SEMINARSKI RAD IZ KOLEGIJA

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

Osnove matričnog računa. Input-output analiza.

Primjena linearnoga programiranja na probleme u trgovinskom poslovanju.

Mentor: mr.sc. Bojan Kovačić

Student: Sanela Iličić

Požega, siječanj 2012.

SADRŽAJ

1. UVOD

U ovom seminarskom radu obrađene su dvije primjene matematičkih modela na probleme iz područja trgovinskog poslovanja. Prva se primjena odnosi na input-output analizu, a druga na rješavanje jednoga problema iz trgovinskoga poslovanja pomoću linearnoga programiranja.. U rješavanju ova dva zadatka korišteni su računalni programi *Eigenmath i WinQSB*.

2. INPUT-OUTPUT ANALIZA

2.1. *ZADATAK*

Zadana je input–output tablica trosektorske ekonomije Kraljevine Niškoristije:

Q_i	Q_{ij}			q_i
250	x	100	70	30
320	140	80	y	40
400	150	z	120	50

a) Dopunite tablicu podatcima koji nedostaju. Interpretirajte **svaki** od nedostajućih podataka.

b) Novim gospodarskim planom u drugom sektoru predviđen je ukupni output od 400 jedinica, u trećem sektoru ukupni output od 500 jedinica, a u prvom sektoru finalna potražnja 50 jedinica. Sastavite novu input–output tablicu. (Napišite analitičke izraze pomoću kojih ste računali svaki pojedini element.)

2.2. RJEŠENJE

a) Odredimo najprije nepoznate vrijednosti x, y i z:

$$x = 250 - (100 + 70 + 30) = 50$$
$$y = 320 - (140 + 80 + 40) = 60$$
$$z = 400 - (150 + 120 + 50) = 80$$

Njihove interpretacije su:

x = 50 je količina proizvoda proizvedena u sektoru 1 koja ostaje u sektoru 1 radi normalnoga odvijanja procesa proizvodnje u tom sektoru.

$y = 60$ je količina proizvoda proizvedena u sektoru 2 koja prelazi u sektor 3 radi normalnoga odvijanja procesa proizvodnje u sektoru 3.

z = 80 je količina proizvoda proizvedena u sektoru 3 koja prelazi u sektor 2 radi normalnog odvijanja procesa proizvodnje u sektoru 2.

b) Računamo elemente matrice normativa A prema formuli $a_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_j}$:

$$a_{11} = \frac{Q_{11}}{Q_1} = \frac{50}{250} = 0.2$$
$$a_{12} = \frac{Q_{12}}{Q_2} = \frac{100}{320} = 0.3125$$
$$a_{13} = \frac{Q_{13}}{Q_3} = \frac{70}{400} = 0.175$$

$$a_{21} = \frac{Q_{21}}{Q_1} = \frac{140}{250} = 0.56$$
$$a_{22} = \frac{Q_{22}}{Q_2} = \frac{80}{320} = 0.25$$
$$a_{23} = \frac{Q_{23}}{Q_3} = \frac{60}{400} = 0.15$$

$$a_{31} = \frac{Q_{31}}{Q_1} = \frac{150}{250} = 0.6$$

$$a_{32} = \frac{Q_{32}}{Q_2} = \frac{80}{320} = 0.25$$

$$a_{33} = \frac{Q_{33}}{Q_3} = \frac{120}{400} = 0.3$$

Tako smo dobili:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3125 & 0.175 \\ 0.56 & 0.25 & 0.15 \\ 0.6 & 0.25 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Neka je $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Računamo matricu tehnologije T prema formuli $T = E - A$.

Dobijemo:

$$T = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3125 & -0.175 \\ -0.56 & 0.75 & -0.15 \\ -0.6 & -0.25 & 0.7 \end{bmatrix}$$

U zadatku su zadane nove vrijednosti za ukupni output drugog i trećeg sektora pa uzmemo:

$$Q' = \begin{bmatrix} x \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Izračunamo vektor novih finalnih potražnji q' prema formuli $q' = T \cdot Q'$. Dobijemo:

$$q' = \begin{bmatrix} -212.5 & + & 0.8 \cdot x \\ 225 & - & 0.56 \cdot x \\ 250 & - & 0.6 \cdot x \end{bmatrix}$$

U zadatku je zadana vrijednost novih finalnih potražnji prvog sektora: $q_1' = 50$.

