ponude $q(p) = e^{t \cdot p}$, gdje je p cijena. Odredite vrijednost realnoga parametra $t > 0$ tako da ponuda bude jedinično elastična u odnosu na razinu cijene $p = 10$.

4. Izračunajte ekstreme funkcije $f(x, y) = e^{x \cdot y}$ uz uvjet $x - y = 1$.

5. Odredite $t \in \langle 1, +\infty\rangle$ iz jednakosti $\int\limits_1^t \frac{1}{x} \cdot dx = \ln 4$.

6. Odredite funkciju korisnosti $u = u(x)$ ako je koeficijent elastičnosti u odnosu na količinu kupljenoga proizvoda $E_{u,x} = \frac{1}{4}$ i ako je $u(1) = 10$.

7. Masa nekoga tova se za dvije godine udvostruči. Ako prosječan godišnji prirodni prirast ostane nepromijenjen, za koje će se vrijeme masa toga tova utrostručiti (u odnosu na današnju masu tova)?

8. Zajam od 400 000 kn odobren je na 4 godine uz godišnji kamatnjak 4 i plaćanje nominalno jednakih otplatnih kvota krajem godine. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Sastavite otplatnu tablicu i izračunajte iznos ukupnih kamata.

REZULTATI ZADATAKA

1. Ne postoje x, $y \in \langle 0, +\infty\rangle$ takvi da je matrica A regularna.
2. $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.
3. $t = \dfrac{1}{10}$.
4. Funkcija f postiže minimum $\dfrac{\sqrt[4]{e^3}}{e}$ za $x = \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$.
5. $t = 4$.
6. $u(x) = 10 \cdot \sqrt[4]{x}$
7. $n = \dfrac{2 \cdot \ln 3}{\ln 2} \approx 3.17$ godina.
8. $\sum_{k=1}^{4} I_k = 40\,000$ kn. Otplatna tablica:

PLAN OTPLATE ZAJMA				
Kraj razdoblja k	***Iznos anuiteta a_k***	***Iznos kamate I_k***	***Otplatna kvota R_k***	***Ostatak duga C_k***
0	0,00 kn	0,00 kn	0,00 kn	400.000,00 kn
1	116.000,00 kn	16.000,00 kn	100.000,00 kn	300.000,00 kn
2	112.000,00 kn	12.000,00 kn	100.000,00 kn	200.000,00 kn
3	108.000,00 kn	8.000,00 kn	100.000,00 kn	100.000,00 kn
4	104.000,00 kn	4.000,00 kn	100.000,00 kn	0,00 kn
Ukupno:	440.000,00 kn	40.000,00 kn	400.000,00 kn	

ODABRANI ZADATCI S OSTALIH ROKOVA U 2011. GODINI

1. **(04.02.2011.)** Odredite vrijednost realnoga parametra t iz jednakosti: $\int\limits_t^0 e^{-x} \cdot dx = e^4 - 1$.

Rezultat: $t = -4$.

2. **(04.02.2011.)** Odredite neodređeni integral $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 7} \cdot dx$.

Rezultat: $I = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 7) \cdot \sqrt{x^2 + 7} + C,\ C \in \mathbf{R}$.

3. (**04.02.2011.**) Odredite funkciju ukupnih prihoda $R(Q)$ čiji je koeficijent elastičnosti u odnosu na proizvodnju $E_{R,Q} = \frac{1}{2}$ i ako je $R(4) = 20$.

Rezultat: $R(Q) = 10 \cdot \sqrt{Q}$.

4. **(18.02.2011.**) Izračunajte koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih troškova $T(Q) = Q \cdot \sqrt[3]{Q}$ na razini proizvodnje $Q = 8$. Interpretirajte dobivenih rezultat.

Rezultat: $E_{T,Q} = \frac{4}{3}$. Ako se količina proizvodnje poveća za 1% na razini $Q = 8$, ukupni troškovi proizvodnje na toj razini povećat će se za $\frac{4}{3}\% \approx 1.33\%$.

5. **(18.02.2011.)** Nađite sve realne funkcije $y = y(x)$ takve da je $E_{y,\,x} = 4$.
Rezultat: $y = C \cdot e^{4 \cdot x}$, gdje je $C > 0$.

6. **(04.02.2011.)** Zadana je funkcija graničnih prihoda proizvodnje $r(Q) = Q + 1$, gdje je Q količina proizvodnje. Odredite funkciju ukupnih prihoda R za koju je $R(10) = 60$.

Rezultat: $R(Q) = \frac{1}{2} \cdot Q^2 + Q$.

7. **(04.02.2011.)** Zadana je funkcija graničnih troškova proizvodnje $t(Q) = Q$, gdje je Q količina proizvodnje. Ukoliko su na razini proizvodnje $Q = 2$ ukupni troškovi jednaki 4 n.j., odredite funkciju ukupnih troškova.

Rezultat: $T(Q) = \frac{1}{2} \cdot Q^2 + 2$.

