



**TRGOVINSKO POSLOVANJE**  
Specijalistički diplomske stručne studije

**SEMINARSKI RAD IZ KOLEGIJA**

**KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI**

**Primjena input-output analize i linearnog programiranja  
na neke probleme iz trgovinskog poslovanja**

Mentor: mr.sc. Bojan Kovačić

Student: Aleksandra Opačić

Požega, siječanj 2012.

## **SADRŽAJ**

1. UVOD .....	2
2. INPUT – OUTPUT ANALIZA .....	2
2.1. ZADATAK .....	2
2.2. RJEŠENJE.....	3
3. PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA .....	6
3.1. ZADATAK .....	6
3.2. RJEŠENJE.....	7
4. LITERATURA .....	9

## 1. UVOD

U ovom seminarskom radu obrađena su dva primjera primjena matematičkih modela na probleme iz područja trgovinskog poslovanja. Prvi se primjer odnosi na input-output analizu, dok se drugi primjer odnosi na primjenu linearног programiranja. U rješavanju navedenih primjera korišteni su računalni programi *Eigenmath* i *WinQSB*.

## 2. INPUT – OUTPUT ANALIZA

### 2.1. ZADATAK

Zadana je input–output tablica trosektorske ekonomije Republike Ubananije:

$Q_i$	$Q_{ij}$			$q_i$
200	80	$x$	50	40
250	$y$	50	80	60
320	80	90	$z$	90

- a) Dopunite tablicu podatcima koji nedostaju. Interpretirajte **svaki** od nedostajućih podataka.

- b) Ako su planirani novi ukupni outputi  $Q' = \begin{bmatrix} 250 \\ 300 \\ 350 \end{bmatrix}$  bez promjene tehnoloških uvjeta,

napišite novu input–output tablicu. (Napišite analitičke izraze pomoću kojih ste računali svaki pojedini element.)

## 2.2. RJEŠENJE

a) Računamo nepoznate veličine  $x$ ,  $y$  i  $z$ :

$$x = 200 - (80 + 50 + 40) = 30$$

$$y = 250 - (50 + 80 + 60) = 60$$

$$z = 320 - (80 + 90 + 90) = 60$$

Njihove intereinterpretacije su:

$x = 30$  je količina proizvoda proizvedena u sektoru 1 koja prelazi u sektor 2 radi normalnoga odvijanja procesa proizvodnje u sektoru 2.

$y = 60$  je količina proizvoda proizvedena u sektoru 2 koja prelazi u sektor 1 radi normalnoga odvijanja procesa proizvodnje u sektoru 1.

$z = 60$  je količina proizvoda proizvedena u sektoru 3 koja ostaje u sektoru 3 radi normalnoga odvijanja procesa proizvodnje u tom sektoru.

c) Računamo elemente matrice normativa  $A$  prema formuli  $a_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_j}$ :

$$a_{11} = \frac{Q_{11}}{Q_1} = \frac{80}{200} = 0.4$$

$$a_{12} = \frac{Q_{12}}{Q_2} = \frac{30}{250} = 0.12$$

$$a_{13} = \frac{Q_{13}}{Q_3} = \frac{50}{320} = 0.15625$$

$$a_{21} = \frac{Q_{21}}{Q_1} = \frac{60}{200} = 0.3$$

$$a_{22} = \frac{Q_{22}}{Q_2} = \frac{50}{250} = 0.2$$

$$a_{23} = \frac{Q_{23}}{Q_3} = \frac{80}{320} = 0.25$$

$$a_{31} = \frac{Q_{31}}{Q_1} = \frac{80}{200} = 0.4$$

$$a_{32} = \frac{Q_{32}}{Q_2} = \frac{90}{250} = 0.36$$

$$a_{33} = \frac{Q_{33}}{Q_3} = \frac{60}{320} = \frac{3}{16} = 0.1875$$

Matrica normativa  $A$  glasi

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.12 & 0.15625 \\ 0.3 & 0.2 & 0.25 \\ 0.4 & 0.36 & 0.1875 \end{bmatrix}$$

Prema podatcima iz zadatka, matrica  $Q'$  novih ukupnih količina proizvoda je:

$$Q' = \begin{bmatrix} 250 \\ 300 \\ 350 \end{bmatrix}.$$

Neka je  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Računamo matricu tehnologije  $T$  prema formuli  $T = E - A$ .