Stoga nepoznanicu x određujemo iz jednadžbe:

$$-212.5 + 0.8 \cdot x = 50$$

Dobivamo:

$$-212.5 + 0.8 \cdot x = 50$$
$$0.8 \cdot x = 50 + 212.5$$
$$0.8 \cdot x = 262.5$$
$$x = \frac{262.5}{0.8}$$
$$x = 328.125$$

Dakle, vektor novih ukupnih outputa je:

$$Q' = \begin{bmatrix} 328.125 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Računamo preostale dvije komponente vektora novih finalnih potražnji. Dobijemo:

$$q' = \begin{bmatrix} 50 \\ 225 - 0.56 \cdot 328.125 \\ 250 - 0.6 \cdot 328.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 41.25 \\ 53.125 \end{bmatrix}$$

Računamo preostale elemente nove input-output tablice prema formuli $Q_{ij}^{'} = a_{ij} \cdot Q_j^{'}$:

$$Q_{11}^{'} = a_{11} \cdot Q_1^{'} = 0.2 \cdot 328.125 = 65.625$$
$$Q_{12}^{'} = a_{12} \cdot Q_2^{'} = 0.3125 \cdot 400 = 125$$
$$Q_{13}^{'} = a_{13} \cdot Q_3^{'} = 0.175 \cdot 500 = 87.5$$

$$Q_{21}^{'} = a_{21} \cdot Q_1^{'} = 0.56 \cdot 328.125 = 183.75$$
$$Q_{22}^{'} = a_{22} \cdot Q_2^{'} = 0.25 \cdot 400 = 100$$
$$Q_{23}^{'} = a_{23} \cdot Q_3^{'} = 0.15 \cdot 500 = 75$$

$$Q'_{31} = a_{31} \cdot Q'_1 = 0.6 \cdot 328.125 = 196.875$$
$$Q'_{32} = a_{32} \cdot Q'_2 = 0.25 \cdot 400 = 100$$
$$Q'_{33} = a_{33} \cdot Q'_3 = 0.3 \cdot 500 = 150$$

Nova input-output tablica je:

Q_i	Q_{ij}			q_i
328.125	65.625	125	87.5	50
400	183.75	100	75	41.25
500	196.875	100	150	53.125

3. PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

3.1. ZADATAK

U tvornici za proizvodnju bezalkoholnih napitaka *Cockta-Cola* u Piškorevcima tjedno se izrađuju dvije vrste napitaka: *Cockta* i *Cola*. U procesu proizvodnje svaki od njih prolazi kroz tri skupine strojeva: S_1, S_2 i S_3. Tehnološki uvjeti proizvodnje i tjedni kapaciteti navedeni su u sljedećoj tablici.

Grupa strojeva	Vrijeme potrebno za proizvodnju napitka „*Cockta*“ [sati/litra]	Vrijeme potrebno za proizvodnju napitka „*Cola*“ [sati/litra]	Tjedni kapacitet grupe strojeva [sati]
S_1	5	6	22
S_2	4	4	16
S_3	6	5	22

Neto-prihod po jednoj litri *Cockte* iznosi 12.00 kn, a neto-prihod po jednoj litri *Cole* iznosi 13.00 kn. Treba napraviti tjedni plan proizvodnje kojim će se ostvariti najveći ukupni neto-prihod.

a) Formirajte matematički model promatranog problema i riješite ga grafičkom metodom. Interpretirajte **svaku** komponentu optimalnog rješenja i optimalnu vrijednost funkcije cilja.

b) Ako se zbog remonta strojeva tjedni kapaciteti smanje na redom 16, 12 i 17 sati, formirajte novi matematički model i riješite ga grafičkom metodom. Usporedite novo optimalno rješenje s optimalnim rješenjem iz **a)** podzadatka (ukoliko je moguće, za svaku komponentu

optimalnog rješenja i optimalnu vrijednost funkcije cilja odredite smjer i iznos relativne promjene).