8. **(04.02.2011.)** Poduzeće proizvodi dvije vrste proizvoda čije su količine Q_1 i Q_2. Dobit poduzeća određena je funkcijom $D(Q_1, Q_2) = -4 \cdot Q_1^2 + 8 \cdot Q_1 \cdot Q_2 - 6 \cdot Q_2^2 + 8 \cdot Q_1 - 4 \cdot Q_2 + \ +$ 154. Odredite količine proizvodnje uz koje se ostvaruje maksimalna dobit i izračunajte tu maksimalnu dobit.
Rezultat: Maksimalna dobit iznosi 160 n.j. i postiže se za $(Q_1, Q_2) = (2, 1)$.

9. **(04.02.2011.)** Neka glavnica je bila uložena na neko vrijeme uz 10% složenih godišnjih dekurzivnih kamata, a potom na trostruko dulje vrijeme uz 20% složenih godišnjih dekurzivnih kamata. Ako ukupno relativno povećanje glavnice u cjelokupnom razdoblju kapitalizacije iznosi 90.08%, odredite na koje je vrijeme glavnica bila uložena uz veću kamatnu stopu.
Rezultat: $n = 3$ godine.

10. (18.02.2011.) Zadana je matrica tehničkih koeficijenata neke trosektorske ekonomije: $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{10}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$. Ako je ukupni output drugoga sektora Q_2 = 160, finalna potražnja prvoga sektora q_1 = 30, a finalna potražnja trećega sektora q_3 = 100, sastavite pripadnu input–output tablicu.

<u>*Rezultat*</u>:

Q_i	Q_{ij}			q_i
120	30	40	20	30
160	30	40	40	50
200	30	20	50	100

11. (18.02.2011.) Odredite sve vrijednosti realnoga parametra t za koje je matrica $A=\begin{bmatrix}1 & t & 2\\ 2 & t+1 & -1\\ 1 & 1 & t-1\end{bmatrix}$ regularna.

<u>*Rezultat*</u>: $t \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$.

12. (31.01.2011.) Zadana je funkcija potražnje $q_1(p_1, p_2)=\frac{1}{3}\cdot p_1^3+\frac{2}{3\cdot p_2}$. Odredite i interpretirajte koeficijente parcijalne i križne elastičnosti na razini cijena (p_1, p_2) = (3, 1). Utvrdite jesu li proizvodi komplementi ili supstituti i obrazložite odgovor.

<u>*Rezultat*</u>: $E_{q_1,p_1}=\frac{81}{29}$, $E_{q_1,p_2}=-\frac{2}{29}$. Proizvodi su komplementi jer rast cijene drugoga proizvoda uzrokuje pad potražnje za prvim proizvodom.

13. (31.01.2011.) Promatramo dvosektorsku ekonomiju koja se sastoji iz sektora poljoprivrede i sektora energije. Da bi se proizvelo 5 jedinica poljoprivrednih proizvoda, potrebne su 2 jedinice sjemena (poljoprivrednih proizvoda) i 1 jedinica energije. Da bi se proizvelo 10 jedinica energije, potrebne su 5 jedinica poljoprivrednih proizvoda i 1 jedinica energije. Ako finalna potražnja obaju sektora izvan promatrane ekonomije iznosi 6 jedinica poljoprivrednih proizvoda i 4 jedinice energije, koliko jedinica poljoprivrednih proizvoda mora proizvoditi sektor poljoprivrede da međusektorska i finalna potražnja budu zadovoljene? Koliko jedinica energije mora proizvesti sektor energije s istim ciljem?

<u>*Rezultat*</u>: 12.4 jedinice poljoprivrednih proizvoda, odnosno 7.2. jedinice energije.

14. (31.01.2011.) Odredite ekstreme realne funkcije $f(x, y)=e^{x^2-y^2}$.

<u>*Rezultat*</u>: Zadana funkcija nema lokalnih ekstrema.

15. (31.01.2011.) Izračunajte $\int\limits_0^{e^2-1} \ln\sqrt{x+1}\cdot dx$.

<u>*Rezultat*</u>: $I=\frac{e^2+1}{2}\approx 4.19453$

izvor zadataka: www.efzg.hr

ISPITNI ROK: 07.09.2011.

1. Izračunajte determinantu $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Rezultat: $\det(A) = -120$.

2. Ima li sustav

$$\begin{aligned} -x - y - z &= -1 \\ -x + y + z &= 3 \\ -2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z &= 2 \end{aligned}$$

rješenje? Objasnite svoj odgovor.

Rezultat: Sustav nema rješenja. Pomnožimo drugu jednadžbu s 2 i pribrojimo trećoj. Dobiva se jednakost $0 = 8$ koja očito nije točna ni za koju uređenu trojku $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

3. Zadana je funkcija proizvodnje $P = P(L,C) = 0.5 \cdot L^2 \cdot \ln\frac{C}{L} + 0.4 \cdot C^2$, pri čemu su L zaposlenje i C kapital. Za koliko će se postotakaka promijeniti proizvodnja ako se L i C povećaju za 10%?

4. Odredite ekstreme funkcije $f(x, y) = 2 \cdot x^2 - y^2$ uz uvjet $x + y = 4$.

Rezultat: Funkcija ima globalni minimum -32 za $(x, y) = (-4, 8)$.