Dobijemo:

$$T = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.12 & -0.15625 \\ -0.3 & 0.8 & -0.25 \\ -0.4 & -0.36 & 0.8125 \end{bmatrix}.$$

Računamo planirane količine finalne potražnje svakog sektora prema formuli  $q' = T \cdot Q'$ .

Dobijemo:

$$q'_1 = T_{11} \cdot Q'_1 + T_{12} \cdot Q'_2 + T_{13} \cdot Q'_3 = 0.6 \cdot 250 + (-0.12) \cdot 300 + (-0.15625) \cdot 350 = 59.3125$$

$$q'_2 = T_{21} \cdot Q'_1 + T_{22} \cdot Q'_2 + T_{23} \cdot Q'_3 = (-0.3) \cdot 250 + 0.8 \cdot 300 + (-0.25) \cdot 350 = 77.5$$

$$q'_3 = T_{31} \cdot Q'_1 + T_{32} \cdot Q'_2 + T_{33} \cdot Q'_3 = (-0.4) \cdot 250 + (-0.36) \cdot 300 + 0.8125 \cdot 350 = 76.375$$

Dakle, vektor finalne potražnje je:

$$q = \begin{bmatrix} 59.3125 \\ 77.5 \\ 76.375 \end{bmatrix}.$$

Računamo novu količinu proizvoda proizvedenih u sektoru  $i$  koja prelazi u sektor  $j$  radi normalnog odvijanja procesa proizvodnje u tom sektoru prema formuli:  $Q_{ij}^* = a_{ij} \cdot Q_i^*$ .

Dobijemo:

$$Q_{11}^* = a_{11} \cdot Q_1^* = 0.4 \cdot 250 = 100$$

$$Q_{21}^* = a_{12} \cdot Q_2^* = 0.12 \cdot 300 = 36$$

$$Q_{13}^* = a_{13} \cdot Q_3^* = 0.15625 \cdot 350 = 54.6875$$

$$Q_{21}^* = a_{21} \cdot Q_1^* = 0.3 \cdot 250 = 75$$

$$Q_{22}^* = a_{22} \cdot Q_2^* = 0.2 \cdot 300 = 60$$

$$Q_{23}^* = a_{23} \cdot Q_3^* = 0.25 \cdot 350 = 87.5$$

$$Q_{31}^* = a_{31} \cdot Q_1^* = 0.4 \cdot 250 = 100$$

$$Q_{32}^* = a_{32} \cdot Q_2^* = 0.36 \cdot 300 = 108$$

$$Q_{33}^* = a_{33} \cdot Q_3^* = 0.1875 \cdot 350 = 65.625$$

Nova input-output tablica glasi:

$Q_i$	$Q_{ij}$			$q_i$
250	100	36	54.6875	59.3125
300	75	60	87.5	77.5
350	100	108	65.625	76.375

### **3. PRIMJENA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA**

#### **3.1. ZADATAK**

Tvornica bezalkoholnih pića *Fani* d.o.o. proizvodi bezalkoholno piće *Nara-tonic* miješanjem dvaju sokova: *Nara-sode* i *Nara-juice*. Svaki decilitar *Nara-sode* sadrži 0.4 dag šećera i 1.5 mg vitamina C. Svaki decilitar *Nara-juicea* sadrži 0.3 dag šećera i 2.5 mg vitamina C. Ukupni troškovi proizvodnje jednog decilitra *Nara-sode* iznose 2 n.j., a ukupni troškovi proizvodnje jednoga decilitra *Nara-juicea* iznose 3 n.j.

Marketinški odjel tvrtke *Fani* d.o.o. odlučio je da svaka litra soka *Nara-tonic* mora sadržavati najmanje 20 mg vitamina C i najviše 4 dag šećera. Potrebno je napraviti optimalan plan proizvodnje jednolitrenoga pakovanja *Nara-tonica* tako da budu ispunjeni svi postavljeni zahtjevi i da ukupan trošak proizvodnje bude minimalan.