3.2. *RJEŠENJE*

a) Neka su:

$x_1 =$ obujam napitka *Cockta* (iskazan u litrama)

$x_2 =$ obujam napitka *Cola* (iskazan u litrama)

Neto prihod od prodaje x_1 litre *Cockte* iznosi: $12 \cdot x_1$ kn.

Neto prihod od prodaje x_2 litre *Cole* iznosi: $13 \cdot x_2$ kn.

Ukupni neto prihod od prodaje obiju vrsta napitaka iznosi: $12 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2$ kn.

Vrijeme potrebno za proizvodnju x_1 litara *Cockte* na grupi S_1 iznosi: $5 \cdot x_1$ sati.

Vrijeme potrebno za proizvodnju x_2 litara *Cole* na grupi S_1 iznosi: $6 \cdot x_2$ sati.

Ukupno vrijeme obiju vrsta napitaka na grupi S_1 iznosi: $5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2$ sati.

Vrijeme potrebno za proizvodnju x_1 litara *Cockte* na grupi S_2 iznosi: $4 \cdot x_1$ sati.

Vrijeme potrebno za proizvodnju x_2 litara *Cole* na grupi S_2 iznosi: $4 \cdot x_2$ sati.

Ukupno vrijeme obiju vrsta napitaka na grupi S_2 iznosi: $4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$ sati.

Vrijeme potrebno za proizvodnju x_1 litara *Cockte* na grupi S_3 iznosi: $6 \cdot x_1$ sati.

Vrijeme potrebno za proizvodnju x_2 litara *Cole* na grupi S_3 iznosi: $5 \cdot x_2$ sati.

Ukupno vrijeme obiju vrsta napitaka na grupi S_3 iznosi: $6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ sati.

Prema zadanim podacima dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{maksimizirati } z = 12 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2$$

pod uvjetima

$$\begin{aligned}
&5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 22 \\
&4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 16 \\
&6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 22 \\
&x_1 \geq 0 \\
&x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Rješavanjem ovoga modela dobije se:

$$\begin{aligned}
&x_1^* = 2 \\
&x_2^* = 2 \\
&z^* = 50
\end{aligned}$$

Dakle, optimalni tjedni plan proizvodnje je: proizvesti 2 litre napitka *Cockta* i 2 litre napitka *Cola*. Optimalni tjedni ukupni prihod iznosi $z^* = 50$ kn.

b) Prema zadanim podacima dobivamo sljedeći matematički model:

$$\text{maksimizirati } z = 12 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2$$

pod uvjetima

$$\begin{aligned}
&5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 16 \\
&4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 12 \\
&6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 17 \\
&x_1 \geq 0 \\
&x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Rješavanjem ovoga modela dobije se:

$$x_1^* = 2$$
$$x_2^* = 1$$
$$z^* = 37$$

Dakle, smanjenjem tjednog kapaciteta optimalni plan proizvodnje je: proizvesti 2 litre napitka *Cockta* i 1 litru napitka *Cola*. Optimalni tjedni ukupni prihod iznosi $z^* = 37$ kn.

Uočavamo da je, u odnosu na prvotno optimalno rješenje, obujam napitka *Cockta* ostao nepromijenjen, obujam napitka *Cola* se smanjio za $\frac{2-1}{2} \cdot 100 = 50\%$, dok se optimalni tjedni ukupni prihod smanjio za $\frac{50-37}{50} \cdot 100 = 26\%$.

4. LITERATURA

1. L. Neralić, B. Šego: *Matematika*, Element, Zagreb, 2009.
2. L. Neralić: *Uvod u matematičko programiranje 1*, Element, Zagreb, 2003.
3. Nastavni materijali dostupni na http://bkovacic.weebly.com

prihvaćeno 09.01.2012.