2. OSNOVE LINEARNOGA PROGRAMIRANJA

2.1. STANDARDNI OBLIK PROBLEMA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA.

2.1.1. PROBLEM MATEMATIČKOGA PROGRAMIRANJA

- Mnogi praktični problemi sastoje se u određivanju *lokalnih* ili *globalnih* ekstrema (minimuma ili maksimum) realne funkcije dviju ili više realnih varijabli uz *određene uvjete* ili bez tih uvjeta.
- Funkcija čiji ekstrem tražimo obično ima neko ekonomsko značenje (npr. dobit, troškovi itd.).
- Uvjeti (ograničenja) uz koja tražimo ekstrem najčešće se zadaju u obliku (ne)jednadžbi i predstavljaju različite tehnološke, tržišne i druge uvjete.

2.1.1. PROBLEM MATEMATIČKOGA PROGRAMIRANJA

- Opći problem matematičkoga programiranja može se zapisati u obliku
  - $\max f(x)$
- pod uvjetima (kratica: p.u.)
  - $g_i(x) = 0$, za svaki $i = 1, \ldots, m$;
  - $h_j(x) \leq 0$, za svaki $j = 1, 2, \ldots, p$;
  - $x \in G$
- Pritom su g_i, $h_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ realne funkcije n realnih varijabli, a G neki podskup skupa $\mathbf{R}^n$.

2.1.1. PROBLEM MATEMATIČKOGA PROGRAMIRANJA

- Funkciju f nazivamo *funkcija cilja* ili *funkcija kriterija*.
- Skup $S = \{x \in G: g_i(x) = 0$, za svaki $i = 1, \ldots, m$, $h_j(x) \leq 0$, za svaki $j = 1, \ldots, p\}$ naziva se *skup mogućih rješenja*.
- Svaki element skupa S naziva se *moguće rješenje* problema matematičkoga programiranja.
- Ovisno o tipu funkcija f, g_i i h_j problemi matematičkoga programiranja mogu se podijeliti na različite tipove (*klase*).
- U ovom kolegiju mi ćemo promatrati klase problema *linearnoga programiranja.*

2.1.2. PROBLEM LINEARNOGA PROGRAMIRANJA

- Ako su f, g_i i h_j linearne funkcije, tj. funkcije oblika
- $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n$,
- gdje su $a_1, \ldots, a_n$ realne konstante, a $x_1, \ldots, x_n$ varijable koje želimo minimizirati (tzv. *strukturne varijable*), tada govorimo o *linearnom programiranju.*
- Pritom dozvoljavamo da se u pojedinoj funkciji iz *skupa uvjeta* ne mora pojavljivati svih n varijabli, ali svih n varijabli u praksi bi se trebalo pojavljivati u funkciji cilja.

2.1.3. STANDARDNI OBLIK PROBLEMA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA

- U skladu s navedenim, možemo napisati *standardni oblik* problema linearnoga programiranja:

$$
\begin{aligned}
&\max z = z(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n \\
&\text{p.u.} \\
&a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \le b_1, \\
&\vdots \\
&a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \le b_m, \\
&x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

2.1.3. STANDARDNI OBLIK PROBLEMA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA

- Označimo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

- Tada standardni oblik problema linearnoga programiranja zapisan u matričnom obliku glasi:

$$\begin{aligned} &\max z = c^T \cdot x \\ &\text{p.u.} \\ &A \cdot x \leq b, \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

2.1.4. NAPOMENA

- U formulaciji problema matematičkoga, pa i linearnoga programiranja pretpostavili smo da tražimo maksimum funkcije f.
- Ako je potrebno odrediti minimum funkcije f, tada je vrlo korisno primijeniti jednakost
- $\min f(x) = \max(-f(x))$
- Analogno, ako neki od uvjeta sadrži nejednakost oblika $\geq$, onda taj uvjet najprije pomnožimo s (-1), pa potom nastavljamo rješavanje problema

2.1.5. METODE RJEŠAVANJA PROBLEMA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA

- Danas je poznato više različitih metoda za rješavanje problema linearnoga programiranja.
- Za slučaj $n = 2$ najprikladnija (i najjednostavnija) metoda je tzv. *grafička metoda*.
- Za slučaj $n \geq 3$ najčešće korištena metoda je tzv. *simpleks metoda*.
- Sve navedene metode implementirane su u različitim računalnim programima.
- U ovom kolegij koristit ćemo računalni program MS Excel.

2.1.6. STRATEGIJA RJEŠAVANJA PROBLEMA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA

- **1.** *Modelirati* problem iskazan riječima kao problem linearnoga (odnosno, općenito matematičkoga programiranja).
- **2.** Odabrati najpogodniju *metodu* za rješavanje dobivenoga matematičkoga modela.
- **3.** *Interpretirati* rezultate dobivene odabranom metodom i *analizirati* njihovu *osjetljivost* (tj. što se dogodi ukoliko promijenimo vrijednost svakoga pojedinoga rezultata za relativno mali realan broj).