- a)** Formirajte matematički model promatranoga problema i riješite ga grafičkom metodom.  
*(Napomena: 1 litra = 10 decilitara.)*
  
- b)** Koristeći računalni program *WinQSB* ispitajte bi li na dobiveno optimalno rješenje utjecao dodatan zahtjev da količina svakoga pojedinoga sastojka smjese mora biti cjelobrojna. Ako je Vaš odgovor potvrđan, odredite smjer i iznos relativne promjene količine svakoga sastojka u odnosu na optimalan plan iz **a)** podzadatka.

### 3.2. RJEŠENJE

Neka su:

$x_1$  - obujam *Nara-sode* (iskazan u decilitrima) koji „ulazi“ u jednu litru *Nara-tonica*

$x_2$  - obujam *Nara-juicea* (iskazan u decilitrima) koji „ulazi“ u jednu litru *Nara-tonica*

Ukupni obujam obaju sastojaka (u decilitrima):  $x_1 + x_2$

Troškovi proizvodnje  $x_1$  decilitara *Nara-sode* iznose:  $2 \cdot x_1$  n.j.

Troškovi proizvodnje  $x_2$  decilitara *Nara-juicea* iznose :  $3 \cdot x_2$  n.j.

Ukupni troškovi proizvodnje jedne litre *Nara-tonica*:  $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$  n.j.

Masa šećera u  $x_1$  decilitara *Nara-sode*:  $0.4 \cdot x_1$  dekagrama

Masa šećera u  $x_2$  decilitara *Nara-juicea*:  $0.3 \cdot x_2$  dekagrama

Ukupna masa šećera u jednoj litri *Nara-tonica*:  $0.4 \cdot x_1 + 0.3 \cdot x_2$  dekagrama

Masa vitamina C u  $x_1$  decilitara *Nara-sode*:  $1.5 \cdot x_1$  miligrama

Masa vitamina C u  $x_2$  decilitara *Nara-juicea*:  $2.5 \cdot x_2$  miligrama

Ukupna masa vitamina C u *Nara-tonicu*:  $1.5 \cdot x_1 + 2.5 \cdot x_2$  miligrama

a) Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{minimizirati } z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$$

pod uvjetima:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 10 \\0.4 \cdot x_1 + 0.3 \cdot x_2 &\leq 4 \\1.5 \cdot x_1 + 2.5 \cdot x_2 &\geq 20 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Rješavanjem postavljenog modela dobijemo:

$$\begin{aligned}x_1^* &= 5 \\x_2^* &= 5 \\z^* &= 25\end{aligned}$$

Treba uzeti po 5 decilitara od svake vrste soka tj. 5 decilitara *Nara-sode* i 5 decilitara *Nara-juicea*. Optimalni troškovi proizvodnje jedne litre *Nara-tonica* iznose 25 n.j.

b) Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{minimizirati } z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$$

pod uvjetima:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 10 \\0.4 \cdot x_1 + 0.3 \cdot x_2 &\leq 4 \\1.5 \cdot x_1 + 2.5 \cdot x_2 &\geq 20 \\x_1, x_2 &\in \{0,1,2,3,\dots\}\end{aligned}$$

Rješavanjem postavljenog modela dobijemo:

$$\begin{aligned}x_1^* &= 5 \\x_2^* &= 5 \\z^* &= 25\end{aligned}$$

Dodatni zahtjev da količina svakog pojedinog sastojka mora biti cjelobrojna nema utjecaja na dobiveno optimalno rješenje.

Kao i u a) podzadatku potrebno je uzeti po 5 decilitara *Nara-sode* i 5 decilitara *Nara-juicea*, što znači da su prvotni optimalni obujmovi *Nara-sode* i *Nara-juicea* ostali isti.

Optimalni troškovi proizvodnje također ostaju nepromijenjeni i iznose 25 n.j..

#### 4. LITERATURA

1. L. Neralić, B. Šego: *Matematika*, Element, Zagreb, 2009.
2. L. Neralić: *Uvod u matematičko programiranje*, Element, Zagreb, 2003.
3. Nastavni materijali dostupni na <http://bkovacic.weebly.com>

Prihvaćeno 09.01.2012.