5. Riješite Cauchyjev problem: $\begin{cases} \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = a, \\ y(2) = 2 \cdot 2^a. \end{cases}$

Rezultat: $y = 2 \cdot x^a$.

6. Odredite integral $\int (\cos^2 x + 2) \cdot dx$.

Rezultat: $I = \frac{5}{2} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot x) + C, C \in \mathbf{R}$.

7. Ako tijekom 15 godina ulažemo krajem svake godine po 15 000 kn, koliko ćemo imati u banci na kraju 16. godine? Godišnji dekurzivni kamatnjak jednak je 3.6579, a obračun kamata je složen, dekurzivan i godišnji.

Rezultat: 303.543,35 kn.

8. Riješite 7. zadatak uz pretpostavku da se uplate vrše početkom svake godine.

Rezultat: 314.646,66 kn.

ISPITNI ROK: 21.09.2011. - 1. skupina zadataka

1. Zadana je matrica tehničkih koeficijenata neke trosektorske ekonomije:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ako su ukupni outputi prvoga, odnosno trećega sektora redom $Q_1 = 100$ i $Q_3 = 200$, a ukupna finalna potražnja drugoga sektora $q_2 = 70$, napišite pripadnu input–output tablicu.

Rezultat:

Q_i	Q_{ij}			q_i
100	20	10	0	50
100	10	0	20	70
200	10	30	0	160

2. Neka je S skup svih antisimetričnih matrica reda 2. Pokažite da za svaki $A \in S$ vrijedi jednakost: $A \cdot A^T = A^T \cdot A$.

Rezultat: Svaka antisimetrična matrica reda 2 ima oblik $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$, za neki $a \in \mathbf{R}$. Stoga je $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$.

3. Odredite prirodno područje definicije, intervale monotonosti i lokalne ekstreme realne funkcije f definirane propisom $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Rezultat: $D_f = \mathbf{R}$, interval pada: $\langle -\infty, 0\rangle$, interval rasta: $\langle 0, +\infty\rangle$, f ima lokalni minimum 0 za $x = 0$.

4. Zadana je realna funkcija dviju realnih varijabli propisom $f(x, y) = \dfrac{x^3 - 2 \cdot y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

a) Je li funkcija f homogena? Ako jest, odredite njezin stupanj homogenosti.
b) Odredite relativnu promjenu vrijednosti funkcije f ako se vrijednosti varijabli x i y povećaju svaka za po 20%.

Rezultati: **a)** Da, $\alpha = 2$. **b)** Vrijednost funkcije f poveća se za 44%.

5. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = x^2$ i $y = 2 \cdot x + 3$.

Rezultat: $P = \dfrac{32}{3}$ kv. jed.

6. Nađite sve funkcije $y = y(x)$ čiji je koeficijent elastičnosti $E_{y,x} = -x^2$ i čija je vrijednost 11 za $x = 0$.

Rezultat: $y = 11 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$.

7. Potrošački kredit u iznosu od 13 000 kn odobren je na rok od 7 mjeseci uz 20% učešća i 12% godišnjih anticipativnih kamata. Izračunajte prosječan iznos mjesečne rate.

Rezultat: $R = 1545.14$ kn.

2. skupina zadataka

1. Zadani su vektori $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Izrazite vektor b kao linearnu kombinaciju preostalih triju vektora.

Rezultat: $b = -a_1 + 3 \cdot a_2 + a_3$.

2. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, gdje je $x \in \mathbf{R}$. Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je matrica $A \cdot B$ regularna.

Rezultat: Ne postoji takav $x \in \mathbf{R}$. ($\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A \cdot B) = 0$, pa je $A \cdot B$ singularna matrica neovisno o vrijednosti parametra x.)

3. Odredite prirodno područje definicije, intervale monotonosti i lokalne ekstreme realne funkcije f definirane propisom $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{2 \cdot x - 1}$.

Rezultati: $D_f = \mathbf{R}$, intervali rasta: $\left\langle -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ i $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right\rangle$, interval pada: $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$, f ima lokalni minimum $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) \cdot e^{1+\sqrt{2}}$ za $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, te lokalni maksimum $\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot e^{1-\sqrt{2}}$ za $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Odredite lokalne ekstreme realne funkcije $f(x, y) = x$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 4$.

Rezultat: f ima lokalni maksimum 2 za $(x, y) = (2, 0)$.

5. Odredite neodređeni integral $\int \frac{x+1}{(x+4)^2} \cdot dx$.

Rezultat: $I = \frac{3}{x+4} + \ln(x+4) + C,\ C \in \mathbf{R}$.

6. Nađite sve funkcije $y = y(x)$ čiji je koeficijent elastičnosti $E_{y,\,x} = -2$ i čija je vrijednost 0.4 za $x = 1$.

Rezultat: $y = \frac{2}{5 \cdot x^2}$.

7. Potrošački kredit u iznosu od 15 000 kn odobren je na rok od 5 mjeseci uz 20% učešća i 8% godišnjih anticipativnih kamata. Izračunajte iznos prosječne mjesečne rate.

Rezultat: $R = 2448.00$ kn.